MISCELLANEA TAURINENSIA.

TOMUS TERTIUS.

MÉLANGES

DE

PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUE

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE

DE TURIN

POUR LES ANNÉES 1762-1765.



A TURIN, MDCCLXVI.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

AVEC PERMISSION.

TABLE

des Mémoires contenus dans ce Volume.

MÉMOIRE

MEMOIRE

Sur la différente diſſolubilité des Sels neutres dans l'eſprit de vin contenant des obſervations particulières ſur pluſieurs de ces Sels.

PAR M. MACQUER.

L'Examen des propriétés des Sels neutres eſt une des plus importantes, mais en même tems une des plus vaſtes matières que nous offre la Chimie, ſur tout ſi l' on étend comme celà eſt à propos la dénomination de *Sels neutres* à toutes les combinaiſons des acides quelconques avec toutes les ſubſtances terreuſes, alkalines ſalines & métalliques, avec les quelles ces acides ſont capables de s' unir. La claſſe de ces corps compoſés où ſurcompoſés eſt ſi étendue qu'il s' en faut encore beaucoup qu'on les connoiſſe tous; il en reſte un grand nombre que les Chymiſtes n'ont jamais vû, & l'on peut dire même que toutes les propriétés des Sels neutres les plus communs, & les plus uſités, ne nous ſont point encore connues.

Une des propriétés de ces Sels qu'il eſt le plus important de connoître c' eſt leur diſſolubilité plus ou moins grande, c' eſt cette propriété qui peut donner le plus de lumière ſur le véritable état, ou ſur le dégré de ſaturation réciproque de leurs acides & de leurs baſes; il eſt aiſé de ſentir auſſi que c'eſt de cette même propriété que dépendent principalement les phenomenes de leur criſtalliſation & que par conſequent elle eſt intimement liée avec la théorie de cette grande & intereſſante operation.

Mais quelques belles que ſoient les ſpéculations qu'on puiſſe faire ſur ces objets, il n' eſt pas moins certain qu'elles ne peuvent être qu'incertaines & même trompeuſes, à moins qu'elles ne ſoient fondées ſur les faits, or les faits nous manquent préciſément ſur cette matière, ou du moins nous pouvons aſſûrer qu'il s'en faut encore beaucoup qu'on ait conſtaté tous ceux qu'il eſt eſſentiel de connoître. Pluſieurs bons Chymiſtes ont à la vérité déterminé la quantité que peut diſſoudre l'eau de pluſieurs des Sels neutres des plus connus & c' eſt aſſurément un très-grand avantage, mais l' eau n' eſt pas le ſeul diſſolvant qui ait de l'action ſur les Sels; l'eſprit de vin qui eſt un menſtrue tenant en même tems de la nature de l'eau, & de celle de l'huile eſt capable d' agir auſſi ſur ces compoſés & d'en diſſoudre pluſieurs, en plus grande quantité que l' eau même; or perſonne que je ſache n' à entrepris de déterminer quels ſont les Sels, dont l' eſprit de vin eſt le diſſolvant & de quelle quantité il ſe charge de chacun de ces Sels; on ſçait ſeulement en gros qu'il y a certains Sels, que l'eſprit de vin diſſout tels que la *terre foliée*, le *Sel ſedatif*, tandis qu'il ne touche point à d'autres, mais c' eſt là tout ce que l' on ſçait, & cet objet mérite aſſurément bien qu' on ſe donne la peine de l'examiner plus à fond; une ſuite d' expériences exactes ſur cette matière ne peut donc manquer de repandre du jour non ſeulement ſur la nature des différens Sels, mais encore ſur celle de l' eſprit de vin; lors qu'on connoîtra bien quels ſont les Sels que ce menſtrue diſſout, quels ſont ceux qu'il ne diſſout point, on ſera à portée d'entreprendre une autre ſuite d' expériences relatives à la criſtalliſation de ces derniers qu'on pourra procurer par des additions ſucceſſives de différentes quantités d'eſprit de vin dans l' eau qui les tient en diſſolution. Enfin l' eſprit de vin étant un des diſſolvans qu'on peut employer avec le plus de ſuccès dans l'analyſe des végétaux & des

des animaux par les menſtrues, laquelle eſt ſans contredit la plus exacte & la plus ſure de toutes, on ſera à portée de connoître quelles ſont celles des parties Salines de ces composés que l' eſprit de vin en peut extraire, & de les ſéparer enſuite de ce diſſolvant pour les obtenir dans leur état naturel, & ſans qu'elles aient ſouffert la moindre altération.

Ce ſont là les principales conſidérations qui m' ont déterminé à entreprendre le travail que j' ai l' honneur de préſenter à l' Illuſtre Academie des Sciences de Turin, & de ſoumettre à ſes lumières; mais, comme je l' ai deja remarqué cet objet eſt d' une étendue ſi conſidérable, qu'il ſeroit impoſſible de l' épuiſer dans un ſeul Memoire; j' ai donc été obligé de me borner dans celui-ci à un certain nombre de Sels, j' ai choiſis ceux qui réſultent de l'union des trois *acides minéraux*, *Vitriolique*, *Nitreux & Marin*, avec la *Terre calcaire*, *l'Alkali fixe végétal*, *l'Alkali fixe minéral*, *ou la baſe du Sel commun*, *l'Alkali volatil*, *l'Argent*, *le Cuivre*, *le Fer & le Mercure*.

Comme la qualité de l' eſprit de vin peut influer beaucoup ſur les réſultats des expériences de la nature de celles dont je vais rendre compte, il eſt à propos que je détermine de quel eſpéce étoit l' eſprit de vin dont je me ſuis ſervi; il a été le même pour toutes les expériences, j' ai crû devoir me ſervir d' eſprit de vin le plus déphlegmé & le mieux rectifié qu'il ſeroit poſſible, mais rectifié ſans aucune addition ny interméde, & ſimplement par des diſtillations bien ménagées & ſuffiſamment réiterées, dans l'appréhenſion ou qu'il ne fut alteré par l' action des intermédes, ou qu'il n' en enlevat quelques portions avec lui dans la diſtillation, & que cela n'occaſionnat quelque faux réſultat dans les expériences. Celui dont je me ſuis ſervi & qui avoit été rectifié comme je l' ai dit ſans aucun interméde, peſoit ſix gros cinquante quatre grains dans

une fiole qui contient juſte une once d' eau diſtillée, le Thermométre de M. de Réaumur étant à 10 degrés au deſſus du terme de la glace. Je ſçai qu'il eſt poſſible d'avoir de l' eſprit de vin encore plus déphlegmé, j' en ai vû qui ne peſoit que ſix gros 48 à 49 grains dans la bouteille d'une once d' eau, mais j' ai donné la préférence a celui dont je viens de parler, par les raiſons que j' ai dites, ſauf à regarder comme nulles les quantités de Sel qu'il pourroit diſſoudre à raiſon de ſon peu de flegme ſurabondant, quand ces quantités ne ſeroient que proportionnées à ce peu de flegme, c' eſt-à-dire aſſès petites, pour ne pouvoir être ni peſées, ni même appréciées.

En ſecond lieu comme l' eau de la criſtalliſation des Sels pouvoit contribuer auſſi à en faire diſſoudre une beaucoup plus grande quantité dans l' eſprit de vin, tous ceux des Sels que j' ai ſoumis à mes expériences, ont été d'abord entiérement dépouillés de leur eau de criſtalliſation par la déſication la plus exacte, j' ai verſé dans un matras ſur chacun de ces Sels ainſi préparés une demi once de mon eſprit de vin; j' ai mis le matras bouché, ſur un bain de ſable & je l'ai chauffé juſqu'à ce que l'eſprit de vin commençat à bouillir, j' ai filtré cet eſprit de vin tout bouillant, je l' ai laiſſé refroidir pour obſerver les criſtalliſations qui pourroient ſe faire par refroidiſſement, après quoi j'ai fait évaporer entiérement cet eſprit de vin pour recueillir & peſer ce qu'il laiſſoit de réſidu ſalin. Toutes ces circonſtances ont été obſervées pour chacune de mes expériences; elles ont été auſſi reiterées chacune deux fois de la même manière, avec cette difference que la ſeconde fois je faiſois bruler mon eſprit de vin après la digeſtion ſur le Sel, au lieu de l'évaporer, pour examiner les phenomenes que ſa flamme pourroit préſenter.

Tartre

Tartre vitriolé.

Après avoir avoir composé le *tartre vitriolé* moi même par la combinaison exacte & jusqu'au point précis de saturation de l' acide vitriolique avec l' alkali fixe végétal très-pur, après l' avoir exactement desséché, je l' ai traité comme je l' ai dit avec une demi once de mon esprit de vin, cet esprit de vin n'a rien laissé cristalliser par le refroidissement, & n' a laissé par son évaporation entière qu'une quantité trop petite de matière saline pour pouvoir être pesée & appreciée, ce qui me détermine à la regarder comme nulle par la raison que j' ai dite, & à conclure que l' esprit de vin ne dissout point le Tartre vitriolé. La flamme de l' esprit de vin qui avoit boüilli sur ce Sel ne différoit absolument en rien, de celle de l' esprit de vin le plus pur.

Nitre ordinaire.

Le Nitre que j'avois aussi composé moi même, comme je l' ai fait à l' égard de tous les autres, s' est dissous dans l' esprit de vin bouillant à la quantité de 4 grains sur la demi once d' esprit de vin, laquelle pése 288 grains une partie de ces 4 grains de Nitre s' est cristallisée très-confusement par le refroidissement. La flamme de cet esprit de vin étoit beaucoup plus grande, plus haute, plus ardente, plus jaune, & plus lumineuse que celle de l'esprit de vin pur. La capsule dans laquelle cet esprit de vin avoit été brulé est restée seche, & j' y ai trouvé les quatre grains de Nitre sec. Je crois pouvoir conclure de cette expérience que l' esprit de vin dissout à l' aide de la chaleur de l' ebullition $\frac{4}{288}$ de son poids de Nitre.

Sel

Sel marin à base d' alkali végétal nommé communement Sel fébrifuge de Sylvius.

L' esprit de vin après avoir bouilli sur *le Sel marin à base d' alkali fixe végétal*, n' a rien laissé cristalliser par le refroidissement ; par l' évaporation il a laissé près de 5 grains de ce Sel. La flamme de cet esprit de vin étoit d'abord comme celle de l' esprit de vin pur, mais elle est bientôt devenue grande, jaune, ardente, & lumineuse; il s'est trouvé pareillement 5 granis de Sel après cette combustion ainsi l' esprit de vin dissout $\frac{5}{288}$ de son poid du Sel dont il est question.

Sel de Glauber.

L' esprit de vin traité comme à l' ordinaire par l' ébullition sur le *Sel de Glauber* desséché, n' a rien laissé cristalliser de sensible par le refroidissement; il n' a rien laissé non plus après son évaporation, ny après sa combustion ; cependant sa flamme avoit une couleur rouge considérable, mais malgré cette couleur de la flamme je crois pouvoir conclure que l'esprit de vin ne dissout point le Sel de Glauber, car on verra qu'il ne faut qu'une quantité infiniment petite de Sel pour changer totalement le caractère de la flamme de l' esprit de vin.

Nitre à base d' alkali marin nommé communement Nitre quadrangulaire.

L' esprit de vin traité avec le *Nitre quadrangulaire* a laissé cristalliser par le refroidissement, mais très-confusement, une asses bonne quantité de ce Sel ; par l' évaporation & la déficcation du tout, il s'en est trouvé 15 grains. La flamme de cet esprit de vin étoit d'un jaune lumineux rou-

rougeatre depuis le commencement jusqu' à la fin ; elle étoit décrépitante & même comme fulgurante & détonnante sur la fin ; après l' entière combustion, il s' est trouvé 18 grains de Nitre quadrangulaire un peu humide, qui se sont réduits à 15 grains par la désiccation. Il résulte de cette expérience que l' esprit de vin dissout $\frac{15}{100}$ de son poids de Nitre quadrangulaire.

Sel commun.

Le Sel commun traité avec l' esprit de vin ne s' est point dissous en quantité bien appréciable. Cependant la flamme de l' esprit de vin dans lequel il avoit bouilli avoit une couleur rouge considérable, & étoit plus grande & plus ardente que celle de l' esprit de vin pur.

Sel ammoniacal vitriolique.

J' ai fait le *Sel ammoniacal vitriolique*, qu'on nomme aussi *Sel ammoniac secret de Glauber*, en combinant ensemble jusqu'au point de saturation de l'acide vitriolique concentré avec de l' alkali volatil concret dégagé du Sel ammoniac par l' alkali fixe ; il s' est fait dans l' instant du mélange une très-vive effervescence ; il s' est excité beaucoup de chaleur ; il s' en est élevé beaucoup de vapeurs fort épaisses d' un odeur singulière. Ce Sel étant au point de saturation & bien desséché étoit très-blanc, d' une saveur vive & piquante, mais ni acide, ni alkaline, il s'est cristallisé en aiguilles comme le Nitre, & ne s' est point humecté a l' air. L' esprit de vin qui avoit bouilli sur ce Sel à laissé former par le refroidissement (le termométre de M. de Raumur étant à 14 dégrés au dessus de zero) quelques petits cristaux au tour du matras, ces cristaux étoient comme des points si petits que je n' ai pû en distinguer

ſtinguer la figure à la loupe, cet eſprit de vin n'a laiſſé par ſon entière évaporation qu'un enduit extrêmement mince & inappréciable. Sa flammé d'ailleurs ne différoit en rien de celle de l'eſprit de vin pur. Je conclus de là que l'eſprit de vin ne diſſout point le Sel ammoniacal vitriolique.

Nota. J'ai réiteré l'expérience précedente avec du Sel ammoniacal vitriolique, au quel j'avois donné pour baſe l'alkali volatil *fluor* du Sel ammoniac dégagé par la chaux, & il n'y a point eû de différence dans les réſultats.

Sel ammoniacal nitreux.

J'ai fait du *Sel ammoniacal nitreux* en mêtant juſqu'à parfaite ſaturation de l'eſprit volatil de Sel ammoniac dégagé par la chaux avec de l'acide nitreux très-pur. Cette combinaiſon s'eſt faite preſque ſans effervefcence, mais il s'en eſt élevé un quantité très-conſiderable de vapeurs blanches fort épaiſſes. Ces vapeurs viennent des portions d'acide & d'alkali volatil qui s'élévent avant de s'être combinées & qui ſe rencontrent & s'uniſſent en l'air. Ce Sel après avoir été deſſéchè avoit une ſaveur de nitre très-fraiche, mais beaucoup plus vive & plus piquante que celle du nitre à baſe d'alkali fixe. L'eſprit de vin après avoir boüilli ſur ce Sel, & en avoir diſſous beaucoup comme on va le voir, le laiſſoit criſtalliſer abondamment par le moindre refroidiſſement; ces criſtaux étoient en petites aiguilles de la figure de celles du nitre, l'eſprit de vin chargé de ce Sel m'a paru avoir un odeur approchante de celle de l'*ether nitreux* il à laiſſé après ſon entière évaporation un gros & demi, ou 108 grains de nitre ammoniacal. La flamme de cet eſprit de vin étoit plus blanche & plus lumineuſe que çelle de l'eſprit de vin pur; elle noirciſſoit un peu les corps blancs qu'on y expoſoit comme le fait celle

de

de l' ether ; après que cette flamme a eu ceſſé d' elle même ; il eſt reſté environ la moitié de la liqueur qui avoit une ſaveur de nitre ammoniacal très-forte.

La portion de ce Sel qui s' étoit criſtalliſée dans l'eſprit de vin, étoit en criſtaux tranſparens par ce qu'ils retenoient vraiſemblablement de l' eſprit de vin dans leur criſtalliſation, comme les Sels criſtalliſés dans l' eau retiennent pareillement une certaine quantité de cette eau dans leur criſtaux. J' ai laiſſé ces criſtaux expoſés à l' air pendant cinq ou ſix jours le termométre étant à 18 & 19 dégrés; ils ont perdu de leur tranſparence mais ne ſont point devenus friables & en poudre comme ceux du Sel de Glauber, & autres Sels qui perdent beaucoup de leur eau de criſtalliſation par la ſeule expoſition à l' air ; au contraire, ils ont acquis un conſiſtance plus ferme, & adheroient aſſés fortement au verre qui les contenoit. L' eſprit de vin diſſout comme en le voit par cette expérience $\frac{108}{288}$ de ſon poids de Sel ammoniacal nitreux.

Sel ammoniac.

L' eſprit de vin traité par la methode commune à toutes mes autres expériences avec le Sel ammoniac ordinaire, à diſſout de ce Sel, & en a laiſſé criſtalliſer une quantité ſenſible par le refroidiſſement; il s' eſt trouvé après ſon entiére évaporation qu'il en avoit diſſous 24 grains. La flamme de cet eſprit de vin ne m' a pas paru différer de celle de l' eſprit de vin pur. L' eſprit de vin diſſout donc $\frac{24}{280}$ de ſon poids de Sel ammoniac.

Sel vitriolique à baſe calcaire ou ſélénite.

Comme les Chymiſtes ſavent préſentement que les *Pierres ſpéculaires gypſeuſes* ſont des Sels neutres formés de l'union

de l' acide vitriolique avec de la terre calcaire ; qu'elles ne ſont en un mot que ce qu'on nomme *ſélénite*, j' ai choiſi pour l' expérience préſente de nôtre Pierre ſpéculaire des environs de Paris. Après l' avoir bien lavée & netoyée, je l' ai calcinée & je l' ai traitée avec l' eſprit de vin comme les autres Sels. Ce qu'il en a laiſſé après ſon entière évaporation n' étoit qu'un enduit infiniment mince & trop peu conſidérable pour pouvoir être recüeilli & apprecié, ainſi je mets ce Sel, par les raiſons que j' ai dites, au nombre de ceux que l' eſprit de vin ne diſſout pas. La flamme d' ailleurs de cet eſprit de vin n' avoit rien d' extraordinaire.

Nitre à baſe calcaire.

J' ai fait *le Nitre calcaire* en combinant enſemble juſqu' au point de ſaturation de l' acide nitreux très-pur avec de la *craye de champagne* lavée, après avoir filtré cette diſſolution, je l' ai faite évaporer juſqu' à forte pellicule & l' ayant laiſſé expoſée au frais de la nuit, le termométre étant à 11 dégrés au deſſus de zero, cette liqueur s' eſt coagulée en une maſſe criſtalliſée en petites aiguilles extrêmément fines raſſemblées en faiſceaux & formant comme de pinceaux ou broſſes; il y avoit autour de la capſule qui contenoit cette matière quelques points criſtalliſés en criſtaux plus petits que les plus petits grains de ſablon, ces points étoient environnés circulairement de petites aiguilles pareilles à celles de broſſes, & ces aiguilles y aboutiſſoient comme à un centre, enſorte que cela repréſentoit autant de petits ſoleils rayonnans, qu'il y avoit de points. Ce Sel avoit une ſaveur très-acre & très-amère & attiroit fortement l' humidité de l' air. Ayant voulu achever de le deſſécher à feu moderé, je n' ai pu y réuſſir pendant plus de 24 heures; ce n' étoit toujours qu'une

liqueur vifqueufe, un peu rouffe, couverte d' une peau; elle fe coaguloit lors qu'elle n'etoit plus chauffée, mais elle fe refolvoit en liqueur tout de fuite par l' humidité de l' air quoique le tems fût alors très-fec (c' étoit le 3 Juin) & que le termométre fût à 22 dégrés, elle avoit la confiftence & la *poifferie* du miel. J' ai donc été obligé d'employer le feu nud au lieu du bain de fable dont je me fervois d' abord pour deffécher; elle s' eft reduite par la déficcation entière en une matière blanche ayant l' apparence d'une terre, il ne s' eft néanmoins exhalé pendant cette déficcation aucunes vapeurs d' acide nitreux. J' ai pulverifé ce Sel & l' ai mis tout chaud dans un matras; il eft fi déliquefcent que malgré la promptitude avec laquelle je faifois cet opération, il s' humectoit un peu, étant même encore chaud. J' ai verfé deffus tout de fuite la quantité ordinaire d' efprit de vin, & j' ai obfervé que cet efprit en diffolvoit beaucoup fans le fecours de l' ébullition; à ce degré de chaleur il en à diffous une plus grande quantité, & s' en eft même faturé, car il reftoit encore au fond du Sel non diffous. L' efprit de vin chargé de ce nitre calcaire avoit une couleur rouffe & un confiftence huileufe à peu près comme celle de l' huile d'amandes. Ayant laiffé refroidir cette diffolution, je n' y ai remarqué aucune criftallifation; il eft vrai qu' il faifoit alors fort chaud; le thermométre étoit à 22 dégrés. Il s' eft feulement formé au fond de la liqueur un léger fédiment terreux rouffeâtre. J' ai fait évaporer cette diffolution fpiritueufe jufqu' à ficcité; elle s' eft defféchée à une chaleur beaucoup moindre que n' avoit fait ce même Sel diffous dans l' eau; le réfidu fec pefoit une demi once c'eft-à- dire 288 grains autant que l' efprit de vin employé. La flamme de cet efprit de vin étoit d'abord femblable à celle de l' efprit de vin ordinaire, mais elle eft bien-tôt devenue grande, lumineufe, rouge, décrépitante & pétillante;

elle a laiſſé après s' être éteinte un réſidu blanc ſalin très-abondant & déliqueſcent.

Sel marin à baſe calcaire.

J' ai fait diſſoudre de la même craye dans de bon acide marin jusqu' à parfaite ſaturation il en a reſulté une liqueur ſaline neutre qui ayant été filtrée & évaporée avoit une ſaveur ſalée acre & amere. La déſiccation de ce Sel s'eſt faite un peu plus facilement que celle du nitre calcaire cependant il a fallu employer auſſi le feu nud, & le Sel qui eſt reſté m' a paru auſſi avide de l' humidité & auſſi *déliqueſcent* que le nitre calcaire. L' eſprit de vin traité avec ce *Sel marin calcaire* en a diſſous auſſi ſon poids égal, & la flamme de cet eſprit de vin étoit toute ſemblable à celle de l' eſprit de vin ſaturé de nitre calcaire.

Vitriol de lune.

J' ai fait le *Vitriol de lune* qui eſt une combinaiſon de l'acide vitriolique avec l'argent, par précipitation, de la manière ſuivante. J' ai verſé de l' acide vitriolique concentré dans une diſſolution d'argent faite par l' acide nitreux; il s' eſt fait auſſi tôt, comme cela arrive toujours, un dépôt blanc qui eſt un composé d' acide vitriolique & d' argent & que je crois devoir nommer Vitriol de lune ou d' argent. Il ne s' eſt prèſque pas excité de chaleur dans cette opération; j' ai verſé plus d' acide vitriolique qu' il n' en falloit pour ſéparer tout l' argent d' avec l'acide nitreux. La liqueur ayant été étendue dans de l' eau diſtillée pour faciliter la précipitation étoit très-acide; je l' ai décantée deſſus le depôt; j' ai ſéparé du vitriol de lune tout l' excés d' acide, ou plutôt tout l' acide libre, par pluſieurs lotions dans de l' eau diſtillée & par imbi-

tions dans le papier gris, jusqu'à ce que ce Sel ne fit plus aucune impression de rouge sur le papier bleu après avoir parfaitement desséché ce Sel, je l'ai fait boüillir dans mon esprit de vin, il ne s'en est rien dissous, & la flamme de cet esprit de vin ne différoit en rien de celle de l'esprit de vin pur.

Nitre de lune nommé communement cristaux de lune.

J'ai fait dessécher parfaitement des *cristaux de lune* & ayant versé dessus la quantité ordinaire de mon esprit de vin, il m'a paru qu'il s'en dissolvoit: la liqueur mise à boüillir a pris une odeur d'ethér nitreux, & s'est un peu troublée par une espéce de poudre noirâtre; je l'ai filtrée toute boüillante comme dans toutes les autres expériences; à mesure quelle se refroidissoit, il y paroissoit une grande quantité de cristaux figurés en Rombes minces qui se formoient à la surface. Ces Rombes sont produits par quatre triangles un peu inclinés dans le même sens, ensorte qu'ils ne sont pas dans un même plan, leurs sommets réunis font au milieu du Rombe une espéce de pointe pyramidale mais fort peu élevée, & leurs côtés communs représentent deux diagonales qui se coupent leur milieu. Le tout ressemble donc à une Pyramide à quatre faces extrêmément basse & comme applatie: chaque face triangulaire paroit formée de lignes parallélés au côté opposé au sommet. L'esprit de vin aprés son entière évaporation a laissé un gros 12 grains de ce Sel nitreux. Sa flamme étoit plus blanche & plus lumineuse que celle de l'esprit de vin pur & accompagnée d'un peu de fuliginosité. L'esprit de vin dissout donc $\frac{84}{288}$ de son poids de Nitre de lune.

Lune

Lune cornée.

J'ai fait de la *Lune cornée* en verſant de l'acide marin dans une diſſolution d'argent par l'acide nitreux, & je l'ai traitée comme j'avois fait le vitriol de lune par un lavage à l'eau diſtillée, juſqu'à ce qu'elle ne dónnat plus aucune marque d'acidité. L'eſprit de vin n'en a rien diſſous même à l'aide de l'ébullition. La flamme de cet eſprit de vin n'avoit rien de particulier.

Vitriol de mercure.

Le Sel réſultant de l'union de l'acide vitriolique avec le mercure que je nomme *Vitriol de mercure* & qu'il faut bien diſtinguer du *Turbith minéral*, en ce que ce dernier ne contient preſque point, ou même point du tout d'acide vitriolique, ce Vitriol de mercure, dis-je, a été fait par le même procédé dont j'ai parlé pour le Vitriol de lune, c'eſt-à-dire en verſant de l'acide vitriolique dans une diſſolution de mercure faite par l'acide nitreux. Je n'ai lavé que légérement à l'eau diſtillée le dépôt blanc qui ſe forme dans cette opération, par ce qu'on ſçait que par un grand lavage on lui enleve tout ſon acide & qu'on le réduit en une eſpéce de précipité jaune indiſſoluble même dans l'eau & qu'on nomme Turbith minéral, ou plus-tôt parce qu'on décompoſe cette combinaiſon & qu'on la ſépare en deux autres dont l'une eſt le Turbith dont je viens de parler & l'autre reſte diſſoute dans l'eau des lavages & ne contient que fort peu de mercure tenu en diſſolution par une très-grande quantité d'acide : or ce n'étoit ni l'une ni l'autre de ces préparations de mercure dont j'avois intention de reconnoître le dégré de diſſolubilité dans l'eſprit de vin ; ayant donc lavé légérement, comme je l'ai dit, le Vitriol mércuriel qui s'étoit formé

dans

dans mon opération, je l'ai fait sécher parfaitement au bain de sable; il étoit aprés cette déficcation très-blanc & très-beau; je l'ai traité avec l'esprit de vin jusqu'à l'ébullition comme les autres, & je n'ai remarqué aucune dissolution: ayant filtré cette liqueur toute chaude, il ne s'y est rien cristallisé par le refroidissement; il n'est rien resté non plus après son entière évaporation. La flamme de cet esprit de vin étoit comme celle de l'esprit de vin pur; elle n'a laissé aucun résidu sensible après qu'elle a eu cessé d'elle même; le vaisseau dans lequel cet esprit de vin avoit brulé étoit sec; il avoit seulement une légére saveur acerbe métallique & l'ayant frotté avec un papier bleu mouillé, ce papier s'est trouvé un peu rougi. Il suit de là que l'esprit de vin ne dissout point sensiblement le Sel vitriolique mercuriel, ou Vitriol de mercure, même à l'aide d'un peu d'acide libre.

Nitre de Mercure.

Ayant fait dissoudre jusqu'à saturation du Mercure dans de l'acide nitreux trés-pur j'ai obtenu une grande quantité de cristaux de *Sel nitreux mercuriel* que je nomme *Nitre de Mercure*; j'ai lavé ces cristaux à plusieurs eaux distillées & je les ai fait égouter sur du papier gris; après les avoir parfaitement séchés, je les ai traités par l'ébullition avec l'esprit de vin comme les Sels cy dessus; ces cristaux qui étoient blancs avant d'avoir boüilli dans l'esprit de vin sont devenus par cette ébullition d'un jaune citronné un peu gris. L'esprit de vin qui avoit servi à cette opération ayant été évaporé entièrement n'a laissé qu'un léger enduit d'un Sel un peu argentin & si mince que je n'ai pû le recüeillir. La flamme de cet esprit de vin ne differoit point sensiblement de celle de l'esprit de vin pur, cependant elle a donné quelques légéres marques de fuliginosité; il est resté, après qu'elle a eu cessé

d'elle

d' elle même, un enduit Salin argentin comme après l'évaporation ; cet enduit a un peu rougi le papier bleu ; ayant lavé à plusieurs eaux distillées le Nitre mercuriel sur lequel l' esprit de vin avoit boüilli, il m' a paru que l'eau en dissolvoit fort peu & il a pris une couleur de plus en plus jaune, come celà arrive au Turbith minéral je ne tire pour le présent d' autre conséquence de cette expérience, si non que l' esprit de vin ne dissout qu'une quantité prèsque insensible du Nitre de Mercure dans l' état ou je l' ai employé: comme je trouve quelque chose de singulier dans ce fait, je me propose de faire dans la suite d' autres expériences pour l' éclaircir.

Mercure sublimé corrosif.

De tous les composés de Mercure & d' acide marin, c' est celui qu'on nomme *sublimé corrosif* qui est le plus salin, & c' est par cette raison que je l' ai choisi par préférence aux autres pour en éxaminer la dissolubilité dans l' esprit de vin, j' ai donc fait boüillir de mon esprit de vin sur ce Sel, & l' ayant filtré tout chaud j' ai observé qu'il se cristallisoit beaucoup de Sel par le refroidissement, cet esprit de vin à laissé par son entière évaporation deux gros & demi & un scrupule, ou 204 grains de Sublimé corrosif. Sa flamme étoit d' abord comme celle de l' esprit de vin ordinaire, mais bien-tôt elle est devenue plus grande, plus jaune, & plus lumineuse ; elle étoit mêlée de quelques traits de couleur bleue sur tout sur la fin elle étoit très-décrépitante. L' esprit de vin dissout donc $\frac{204}{288}$ de son poids de sublimé corrosif. Il est vray que voyant que l' esprit de vin dissolvoit beaucoup de ce Sel par l' ébullition, je l' ai laissé boüillir plus long tems que les autres Sels.

Vitriol

Vitriol de mars.

Ayant desféché du *Vitriol de mars* au bain de fable fans le liquefier, je l' ai fait boüillir avec mon esprit de vin; il m' a paru qu' il ne fe dissolvoit rien ou qu'infiniment peu de chofe. L' esprit de vin décanté de dessus ce Sel n' a rien laissé cristallifer par le refroidissement, & par fon entière évaporation il n' a laissé qu'un légér enduit brun trop peu considérable pour pouvoir être recüeilli. Cet esprit de vin a brulé comme l' esprit de vin pur & n' a laissé dans la capfule ou il avoit brulé qu'une tache brune. Ayant appliqué un papier bleu moüillé fur cette tache, il a été rougi fensiblement. Il paroit par cette expérience que l' esprit de vin ne dissout point le Vitriol martial.

Nitre de mars.

J' ai fait dissoudre peu à peu de la limaille de fer non roüillée dans de l'acide nitreux très-pur; il m' a été impossible de faturer cet acide au point de ne plus rougir le papier bleu; la dissolution s' est épaissie considerablement; j' y ai ajouté de l' eau & de nouvelle limaille, le tout s' est mis en une espéce de pâte & malgré cela la dissolution étoit encore fort acide; elle étoit de couleur rousse rougeâtre; je l' ai faite évaporer à ficcité; il s' est exhalé pendant cette évaporation beaucoup de vapeurs acides d' une odeur très-penetrante. Le residu fec étoit de couleur brune. Je l' ai traité avec l' esprit de vin; ce dissolvant à pris dessus, à l'aide d'une chaleur moderée, une couleur rouge de briques assés foncée, mais l' ayant porté jufqu' à l' ebullition, il a perdu presque toute fa couleur en déposant un fédiment considérable. Cet esprit de vin filtré & évaporé jufqu'à ficcité n' a laissé que quatre

grain de matière acide d' un jaune de ſafran très-foncé ; ce Sel martial a eu beaucoup de peine à ſe deſſécher entièrement & étoit ſi déliqueſcent qu' il s' eſt humecté étant même encore chaud. La flamme de cet eſprit de vin étoit d' abord comme à l' ordinaire, mais quand il y en a eu environ un tiers de brulé, elle eſt devenue rouge & pétillante & a duré de la ſorte juſqu'à la fin ; il eſt reſté dans la capſule un enduit rouge brun aſſés conſidérable & un peu de liqueur fort acerbe & fort acide. Il faut remarquer ſur cette expérience que l' eſprit de vin diſſoudroit vraiſemblablement une beaucoup plus grande quantité de ce Nitre martial ſans le ſecours d' aucune humidité, ſi l' on pouvoit le deſſécher entièrement ſans ſéparer preſque tout l' acide nitreux d' avec le fer, mais cet acide tient ſi peu à ce métal que je crois que cela n' eſt pas poſſible.

Sel marin martial.

J' ai fait diſſoudre peu à peu de la limaille de fer bien nette dans de bon acide marin ; la diſſolution s' eſt très-bien faite ſans que le fer ſe changeat en ſafran de mars & ſans s' épaiſſir. Il eſt à remarquer au ſujet de cette diſſolution, que les vapeurs qui s' en élevent ont une odeur deſagréable pénetrante & fort différente de celle de l'acide marin pur ; elles ſont auſſi fort inflammables & font une exploſion violente quand on les allume dans une vaiſſeau clos. J' ai fourni une grande quantité de limaille à cette diſſolution, même après qu' il n' y avoit plus d'éffervеſcence, mais malgré cela elle rougiſſoit tojours un peu le papier bleu. Je l' ai faite évaporer, il s' eſt formé deſſus une pellicule ſaline luiſante & un peu chatoyante. L'ayant laiſſée refroidir quand elle a été à ce point, elle s' eſt toute coagulée en criſtaux confus dont je n' ai pû diſtinguer la figure même à la loupe. Ayant continué l'évaporation

poration au bain de ſable juſqu' à ſiccité, la déſiccation a eu beaucoup de peine à ſe faire ; il a fallu une journée entière pour cela ; ſur la fin ce Sel avoit une odeur tout à fait ſemblable à celle du Vitriol de mars lors qu'on le deſſéche. Ce même Sel marin martial avoit une couleur de roüille aſſés claire & aſſés vive lors qu'il n' étoit que médiocrement chauffé, mais cette couleur devenoit beaucoup plus rouge & plus brune, lors qu'il l' étoit d' avantage. L' eſprit de vin a pris par l' ébullition ſur ce Sel une couleur de roüille un peu trouble & un peu changeante par l' oppoſition, ou l' interpoſition de la lumière ; ayant ſoummis cette diſſolution à l' évaporation il a fallu beaucoup de tems pour deſſécher entièrement le réſidu, il peſoit un demi gros ou 36 grains ; il étoit d' une couleur jaune brune, s' humectoit à l' air mais lentement ; il lui a fallu ſept ou huit jours pour ſe réſoudre totalement en liqueur. La flamme de cet eſprit de vin étoit aſſés blanche, & aſſés brillante, à meſure que la déflagration avançoit elle devenoit plus lumineuſe & plus blanche ; elle étoit accompagnée ſur la fin de beaucoup de petites étincelles blanches & brillantes comme des étoiles d' artifice ; il eſt reſté après cette combuſtion un réſidu jaune brun aſſés conſidérable d' une ſaveur martiale ſtyptique. L' eſprit de vin diſſout donc $\frac{36}{288}$ de ſon poids de *Sel marin martial.*

Vitriol de cuivre.

Le *Vitriol de cuivre* deſſéché parfaitement eſt devenu preſque blanc ; l' eſprit de vin que j' ai fait boüillir deſſus n' a pris aucune couleur ; le même eſprit de vin n' a laiſſé aucun réſidu par ſon entière évaporation ; il a brulé comme de l' eſprit de vin pur, & n' a pareillement laiſſé aucun réſidu après ſa déflagration. Ce qui prouve que l'eſprit de vin ne diſſout point le Vitriol de cuivre.

Nitre à base de cuivre.

J'ai fait dissoudre du cuivre rouge très-pur dans de l'acide nitreux aussi très-pur; la dissolution s'est faite d'elle même très-rapidement après qu'elle a été entièrement saturée de cuivre, elle avoit une couleur bleue tirant sur le verd céladon; elle étoit troublée par une chaux de cuivre de même couleur, mais infiniment plus pâle que la liqueur & presque blanche. J'ai fait évaporer cette dissolution au bain de sable, il s'est formé dessus une pellicule de cristaux confus; l'ayant alors laissée refroidir, elle s'est coagulée toute entière en une masse de petits cristaux si confus, qu'il m'à été impossible d'en discerner la figure, même à l'aide d'une bonne loupe; ces cristaux se sont ensuite humectés & resous totalement en liqueur en fort peu de tems. J'ai remis cette liqueur en évaporation, la pellicule s'est reformée de nouveau & par le refroidissement toute la masse s'est encore coagulée; ayant entrepris de la dessécher ensuite entièrement; elle s'est liquefiée à la première impression de la chaleur, mais comme elle restoit toujours en cet état, j'ai augmenté le feu; alors quoiqu'à la reserve de la pellicule de la surface, ce Sel demeurat toujours liquide, il a commencé à en sortir beaucoup de vapeurs d'acide nitreux très-pénétrantes; ces vapeurs m'ont fait connoître que cette liquidité que j'attribuois à de l'eau surabondante au Sel n'étoit qu'une vraie fusion de ce même Sel, & que ce ne séroit qu'en lui enlevant son acide par l'action du feu, en le décomposant en un mot totalement que je pourrois l'amener sur le feu à l'état de solidité séche; l'ayant donc retiré de dessus le feu, il s'est figé sur le champ en une matière très-dure & fort avide de l'humidité de l'air; j'ai pulverisé promptement ce Sel & après l'avoir mis encore chaud dans un matras, j'ai versé par dessus

la

la quantité ordinaire d' esprit de vin. Je l'ai laissé agir à froid pendant deux jours : dans cet espace de tems, il a pris une belle couleur bleue de saphir assés foncée, & il est resté au fond du matras une espécé de chaux de cuivre d' un verd bleu pâle. Par l' ebullition cette couleur n' a point pris plus d' intensité ; j' ai donc filtré la liqueur elle a passé très-claire & du plus beau bleu de saphir ; il est resté sur le filtre beaucoup de chaux de cuivre de couleur de verd de gris fort pâle. Cette dissolution après son entière èvaporation a laissé 48 grains de Nitre à base de cuivre. La flamme de cet esprit de vin étoit d' abord comme à l' ordinaire, mais elle est bien tôt devenue beaucoup plus blanche, plus lumineuse & d'un verd très-beau, cette flamme étoit accompagnée d'une quantité assés considérable de fumée fuligineuse noircissante : il s'est formé au tour de la liqueur enflammée un bourlet de matière verte qui s' est noirci en partie par la chaleur & qui a pris un caractère charbonneux, aussi s' est elle allumée, elle bruloit en rougissant comme un charbon ; il est resté après la flamme cessée d' elle même, une quantité assés considérable de Sel bleu en liqueur. L' esprit de vin a dissous comme on voit dans cette expérience $\frac{48}{288}$ de son poids de *Nitre à base de cuivre*.

Sel marin à base de cuivre.

J' ai pris pour composer le *Sel marin à base de cuivre* du fil de cuivre rouge très-pur, je l' ai mis dans l'acide marin assés fort, distillé par l' acide vitriolique pur à la manière de Glauber ; la surface du cuivre s' est ternie promptement, mais sans qu'il parut aucun autre signe de dissolution ; il a fallu le secours du bain de Sable pour faire agir l'acide sur ce metal, alors les signes ordinaires aux dissolutions des métaux par les acides ont parus, mais

je fus étonné de voir que la liqueur, à mesure que la dissolution se faisoit, au lieu de prendre une couleur verte, comme je m' y attendois, prenoit au contraire une couleur de caffé qui devenoit de plus en plus brune & foncée. Lors que la dissolution a été à peu près au point de saturation elle étoit un peu épaisse elle rougissoit encore sensiblement le papier bleu, quoique d' ailleurs l'acide ne parut plus du tout agir sur le cuivre qui restoit. J' ai versé cette dissolution dans une capsule pour l' évaporer & ayant rincé le matras avec de l' eau, j' ai vû aussi avec surprise que le peu de dissolution brune qui restoit dans le matras est devenue d' un très-beau verd tirant sur le bleu aussi tôt qu' elle a été étendue dans l' eau, & cette couleur s' est communiquée au reste de la dissolution dans laquelle javois mêlé cette rinçure. Par l' évaporation elle s' est réduite presque toute en cristaux de couleur verte & figurés en aiguilles; le peu de liqueur qui baignoit ces cristaux étoit redevenue fauve brun par l' évaporation; enfin lors que tout a été évaporé jusqu'à siccité, le verd des cristaux a disparu & tout étoit absolument brun: j' ai mis ce Sel tout chaud dans mon esprit de vin, ce dissolvant a pris presque aussi tôt un verd très-foncé, & a dissous beaucoup de ce Sel sans le secours d' autre chaleur que celle de l' air, qui à la verité étoit très-grande ce jour là & de 28 à 29 dégrés (c' étoit le 26 Août.) L' esprit de vin chargé de ce Sel a fourni après fort peu d' évaporation beaucoup de cristaux du plus beau verd ils étoient éguillés & comme soyeux; par la déssiccation, ils ont perdu tout leur verd & sont devenus absolument bruns: ils pesoient 48 grains après avoir été bien desséchés. La flamme de l' esprit de vin chargé de ce Sel étoit du plus beau verd; on y appercevoit cependant des éspéces de fulgurations blanches & rouges; il est resté après la com bustion de l' esprit de vin beaucoup de Sel dont une par tie étoit verte & l' autre brune.

Les

Les changemens de couleur qui arrivent à ce Sel ſuivant la quantité d' eau plus ou moins grande à laquelle il eſt uni ont quelque choſe de ſingulier & de remarquable ; lors qu' il eſt ſec, ou qu' il ne contient que très-peu d' eau, il eſt d' un jaune fauve foncé brun ; à meſure qu'on y ajoute de l' eau, il devient ſucceſſivement verd d' olives, beau verd de pré plein & foncé, verd bleuâtre, & enfin lors qu'il eſt étendu dans beaucoup d' eau, il eſt entièrement bleu, mais clair ; il repaſſe enſuite ſucceſſivement par toutes ces mêmes couleurs, juſqu'à redevenir tout brun, à meſure qu'on fait évaporer l' eau qui le tient diſſous. Ces phenomenes m'ont fait ſoupçonner que ce Sel de couleurs ſi différentes lors qu'il eſt plus ou moins ſec pourroit être la matière d' une ſorte d' *encre de ſympathie.* Jen ai fait l' éſſai ; ayant tracé des caractères ſur du papier blanc avec ſa diſſolution étendue dans beaucoup d' eau laquelle eſt comme je l' ai dit d' un bleu pâle ces caractères après qu' ils ſe furent ſechés ſimplement à l'air étoient inviſibles à cauſe du peu d' intenſité de la couleur ; mais les ayant chauffès, j' ai vû auſſi tôt paroitre l' ecriture d'un jaune vif très-beau. Cette couleur qui n'eſt qu'une teinte affoiblie du fauve brun qu' a le Sel en maſſe lors qu'il eſt parfaitement deſſéchè, m' a rappellé que M. Baumé très-habile Chimiſte de cette Ville avoit publiè dès 1757 dans les cours de chymie que nous faiſons enſemble, une encre de ſympathie dont les effets ſont tous ſemblables à celle dont je parle actuellement, & comme la baſe de l' encre de M. Baumé eſt du cuivre de même que dans celle-cy, quoique le procedé qu' il a donné pour la faire ſoit différent, je ne doute nullement que ces deux encres ſympatiques ne ſoient eſſentiellement de même eſpéce & je reconnois avec plaiſir que M. Baumé eſt le prèmier qui ait obſervé cette ſorte d' encre, & qui en ait parlé, ce Chimiſte convenoit en annonçant cette encre qu'elle n'avoit

pas

pas la proprieté de redevenir invifible par la fimple expofition à l' air auffi parfaitement que l' encre fympatique tirée du cobalt & s' eft toujours propofé de lui donner cette qualité, mais des recherches d'une plus grande importance l' en ont empéché jufqu'à préfent; celle dont je viens de parler avoit auffi le même deffaut, mais après les obfervations que j' avois faites fur les changemens de couleur du Sel de cuivre, & fur la caufe prochaine de ces changemens il m'etoit bien facile de donner à cette encre la proprieté defirée; on a vû que la différence des couleurs du Sel marin cuivreux dépend uniquement de la quantité d' eau plus ou moins grande à laquelle il eft uni, fi donc lors qu'il paroit en jaune par la défication parfaite fur le papier, il ne difparoit point enfuite entiérement par l' expofition à l' air, cela ne peut venir que de ce qu' il n'attire pas affés promptement & affés éfficacement l' humidité de l' air, & en effet ce Sel quoique deliquefcent n' eft pas à beaucoup près du nombre de ceux qui poffedent cette qualité au plus haut point; il ne s' agiffoit donc pour donner à l' encre en queftion la proprieté de difparoitre entièrement que de la rendre plus avide de l' humidité de l' air que ne l' eft naturellement le Sel marin cuivreux, & c' eft à quoi je fuis parvenu facilement en mêlant dans fa diffolution un autre Sel exempt de toute couleur, qui ne peut le décompofer & qui eft infiniment plus déliquefcent; il y en a affurement plufieurs qui peuvent être employés pour cela avec fuccés; j' avois fous la main le Sel marin à bafe de craye qui m' avoit fervi dans mes expériences précedentes; jen ai mêlé dans la diffolution de Sel marin cuivreux à peu près autant qu'elle pouvoit contenir de ce dernier Sel; j' y ai ajouté un peu d'excés d' acide marin & de l' eau; enforte que le tout avoit une couleur d' aigue marine affés belle, & ayant fait l' epreuve de cette encre, jai trouvé qu' elle difparoiffoit prefque auffi bien

que

que celle de cobalt je rappelle au reste icy que l' acide marin qui m' a servi pour ma dissolution de cuivre avoit été distillé par l' acide vitriolique libre, parce qu' il n' est pas impossible qu'un peu de ce dernier acide mêlé avec le premier ne contribue aux effets dont j'ai parlé; j'avertis aussi ceux qui voudroient vérifier cette encre que c' est le Sel marin à base de craye au quel j' ai donné la préference sur les autres Sels marins à base calcaire, parce qu' il m' a paru par des expériences faites anterieurement sur les combinaisons de l' acide marin avec différentes terres calcaires, que les Sels qui en résultoient n' étoient pas tous également déliquescens, & que celui-cy l' étoit beaucoup plus que la plus part des autres.

Je n' attache au reste aucune prétention à cette espéce d' encre de sympathie, non seulement, par ce que je n'en suis pas le premier observateur, mais encore par ce que ce n' est là qu' un de ces petits faits curieux qui se présentent comme d' eux mêmes aux Chimistes dans leurs recherches & aux quels on ne doit donner qu'un moment d' attention quand on a pas intention d' en developper la theorie. Je ne me suis peut être que trop arrêté à celui-cy, c' est pourquoi je me hâte de revenir à mon objet principal.

Les expériences dont j' ai rendu compte dans ce memoire, quoique deja nombreuses, ne le sont cependant point ancore assés à beaucoup près pour en tirer des consequences & une theorie générale; elles font entrevoir à la verité que les Sels neutres sont d' autant plus dissolubles dans l' esprit de vin, que leur acide est moins fortement uni avec leur base, & qu' à cet égard, ils suivent par rapport à l' esprit de vin à peu près la même régle que par rapport à l' eau, mais la saturation plus ou moins parfaite de l' acide des Sels n' est certainement point l'unique cause de leur différent dégré de dissolubilité dans

 l' esprit

l' eſprit de vin, car il y en à qui ſe diſſolvent en plus grande quantité dans ce menſtrue que dans l' eau même. Le principe philogiſtique, ou inflammable, influe probablement beaucoup dans les effets de ces diſſolubilités, mais je le repete, nous n' avons point encore aſſés de faits connus ſur ces objets pour en developper la Theorie générale. Je m' abſtiens donc pour la préſent de toute ſpéculation à cet égard, & je me borne à quelques réflexions particulières ſur les expériences dont j' ai rendu compte.

En raſſemblant ſous un même point de vüe tous les Sels vitrioliques que j' ai examinés, il ſe trouve qu' il n' y en a aucun que l' eſprit de vin ait diſſous, ou du moins dont il ait diſſous une quantité ſenſible, & le Sel de Glauber eſt le ſeul qui ait apporté quelque changement à ſa flamme. Si cette indiſſolubilité ſe ſoutient dans les autres Sels vitrioliques qui me reſtent à examiner, elle ſera une nouvelle preuve de la ſuperiorité deja reconnüe de l' acide vitriolique ſur les autres acides à raiſon de ſa plus grande ſimplicité & de la plus grande force avec laquelle il eſt capable d' adhérer à toutes les ſubſtances ſuſceptibles d' union avec les acides, auſſi ais-je deja fait obſerver ailleurs que dans la claſſe des Sels vitrioliques nous n' en connoiſſons encore aucun qui ne ſoit criſtalliſable, ou dont la qualité deliqueſcente annonce une connexion foible de l' acide avec ſa baſe.

Comme aucun de mes Sels vitrioliques ne s' eſt trouvé ſenſiblement diſſoluble dans l' eſprit de vin, il n' eſt point étonnant, qu' ils n' ayent occaſionné aucun changement à la flamme de cet eſprit, mais on pourroit être ſurpris que je n' aye obſervé aucune couleur verte à la flamme de celui que j' avois fait boüillir ſur le vitriol de cuivre, tandis que M. Bourdelin dit dans ſon memoire ſur le Sel ſedatif imprimé dans les memoires de l'Academie des ſciences de Paris pour l'année 1755, qu'ayant fait bruler de

l' eſprit

l' eſprit de vin ſur du vitriol de cuivre, il à obſervé une belle couleur verte dans ſa flamme. Il eſt très-certain cependant que la contradiction qui ſe trouve entre nos deux expériences n' eſt qu' apparente, & qu' elles ſont exactement vraies l' une & l' autre. M. Bourdelin avoit pour but dans le memoire que je viens de citer, non d' examiner le dégré de différente diſſolubilité des Sels dans l' eſprit de vin, mais de reconnoître s' il s' en trouveroit quelqu' autre que le Sel ſedatif qui eut la proprieté de communiquer une couleur verte à ſa flamme, il n' étoit pas neceſſaire en conſéquence que ce ſavant Chimiſte prit comme moi la précaution de priver ſes Sels de leur eau de criſtalliſation avant de les ſoummettre à l' action de l' eſprit de vin, auſſi ne dit il point qu' il eut deſſéché le vitriol de cuivre, ſur le quel il a fait ſon expérience, & l'on ne doit point douter que ce ne ſoit l' eau de criſtalliſation de ce Sel qui l' ait rendu miſcible à l' eſprit de vin en quantité ſuffiſante pour verdir la flamme, d' autant plus qu' il eſt prouvé par pluſieurs des expériences dont j' ai rendu compte qu' il ne faut qu'une quantité de Sel infiniment petite, pour changer conſidérablement la flamme de cette liqueur. Ces différences demontrent bien au reſte, combien il étoit neceſſaire que je priſſe la précaution de priver mes Sels de toute humidité ſurabondante, pour en reconnoître au juſte le dégré de diſſolubilité.

Si nous jettons après cela auſſi un coup d' œil général ſur le Sels nitreux nous verrons, que tous ceux que j' ai ſoummis à l' expérience ſe ſont comportés à l' égard de l' eſprit de vin bien différement des Sels vitrioliques on ſait que l' acide nitreux tient en général infiniment moins que l' acide vitriolique aux différentes ſubſtances qui peuvent former des Sels neutres avec ces acides; il eſt demontré auſſi en chymie que ce même acide renferme la

 prin-

principe inflammable dans sa composition ; or il est très probable que ce sont là les deux causes principales de la dissolubilité des Sels dans l' esprit de vin, aussi resulte-t-il des expériences que j' ai rapportées, que presque tous les Sels nitreux sont dissolubles dans l' esprit de vin, & la plus part même en quantité assés considerable ; il y à cependant deux de ces Sels qui font une sorte d' exception le premier c' est le Nitre de Mercure dont l'esprit de vin n'a pas dissous une quantité sensible, & le second c' est le Nitre de mars dont le menstrue n'a dissous que fort peu, quoique ce dernier Sel soit très déliquescent & paroisse par cette qualité devoir être un des plus dissolubles. Je n'ajoute rien pour le présent à ce que j'ai dit aux articles de ces Sels, ce sont de ces effets dont la cause demande à être recherchée par un plus grand nombre d' expériences : mais il est bon de remarquer encore au sujet de nos Sels nitreux qu' il n' y en a aucun qui n' ait alteré sensiblement la flamme de l' esprit de vin, ce qui indique toujours une grande disposition de leur part à s' unir à ce dissolvant en tout ou en partie. Au reste cette alteration de la flamme de l' esprit de vin par les Sels neutres est encore un objet important, qui mérite beaucoup d'attention & dont il paroit qu' on pourra retirer autant de connoissances nouvelles sur la nature des Sels, que de leur dissolubilité même, mais il demande aussi une nombreuse suite d' expériences & d' observations. Nous entrevoyons seulement par celles qui sont deja faites, que la flamme de l' esprit de vin peut recevoir trois sortes d' alterations de la part des Sels. La premiere c' est de devenir plus jaune, plus rouge, plus grande, & plus décrépitante ; la seconde c' est d' être plus blanche, plus lumineuse, & en même tems plus ou moins fuligineuse, & la troisième, c' est de contracter quelque couleur particuliere, comme par exemple la couler verte que lui don-

nent

nent les Sels à baſe de cuivre. Je ſoupçonne que la premiere de ces qualités a lieu lors que c' eſt le Sel neutre entièr & comme Sel neutre, qui agit dans cette flamme, que la ſeconde eſt produite particulièrement par l' acide des Sels, lequel donne à l' eſprit de vin un caractére plus ou moins approchant de celui de l' ether, & que la troiſième eſt duë principalement à la baſe ou à la ſubſtance qui eſt unie à l' acide des Sels, mais tout cecy a beſoin d' une plus grande ſuite d' expériences pour être éclairci.

Enfin les phenomenes des Sels neutres contenant l'acide marin réunis auſſi ſous un même point de vuë nous font connoître que ces Sels ſe ſont diſſous pour la plus part dans l' eſprit de vin, & ont cauſé de l' alteration à ſa flamme; ainſi à cet égard l' acide marin paroit différer de l' acide vitriolique à peu près comme l' acide nitreux, mais il eſt bien remarquable que le compoſé de mercure, & d' acide marin ſoit infiniment plus diſſoluble dans l'eſprit de vin que les Sels réſultans de l' union de cette ſubſtance métallique avec les autres acides, & que ce même compoſé, (*le ſublimé corroſif*) ſe diſſolve en plus grande quantité dans l' eſprit de vin que dans l' eau même. L' acide de ce Sel, ni même la manière particulière dont il eſt uni au mercure ne paroiſſent pas les ſeules cauſes de cette ſingulière diſſolubilité; je ſupçonne que la nature de cette ſubſtance métallique très abondante en principe inflammable & qui eſt peut être même celle de toutes qui en contient le plus, influë pour beaucoup dans les phenomenes de ſa diſſolubilité, mais c' eſt encore là un objet qui demande des recherches & des expériences ulterieures. Je finis par une dernière remarque ſur la nature de la flamme de l' eſprit de vin traité avec les Sels contenant l' acide marin je fais donc obſerver que de tous ceux de ces Sels que j'ai examinès juſqu' à préſent le Sel

marin

marin martial eſt le ſeul qui ait donné à cette flamme la couleur blanche & un caractére rapproché de celui de la flamme de l' ether; je ne doute point que parmi ceux qui reſtent à examiner, il ne s' en trouve pluſieurs autres qui produiſent le même effet, mais en attendant on peut toujours en inferer que le fer eſt un des métaux qui peuvent communiquer un caractére particulier à l' acide marin, par la quantité abondante de principe inflammable qu' il lui tranſmet.

A Paris ces 8.e Octobre 1765.

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

De novis quibusdam experimentis electricis.

CUm in eximia gallica symmeriani libri versione, quam suis notis auctam Cl. NOLLETIUS ad me perhumaniter miserat (*a*) nova multa, ac ingeniosa experimenta invenirem, illud maxime laude dignum videbatur, quod & in cruralibus per frictionem excitatis, & in vitris electricitatem ex communicatione habentibus oppositae electricitates sejunctae distinctaeque exhibeantur. Sic enim earum electricitatum mutuas actiones mutuasque relationes melius pervestigari posse censebam, sicque viam pandi ad explosionis electricae theoriam luculentius declarandam. Hisce excitatus eo quoque operam meam contuli, & multa collegi, quae etsi manca adhuc sunt, & imperfecta, proponenda tamen duxi, quod hujusmodi videantur, quae acriori ingenio, ac diuturniori, quam mihi licuerit, diligentia amplificari, ac perfici possint.

CAPUT I.

De frictione binarum taeniarum sericearum ejusdem coloris.

1. DUas taenias sericeas albas (*) igne recenter exsiccatas, alteram alteri superextensam, & plano levigato, sive deferenti, ut metallico, sive coërcenti, ut vitreo, superpositas regula ex ebore in aciem exsecta fricabam: inde taeniae electricitatem acquirebant, qua ad planum adhaerescerent; ab eo simul divulsae, se se attrahebant, superiore, quae fricata fuerat, resinosam, eamque majo-

(*a*) Experiences, & observations nouvelles concernant l'electricité par M. *Robert Symmer.*

(*) Gallice *des rubans.*

majorem, ſubjecta vitream electricitatem oſtendente. Si ſeorſim divellerentur a plano, ſupra quod fricatae fuerant, ſeſe repellebant, & utraque reſinoſam electricitatem monſtrabat.

2. Eveniebat vero interdum, ut etiam ſimul a plano revulſae taeniae ſe ſe repellerent; idque quoties, vel inter fricandum ſuperior ab inferiore fuerat revulſa, vel laxiores taeniae erant, ſicque ex frictione inferior taenia adverſus ſubjectum planum atterebatur, ut inde congenerem, & ſuperiori parum diſparem electricitatem acquireret.

3. Enimvero ad eum frictum, quo electricitas inducitur, magnam corporis ſupra corpus excurſionem haud requiri, ſatis intellexi poſtquam expertus ſum eaſdem albas taenias, etiam charta inaurata rigidiore, aut lamina plumbi interceptas, ex ipſius chartae, aut plumbi frictione ſatis ſenſibilem electricitatem adeptas fuiſſe.

4. Dum porro taeniae a plano, ſupra quod fricatae ſunt, revelluntur (1. 2) in locis, ubi ſecedunt, ipſas inter & ſubjectum planum ſcintillae emicant, quae ſcintillae ſimiliter conſpiciuntur, quando taeniae ſimul a plano divulſae, & in unum adhaereſcentes ab invicem ſeparantur, ubi vero ſemel a plano, ſupra quod fricatae ſunt, taeniae revulſae fuerint, aut a ſe invicem, quantumvis iterum deinceps ad planum, aut ad ſe mutuo admoveantur, nulla unquam amplius in earum ſeparatione lux ſe prodit.

5. Similiter quamvis taeniae a plano, ſupra quod fricatae ſunt, ſingillatim ſejunctae, ſe ſe repellant (1), ſi tamen ſemel ab eodem una revulſae fuerint, atque adeo ſe ſe attrahentes factae ſint, quantumvis ad ipſum iterum applicentur, & ſeorſim ſejungantur, ſe ſe attrahere pergunt; & viceverſa, quae taeniae a plano ſeorſim divulſae fuerunt, & propterea ſe ſe repellunt, licet poſtea altera ſuper alteram ad ipſum iterum aptentur, & quocumque modo rurſus dimoveantur, ſe ſe repellere pergunt.

6. Ex his modus patet, quo taeniae ex parte alia ſe ſe attrahentes, ex alia ſe ſe repellentes fieri poſſint, ſi poſtquam ſupra planum leve fricatae ſunt, pars alia earumdem ſimul, alia ſeorſim, & ſingillatim ab eo plano divellatur. Verum de his phoenomenis fuſius deinceps diſſeremus.

7. Porro quamdiu taeniae ſupra planum, ſupra quod fricatae ſunt, relinquuntur, vix ulla electricitatis indicia praebent; ſimul vero revulſae, & adhuc invicem adhaerentes, praepollentis reſinoſae electricitatis (1), ex utraque facie indicia praebent, & inſtar unicae taeniae reſinoſam electricitatem habentis ſe gerunt: ſi ad planum iterum admoveantur, iterum ſigna electrica in ipſis ſopiuntur, quae iiſdem ab eo revulſis denuo ſe produnt, & ita deinceps, donec omnis ipſarum electricitas extincta ſit.

8. Quod ſi modo dictae taeniae non jam levi ſuperficiei, ſupra quam fricatae ſunt admoveantur, ſed imponantur corpori hirſuto, ac deferenti, uti telae ex cannabe, aut goſſipio haud exſiccatae, cito ipſarum electricitates ad aequilibrium perducuntur, ita ut inde dimotae taeniae, quamdiu ſimul junctae perſtant, nulla praebeant electricitatis indicia, ſi dimoveantur, electricitates oſtendant contrarias, & aequales, quae, iiſdem iterum junctis, rurſus deliteſcunt, & ita porro.

9. Imo vero taeniae ſe ſe repellentes, quae levi deferenti ſuperficiei altera ſuper alteram admotae, eique quantumvis adhaereſcentes, ſe ſe repellere pergunt, quoties revelluntur (5), ſi hirſutae deferenti ſuperficiei altera ſuper alteram imponantur, intra aliquot ſecunda temporis minuta jam ſe ſe attrahent, ut iiſdem ab ea ſuperficie quovis modo revulſis apparet; idque ex eo fit, quod electricitas taeniae hirſutae ſuperficiei proximae jam in contrariam abierit, & ex reſinoſa vitrea facta ſit.

10. Hinc eſt, ut ſi binae albae taeniae ſupra hirſutam ſuperficiem dicto modo (1) fricentur contrarias ſemper electricitates acquirant, ita ut quovis modo inde revulſae fuerint, ſuperior ſemper reſinoſam, inferior, quae hirſutae ſuperficiei proxima fuit, vitream electricitatem oſtendat.

11. Quod autem efficit ſubſtratum hirſutum deferens corpus (9), id ipſum praeſtat deferens quodcumque in apicem efformatum. Etenim ſi duae taeniae ex electricitate ſe ſe repellentes (1) parallelo ſitu ſuſpendantur, ut planis faciebus ſe mutuo reſpiciant, tum acuminatum metallum taeniarum alterutri obvertatur, & per ejus longitudinem promoveatur ad unius, duorumve pollicum diſtantiam, mox oppoſita taenia ad hanc, cui apex obvertitur, accurret, eique juncta adhaerebit, & neutra jam amplius taenia ulla electrica ſigna dabit, quamdiu junctae perſtabunt: quodſi divellantur, conſtabit, illius taeniae, ad quam apex converſus eſt, electricitatem mutatam fuiſſe, & ex reſinoſa in vitream evaſiſſe.

12. Eodem autem artificio, quo reſinoſa taeniae unius electricitas in vitream mutatur, poteſt etiam taenia non electrica electricitate imbui: ſi nempe, taenia non electrica hirſutae ſuperficiei impoſita, ſuper ipſam electrica taenia extendatur (9), vel ſi, taenia electrica ad non electricam applicita, ad hanc acuminatum metallum obvertatur, & juxta ipſius longitudinem promoveatur (11). Conſtabit vero ſemper taeniam, quae electricitatem hoc pacto acquiſivit danti contrariam acquiſiviſſe, ita ut ſi illius electricitas vitrea fuit, hujus ſit reſinoſa, & viciſſim: conſtabit inſuper taeniam, quae hoc modo electricitatem largitur, inde vix majorem pati virium electricarum jacturam, quam ſi per id tempus ſuſpenſa ſtetiſſet, nullamque electricitatem communicaſſet.

13. Hinc eſt, ut una eademque taenia electrica pluribus non electricis contraria electricitate imbuendis inſervire poſſit, ſi ſingulae ſucceſſive eidem applicitae expoſito modo (12) tractentur. Unaquaeque vero ipſarum electricitatem acquiret contrariam quidem, ſed aequalem electricitati taeniae excitantis, eo tempore, quo vis excitabatur (8), ut propterea ea ratione electricitas abſque frictu mirum in modum multiplicari poſſit.

14. Taeniam albam minus ſiccam, adeoque minus coërcentem alii item albae recenter ad ignem exſiccatae ſupponebam, eaſque ſupra planum leve, ſive deferens, ſive coërcens impoſitas regula ex ebore fricabam: quovis modo taeniae a ſubjecto plano divellerentur, ſuperior ſemper reſinoſam, inferior vitream electricitatem oſtendebat.

15. Ex quo apparet vim apicum in ſuperioribus experimentis in eo poſitam eſſe, ut taeniam, cui obvertuntur, magis deferentem efficiant, ſeu faciliorem reddant electrici fluidi per eamdem fluxum, quum humiditas ſubjectae taeniae, quae ipſam vapori electrico magis penetrabilem reddit, idipſum efficiat (14), quod ſuppoſiti eidem apices, ſi ſicca eſſet, praeſtare potuiſſent (10).

16. Hactenus expoſita experimenta eodem omnino ſucceſſu tentari poſſunt duabus nigris taeniis optime exſiccatis, ut certo conſtet, ſericum ſive album, ſive nigrum ex frictione, quae ebore fit, reſinoſam electricitatem adipiſci.

17. Si loco eboris, pelle uterer ad fricandas duas taenias, ſive utramque albam, ſive utramque nigram, idem iterum erat experimentorum omnium exitus, ut ſimiliter concludere fas ſit ſericum utrumvis ex pelle reſinoſam electricitatem recipere. Si vitrum ad fricandum adhiberem in eiſdem experimentis, idem eventus. Si demum ſulphur, electricitas taeniae, quae fricabatur vitrea erat, caetera ſimili modo, ac in ſuperioribus experimentis contingebant,

 ſed

ſed inverſo ordine, ut ubi in illis reſinoſa electricitas habebatur, hic haberetur vitrea, & viciſſim.

18. Et haec quidem conſtanter ita ſe habere viſa ſunt, ut nimirum taeniae ſericeae, ſive albae, ſive nigrae ex frictu ope eboris, pellis, vitri, vim reſinoſam acquirerent, ex frictu ope ſulphuris vitream, idque non modo in recenſitis experimentis, ſed in aliis quibuſvis; quando nempe vel alterutrius coloris taenia utroque extremo affixa, & horizontaliter per aërem tenſa dictis corporibus fricabatur, vel iiſdem circumjecta, & utroque extremo prehenſa, altero, alteroque alterne ita trahebatur, ut adverſus ea corpora attereretur, vel demum aliquo ex iis corporibus tranſverſim obvoluta juxta longitudinem per ipſa ita trajiciebatur, ut in eo trajectu vehementem ab iiſdem attritum ſubiret.

19. Cum charta nuda, vel inaurata taenias fricarem minus conſtans fuit inductae electricitatis indoles; quamvis enim plerumque ex his albae taeniae vitream (*a*), nigrae reſinoſam electricitatem reciperent, contigit tamen interdum, ut haec aliter aliterque ſe haberent. Cujus quidem inconſtantiae cauſſas omnes hactenus aſſequi non potui; viſum tantummodo eſt, attritum, quem olim eae taeniae ex aliis corporibus paſſae fuiſſent, ipſas ad inſuetam electricitatem a charta vel nuda, vel inaurata recipiendam aptas effeciſſe.

20. Illud vero etiam conſtans fuit, ut taeniae binae albae, tum binae nigrae charta nuda, aut inaurata interceptae, interea dum ipſa charta ſupra tabulam fricaretur (3), vim electricam ejuſdem generis acquirerent; & quidem reſinoſam, ob quam de charta exemtae ſe ſe repellebant: quo in experimento, cum taeniae nonniſi adverſus chartam, aut inauraturam, qua undique obvolvebantur, af-

fri-

(*a*) Sericum globo vitreo circumductum, & charta inaurata fricatum vitream electricitatem in catenam emiſiſſe Cl. *P. Beccaria* expertus eſt. *lettere* §. 134. 135.

frictum pati potuerint, patet in eo saltem experimento, chartam tum nudam tum inauratam vim etiam resinosam taeniis sive albis, sive nigris impertiri, indeque fit verosimile varium etiam modum, quo frictio peragitur, ad eam inconstantiam (19) aliquid conferre.

CAPUT II.

De frictione binarum taeniarum sericearum oppositis coloribus infectarum: tum de symmeriana cruralium electricitate.

21. EX experimentis in praecedenti capite expositis satis constitit contrarietatem electricitatum serici albi, atque nigri, quas Cl. Viri SYMMERUS (*b*), & NOLLETIUS (*c*) proposuerunt generatim admitti non posse, cum contra ex plerisque corporibus (18), & in quibusdam adjunctis ex omnibus, quae experiri libuit, solo sulphure excepto, (18. 20) sericum album similiter ac nigrum resinosam electricitatem acquirat (*d*). Praestabit igitur ea ipsa experimenta expendere, ex quibus Cl. VIRI in eam opinionem adducti sunt.

22. Symmerianorum experimentorum haec summa est. Cruralia sericea oppositi coloris, alterum scilicet album, nigrum alterum (*e*) prius excalefacta (*f*) in crus vel in brachium (*g*) opportuna tempestate (*h*) immitebat, ibique vel

(*b*) P. 30. 33. 38. 39. 40.
(*c*) In *Symmerum* p. 43.
(*d*) Revera sericum generatim inter corpora resinosam electricitatem possidentia recenseri consueverat. *Nollet Leçons VI.* p. 345.
(*e*) P. 7. 32. 13. 41.
(*f*) P. 7.
(*g*) P. 9. 25.
(*h*) P. 6. 7. 25. 75. 76.

vel relinquebat aliquamdiu (*i*), vel etiam ſuſque deque trahebat (*k*) dein utrumque ſimul e crure, vel brachio detrahebat (*l*). Quamdiu conjuncta erant exigua electricitatis indicia dabant: ſi alterum ab altero educeretur, ac removerentur, utrumque vehementer electricum ſe oſtendebat, & album quidem vitrea, nigrum vero reſinoſa electricitate imbutum erat (*m*).

23. Nullibi porro SYMMERUS meminit exterioris affrictus, quo ad tibialia excitanda uſus fuerit: unde ipſorum electricitas ſoli eorum frictui adverſus crus dum induerentur, aut exuerentur (*n*), vel cruralium inter ſe frictui tribuenda erit.

24. Porro ſi ex frictu cruralium adverſus crus electricitas inducta fuiſſet, illud perpetuum fuiſſet, ut crurale cruri proximum, quod maximam frictionem paſſum eſſet vim reſinoſam reciperet, cujuſcumque demum coloris eſſet (17) contra SYMMERUS monet, ſi crurale album ſit, vitream electricitatem conſtanter recipere, ſeu ſubſit nigro, ſeu eidem ſit ſuperpoſitum, & viciſſim, ſi nigrum, conſtanter recipere reſinoſam (*o*), ex quo conſtat electricitatem cruralium in iis experimentis eorumdem frictui adverſus crus tribuendam non eſſe.

25. Reliquum igitur eſt, ut cruralium electricitas eorumdem inter ſe frictui tribuatur (23): & quidem expertus ſum ſericum album quovis ex recenſitis modis (18) ſerico nigro fricatum, vitream electricitatem acquiſiviſſe, nigrum fricatum albo reſinoſam.

26. Cl. NOLLETIUS crurale album, & nigrum alterum alteri ſuperextenſum, & corpori deferenti impoſita confricabat

(*i*) P. 7.
(*k*) P. 31.
(*l*) P. 8. 9.
(*m*) Vid. loca cit. n. e.
(*n*) Huic electricitatem tribuere videtur *Symmerus* p. 7. 9.
(*o*) P. 6. 141.

cabat, & similiter ea ratione album vitrea, nigrum resinosa electricitate constanter imbuebat (p).

27. Porro cum duas taenias oppositis coloribus infectas alteram alteri superpositam, supra deferens leve planum confricarem, eveniebat interdum, ut alba vitream, nigra resinosam electricitatem reciperet, seu alba subesset, seu nigra; seu pelle, seu charta, seu corpore quovis fricarentur. Eveniebat alias, ut taenia superposita electricitatem reciperet respondentem indoli corporis, quo fricabatur (18. 19); subjecta vel eamdem, vel contrariam, prout taeniae vel simul, vel seorsim a subjecto plano separabantur; non aliter, ac quando duas taenias albas (1) vel duas nigras (16) adhibebam.

28. Quare cum in primo casu indoles electricitatis naturae confricantis corporis non responderet; sed fricati serici colori, constat similiter, ac §. 24. electricitatem non ex frictione, quae charta aut pelle fit, inductam fuisse, sed ab alterius taeniae adversus alteram attritu (confer 3); cum contra in casu altero electricitas inducta respondens indoli corporis fricantis ostendat confricatam taeniam majorem adversus illud, quam adversus subjectam taeniam attritum passam fuisse.

29. Revera primum illud (27) eveniebat constanter, quoties sericum confricandum laxum erat, ac cedens, & cruralium instar retiforme (q), ut contra subjectum sericum facilius excurreret, ac fricaretur; corpus vero confricans ex iis, quae minorem serico electricitatem impertiuntur; cum contra contigeret alterum, si sericum fricandum strictius, crassius, rigidius esset, corpus vero confricans ex

iis

(p) Mem. de l' Acad. an. 1761. p. 248.

(q) *Fait à maille.* Ex his patet, eam structuram, quam prae textura ordinaria telae sericeae his experimentis aptiorem existimaverat. Cl. *Symmerus*, revera plurimum conferre ad contrarietatem electricitatum serici albi, & nigri servandam, quoties alterum super alterum fricatur.

iis, quae majorem ſerico electricitatem tribuunt; (*) ſic enim ſericum confricatum ab ipſius affrictu potius, quam ab affrictu adverſus ſubjectum ſericum, electricum evadebat.

30. Idque adeo verum eſt, ut ſericeum crurale, etiam album, ſupra vitrum charta inaurata fricatum, vim reciperet reſinoſam, ſubjectum vitrum vitream oſtenderet; cum contra tela ſericea firmior, ac denſior (*r*) vitro ſuperextenſa ex frictione per inauratam chartam plerumque, ex frictione ſulphuris perpetuo vitream electricitatem reciperet, tuncque ſubjectum vitrum reſinoſa imbueretur. Ex quibus patet (ut obiter id obſervemus) ſericum album ſupra vitrum fricatum, quod ab ipſo attrahitur, contrariam ſemper eidem electricitatem poſſidere, hinc ſtare leges electricorum motuum a DESAGULIERIO propoſitas (*s*). Eas enim electricitates contrarias eſſe luculenter conſtat, tum quod ex binis taeniis oppoſita electricitate imbutis (18), quae ab eorum altero attrahitur ab altero repellatur, & viceverſa, tum quod caeteras omnes contrarietatis notas exhibeant.

31. Igitur fricatum ſericum interdum electricitatem recipit a corpore fricante, alias a ſerico ſubjecto, pro ut ab eorum alterutro majorem attritum patitur, & pro ut alterum prae altero electricitati in ſerico per affrictum ciendae aptius eſt.

32. Huc etiam facit experimentum aliud, quod nempe ſi binae taeniae, alba altera, altera nigra, vel ſi tres, quarum duae extremae albae, & media nigra, aut duae ex-

tremae

(*) Hinc diuturna frictio, quae ut vitrum (*Nollet Leçons* tom. VI. p. 274.) ſic ſericum aptum reddebat ad majorem electricitatem ex frictu ſuſcipiendam id etiam efficiebat; ut fricatum ſericum potius a fricante corpore, quam a ſuppoſito contrarii coloris ſerico electricitatem reciperet.

(*r*) Gallice *ſatin blanc*.

(*s*) Confer *Cl. Nolletium* in *Symmer.* p. 149. 150., & Mem. de l'Acad. tom. cit. p. 253.

tremae nigrae, & media alba; aliae aliis hoc ordine impositae charta inaurata intercipiantur, ex chartae frictione, albae semper vitream, nigrae resinosam electricitatem acquirant, cum contra, ut diximus (20), binae albae taeniae, aut binae nigrae; ea ratione, resinosa semper imbuantur. Quo quidem in experimento, qnam vis affrictus inauraturae circumpositae adversus taenias, & taeniarum contra se mutuo aequalis sit, inde colligi potest, posita aequali frictione, sericum majorem ab oppositi coloris serico, quam ab inaurata charta electricitatem recipere, adeoque talem exhibere, qualis ab oppositi coloris serico induceretur.

33. Ex his jam facile est intelligere, cur cruralia in crus inducta, etiam nulla externa adhibita frictione electrica fierent (23): nempe dum alterum super alterum induebatur inter se mutuo fricabantur. Cur perinde esset sive albo crurali nigrum, sive album nigro subesset (24): scilicet, sive album sericum nigro, seu nigrum albo fricetur, album constanter vitream, nigrum resinosam electricitatem acquirit (25). Cur etiamsi cruralia cruri inducta manu fricentur, album perpetuo vitream, nigrum resinosam electricitatem recipiat (*t*); nempe cruralia cum cedentia sint ex manu superducta minus atteruntur, quum adversus se invicem confricentur (Confer. 29. 32.) Cur duo cruralia ejusdem coloris vim acquirant exiguam (*u*), cum tamen duae taeniae, etiam ejusdem coloris ex frictione non minus electricae fierent, quam si diversum colorem praeseferrent (1. 2). Nempe SYMMERUS cruralia cruri applicita extrinsecus non fricabat (23) hinc si ejusdem coloris essent, non aliam electricitatem acquirere potuerunt, nisi quam levis eorum affrictus adversus crus dum inducren-

f tur,

(*t*) Ut in experimentis *Cl. Nolletii*, Mem. de l'Acad. tom. cit. p. 245. 252.
(*u*) Symmer. p. 26. 27. 30.

tur, aut exuerentur, excitasset, quae porto exigua est: quod si vero postquam ejusdem coloris cruralia induta fuissent, manu fricarentur, non secus, ac taeniae in superioribus experimentis (1. 2) eximiam electricitatem acquirebant (*v*). Ex his etiam eruitur, cur cruralia simul detrahi debeant (*x*). Si enim alterum prius educatur contra subjectum confricari debet directione illi contraria, qua confricabatur, dum indueretur, ex quo eorum vis infringi proculdubio debet, ut taceam, quod generale est corporibus contrarias electricitates possidentibus; ut nimirum sejuncta multo citius electricitatem disperdant, quam si juncta serventur. Quod si crurale nigrum albo superpositum fit, quod frequentius contigisse videtur in SYMMERI experimentis (*y*), & manu etiam fricetur, cum eadem electricitas, & a manu fricante, & ab albo subjecto in nigrum crurale ex eo frictu conjiciatur, scilicet resinosa (17. 25), hinc fiet, ut nigri cruralis electricitas electricitate albi multo sit vehementior; proindeque ea obtinebunt, quae de binis taeniis, aut simul, aut singillatim a subjecto plano divellendis adnotata fuerunt (1). Ex his demum constat cruralium electricitatem inprimis excitari dum alterum super alterum induitur, aut si simul induantur (*z*), dum alterum super alterum trahitur, extenditurque; dum enim detrahuntur, cum detrahantur simul, vix, ac ne vix quidem inter se mutuo atteri possunt; imo vero, ut diximus, si seorsim detrahantur, quando ingens

fieri

(*v*) Etiam album sericum super album, aut nigrum super nigrum cruri impositum, & manu fricatum electricum fieri, sed minus. *Nollet* in *Sym.* p. 25. Alibi de gradu electricitatis caute esse decernendum, seque taeniis sericeis experimenta instituisse, quae *Symmerianis* contraria videantur p. 43. 44.

(*x*) Il faut bien prendre garde de ne pas les desunir. *Symmer.* p. 8. 9.

(*y*) Uti p. 10. 11., & 30. 31., & 143. 144. j'ai trouvé que le bas noir ne doit point son electrisabilité sur le bas blanc &c. *Nollet in Sym.* p. 42.

(*z*) Il est assez indifferent comment on met les bas *Symmer.* p. 8. Ambo simul in crus induxisse videtur *Nolletius* Mem. de l'Acad. cit. p. 245.

fieri debet alterius super alterum affrictus, eorum vis infringitur. Postquam cruralia detracta sunt inter se mutuo tenacissime adhaerent, certo indicio jam susceptae electricitatis, ut propterea affrictui, quem patiuntur, dum a se mutuo separantur, ea electricitas tribui non possit (&).

CAPUT III.

De constanti taeniarum electricarum ad laeves superficies adhaesione.

34. LAminam plumbi planam ac laevem ex sericeis filis suspendebam, ut *insulata* undique esset. Tum taeniam vitrea electricitate imbutam uno extremo ita prehensam, ut manus ipsam sustentans a plumbo dissita esset, ad planam plumbi superficiem admovebam; segniter attrahebatur. Si interim ad plumbum digitum ferrem, hunc inter & plumbum prosiliebat scintilla, & multo alacrius eo momento taenia ad plumbum ferebatur, eique firmiter adhaerens toto pondere suo facile sustentabatur. Pergebat deinde taenia ad plumbum adhaerere (*a*); at quantumvis juncta relinquerentur, nec plumbum, nec adhaerens taenia ulla amplius electrica signa dabant. Si taenia a plumbo removeretur, nova plumbum inter, & admotum digitum scintilla emicabat, & taenia ut prius electricam se praebebat.

35. Si loco taeniae vitream electricitatem habentis, taenia adhiberetur resinosa electricitate imbuta, eadem omnino observabantur.

f 2 36.

(&) Quae Cl. *Nolletii* suspicio est in *Symmer*. p. 19.

(*a*) Constantem hanc serici electrici ad laeves superficies adhaesionem Cl. *Symmerus* primum observavit p. 68. 69. Confirmavit Cl. *Nollatius*, licet eius explicatio adhaesioni taeniarum ad leves coërcentium superficies tantummodo consentanea sit. Ib. pag. 80. 81.

36. Si taenia electricitate sive vitrea, sive resinosa imbuta ad plumbi laminam, ut prius (34) aptetur, nec scintilla ulla ex plumbo eliciatur, plumbum taeniam aliam cognomine electricitate imbutam repellit, imbutam electricitate opposita attrahit. Si scintilla primum ex plumbo eliciatur, attrahit utramque. Si, postquam scintilla ex plumbo excussa est, prior taenia revellatur, plumbum taeniam aliam cognomine electricitate imbutam attrahit, imbutam opposita repellit.

37. Igitur plumbum, cui electrica taenia adplicita est, ejusdem generis electricitatem emittit, qua cognomine electricitate imbutam taeniam repellit: ubi ea electricitas ab admoto digito recepta fuerit scintillae specie, jam plumbum instar corporis se habet nullam electricitatem habentis, & taeniam utramvis indiscriminatim attrahit. Demum si revellatur taenia, jam plumbum aptum fit electricitati, quam emisit, recipiendae, & propterea ipsi taeniae contrariam electricitatem ostendit; & admoto digito, novam scintillam edit.

38. Similiter taenia, quamdiu ejusdem generis electricitas ex plumbo hausta non sit per admotum digitum, signa electrica edit: postquam scintilla ex plumbo educta est, instar non electricae se habet; si a plumbo dimoveatur iterum suam electricitatem ostendit.

39. Patet itaque taeniam electricam planae faciei plumbi admotam, niti ut contrariam, & aequalem in plumbum electricitatem inducat; postquam admoto ad plumbum digito talem in ipso electricitatem excitavit, plumbum, & taeniam aequaliter, sed contrario modo electrica, firmiter invicem adhaerere, & nullam jam in exteriora corpora electricam vim exerere: demum si dimoveantur sibi mutuo contrarias, & aequales electricitates ostendere.

40. Et haec quidem stellulae & pennicilli observatione confirmantur. Etenim si dum taeniam electricam planae

faciei

faciei plumbi admoves (34. 35.), acuminatum metallum oppositae plumbi faciei obvertas, stellulam ad ejus apicem emicare videbis, si taeniae electricitas vitrea sit, pennicillum, si resinosa: mox utrumvis evanescet, nec ullam amplius electricitatem ad eum apicem observabis, quantumvis taeniam plumbo adhaerentem relinquas. Hanc demum si revellas, & removeas a plumbo, apex iterum electrica signa, sed contraria dabit; nempe pennicillum, si revulsae teniae electricitas vitrea fuerit, stellulam si fuerit resinosa. Si acuminatum metallum non plumbo obversum, sed ipsi adnexum fuerit, eadem omnia, sed contrario, ut consentaneum est, ordine apparebunt (*b*).

41. Igitur ut taenia electrica non electricae applicita, contrariam, & aequalem in hanc electricitatem inducit (12, 13.), sic etiam inducit in plumbum, si eidem applicita sit (39). Totum discrimen in eo positum est, quod in taeniam vapori electrico difficilius penetrabilem contraria electricitas alici non possit, nisi eidem acuminatum metallum obvertatur (15); in plumbum, quod deferens est, & acuminato metallo, & cujuscumque figurae deferente corpore admoto, facile aliciatur. Rursus quemadmodum, postquam taenia electrica oppositam, & aequalem electricitatem in adplicitam taeniam non electricam induxit, utraque atmosphaera caret (8), sic etiam postquam taenia electrica aequalem, & contrariam in plumbum electricitatem induxit, nec jam ipsa, nec plumbum ulla oppositarum electricitatum signa praebent, quamdiu juncta relinquuntur, eas ostensura, ubi primum a se invicem fuerint dimota (39).

42. Ex quibus jam intelligitur, cur si duae taeniae opposito modo, & aequaliter electricae (8) ad planam plumbi faciem successive admoveantur, ex cujusque admotione

(*b*) Confer de his signis electricis Cl. *Beccaria elettricis artific.* §. 200. & seq.

tione plumbum inter, & digitum ſcintilla exiſtat, quae iterum exiſtat ex cujuſque dimotione, ſi ſucceſſive dimoveantur: contra ſi ſimul vel admoveantur, vel dimoveantur; ſcintilla nulla ſit. Cur ſi taeniae electricae ad plumbum haerenti, taeniam oppoſito modo, & aequaliter electricam (8) admoveas; illa huic adhaereat, a plumbo ſecedens (c) & interim plumbum inter, & digitum ſcintilla exiliat: nimirum dum taeniae oppoſitas, & aequales electricitates habentes in ſe invicem agunt, agere deſinunt in ambientia corpora (§. cit.), hinc plumbum ab actione teniae ipſi primum applicitae jam liberum, aptum ſit, ut electricitatem per hanc inductam amittat, ac ſcintillam edat. Demum intelligitur ex his, cur duae, aut plures teniae eamdem electricitatem habentes, atque adeo ſeſe repellentes ſucceſſive laminae plumbeae applicitae, ſucceſſive hanc inter & admotum digitum totidem ſcintillas excitent, & interim aliae ſuper alias ad plumbum adhaereant, ſi ſingillatim dimoveantur, totidem ſcintillas iterum excitaturae.

43. Quoniam vero electricitas in plumbum inducitur oppoſita, & aequalis electricitati adplicitae teniae (39), patet in eo ſaltem experimento deferentia corpora tantum vaporis electrici recipere, aut emittere poſſe, quantum continent coërcentia; propterea minus tutum ratiocinium eſſe, quo ex coërcentium onere concluditur, longe majorem in coërcentibus, quam in deferentibus corporibus ipſius copiam contineri (d).

44. Imo experimentum habeo, ex quo directe confici videtur aequalem in utriuſque claſſis corporibus vaporis electrici quantitatem contineri. Nempe glaciem intra vas metallicum ex ſericis filis ſuſpenſum aeſtivo tempore immiſi, tum leviſſima deferentia corpora circa vas conſtitui, quae

a qua-

(c) Id. etiam a Cl. *Symmero* notatum p. 69.
(d) *Franklin* Tom. I. pag. 186. 187. & 196. & 202. verſ. gallicae.

a quavis, vel minima in vase orta electricitate commoveri possent. Glacies tota in aquam liquata est, quin ulla in illis corpusculis commotio observata sit. Jam vero aqua, ut notum est, succussionem defert, & pro armatura interna phialae succutientis inservit, glaciei frustum ipsam deferre similiter non potest (*e*), adeoque haec coërcentibus vaporem electricum, illa deferentibus est annumeranda (*f*); quapropter si coërcentia corpora majorem quam deferentia electrici ignis copiam continerent, glacies, quae liquescendo ex coërcente deferens fit, excessivum ignem emittere deberet in vas metallicum, quo includitur, tantamque ejus copiam dumtaxat retinere, quantam deferentis corporis, in quod liquescendo abit, natura postularet. Quum igitur nil simile observetur, maxime probabile fit, parem in utroque corpore, glacie scilicet, & aqua, parem adeo in coërcentibus, ac deferentibus corporibus ignis electrici quantitatem inesse (*g*).

45. Si taeniam electricam non planae plumbi *insulati* faciei (34), sed ejus marginibus in aciem sectis, angulisve admoverem, attrahebatur primum, sed mox repellebatur. Tunc, admoto ad plumbum digito, scintillam excutiebam, & rursus taeniae attractio habebatur, mox, remoto digito, in repulsionem abitura; sicque alterne admoto, remotoque digito, alterne attrahebatur, ac repellebatur taenia, donec omnis ipsius electricitas extincta esset.

46. Inde liquet, in hoc experimento ex taenia in plumbum ejusdem generis electricitatem diffundi, quae dum diffunditur attractionem efficiat, mox vero diffusa repulsionem pariat: tunc si, admoto digito, plumbi electricitas extinguatur, iterum residuam taeniae electricitatem in plum-

(*e*) Ib. p. 190. 191.
(*f*) Uti concludit idem *Franklinus* p. 40. in adnotatione.
(*g*) Similiter ceram fusam, & resinam deferentia esse ex *Wilsono* tradit *Franklinus* (loc. ult. cit.) & tamen resinas fusas sola frigefactione electricas non fieri, sed affrictu incaute admisso accuratissimis experimentis Cl. *Beccaria* demonstravit, l. c. §. 468. & seq.

plumbum diffundi, quae dum fluit, novam efficiat attractionem, dein ubi, ſublato digito, rurſus in plumbo accumulata fuerit, denuo repulſionem producat, ſicque alterne, donec omnis taeniae electricitas fuerit exhauſta.

47. Si iſtud experimentum (45) cum ſuperiore (34) conferatur, patet in illo taeniam electricam oppoſitam, & aequalem electricitatem in plumbum inducere (41); in hoc ejuſdem generis (46); hinc in priori caſu conſtantem taeniae, & plumbi attractionem haberi, in altero attractionem mox in repulſionem abire. Ejus vero diſcriminis rationem in eo totam poſitam eſſe conſtat, quod taenia illic planae plumbi faciei, hic ejus angulis admoveatur: ſcilicet dum planae faciei plumbi admovetur taenia, cum aegre ejus electricitas, ob naturam coërcentem, ipſam deſerere poſſit, & in plumbum ſe diffundere, reliquum eſt ut contrariam, & aequalem electricitatem in hoc ex admoto digito aliciat, cum qua poſſit aequilibrari (41); contra cum plumbi angulis admovetur taenia, horum vi ejus electricitas facilius exſugitur, idemque contingit, ac ſi taenia magis deferens eſſet (15); hinc plumbum ejuſdem generis electricitatem acquirit, eaedemque taeniam inter, & plumbum motuum leges obtinent, quae in deferentium corporum motibus obſervantur (g*).

48. Hæc

(g*) Similiter Cl. *Aepinus* tubum ex frictione electricum, in quadam diſtantia, ut electricitas communicari poſſet, vitream electricitatem, qualem poſſidebat, de more in aeneam laminam objectam emiſiſſe obſervavit. Cum eorum diſtantia tanta evaſiſſet, ut per interjectum reſiſtentem aërem electricitas diffundi non poſſet, ac propagari, tubum contrariam, ſeu reſinoſam electricitatem in eam laminam ex corporibus ipſi vicinis alicuiſſe (Vid. Nov. Com Ac. *Petrop.* Tom. VII.). Et his porro ſimilia jam propoſuerat Cl. *Cantonus* (Vid. Auct. exper. adjecta edit. pariſ. oper. *Frankl.* II. a pag. 289. ad 293.) Propterea electricitas, ſive interpoſitione coërcentium intercepta, ut in experimentis *Aepini*, & *Cantoni*, ſive eorum poris implicita, ut in noſtris, adeout in circumpoſita, aut applicita deferentia propagari non poſſit, contrariam electricitatem in ipſa ex vicinis aliis deferentibus accerſit, ac congerit.

48. Hac adnotata diſtinctione (47) facile eſt reſpondere quaeſtioni, quam CL. NOLLETIUS proponit: cur nempe folia metallica a tubo vitreo, reſiniſve electricis, plerumque alterne attrahantur, & repellantur; alias tamen attrahantur dumtaxat, & pertinaciſſime ad ipſorum ſuperficiem adhaereant (*h*), nempe quoties electricitas a corpore electrico aegre extricatur (*i*), quae folia acutos margines, anguloſve ad id corpus convertunt ea omnino ſunt in adjunctis §. 45., propterea alterne attrahi, ac repelli debent; quae vero plana ſuperficie ad ipſum converſa ſunt, vel angulum ad oppoſitas partes obvertunt, quae res vicem ſuppleat digiti tangentis (*), vel manu ad electricum corpus aptantur, in caſum incurrunt § 34, proindeque iiſdem legibus obnoxia ſunt, & conſtanter adhaereſcunt.

49. Cum taenia electrica taeniae non electricae contrariam electricitatem conciliabat, inde non multum debilitabatur, ita ut aliis, & aliis taeniis oppoſitam electricitatem ſucceſſive impertiri poſſet (12. 13.). Similiter taenia electrica a plumbo dimota, cui contrariam, & aequalem electricitatem conciliavit (34) propriam electricitatem fere integram ſervaſſe deprehenditur. Hinc eſt, ut eadem taenia electrica aliis, aliiſque plumbeis laminis contrariam, & aequalem electricitatem ſucceſſive etiam tribuere poſſit, vel, quod idem eſt, ſi electricitas in plumbum inducta, admoto digito, ſcintillae ſpecie educatur, rurſus nova, & ejuſdem naturae ab adplicita taenia in id induci queat, ſicque repetito, donec taenia electricitatem aliquam ſervaverit. Igitur in quovis taeniae electricae ad

g pla-

(*h*) In *Symmerum* p. 56. & Mem. de l' Acad. pag. 254.
(*i*) Quando nam aegre extricetur infra conſtabit
(*) Monuerat jam Cl. *Nolletius*, quod ſi folia metallica aut alia levia corpuſcula in tubum *mediocriter* electricum demittantur, *Vous obſerverez très-ſouvent, qu' une partie de ces corps parois comme collèe au corps éléctrique, pendant que l' autre paroit ſoulevée, & comme entrainée.* Eſſai ſur l'electricité pag. 76.

planam plumbi faciem acceſſu digitus ex plumbo ſcintillam eliciet, in quovis ejuſdem receſſu ſcintillam ſimiliter educet, ſed priori oppoſitam; adeout ſi illa a reſinoſa plumbi electricitate repetenda erat, haec vitreae ipſius electricitati tribuenda ſit: ſcintillae propterea totidem ejuſdem generis ex plumbo elici poterunt, quot vicibus taenia ad plumbum admovetur, ſcintillae iterum totidem ejuſdem generis, ſed priori oppoſiti habebuntur, quot vicibus taenia ab eodem plumbo removetur.

50. Eae quidem ſcintillae paullatim decreſcunt, pro ut taenia paullatim electricitatem ſuam exuit; quandoquidem vero id lente fit, hinc eſt, ut alterna taeniae admotione, & remotione plures hoc pacto ſcintillae haberi poſſint ſatis vehementes, ſi celeriter taenia ad plumbum admoveatur, removeaturque. Et quidem cum externam phialae armaturam manu prehendiſſem, ejuſque unco in qualibet taeniae vitream electricitatem habentis ad planam plumbi faciem admotione, ſcintillam ex plumbo elicuiſſem, dum ſcintillas ab ejus remotione ortas extraneo deferente corpore excutiebam, factum eſt ut quadraginta circiter ſatis validas, parumque decreſcentes ſcintillas obtinerem, quibus phiala onerabatur, & ſuccutiebat, interiore ejus facie vitream, exteriore reſinoſam electricitatem habente. Si eodem modo ſcintillas intra phialam accumularem, quas in quavis taeniae remotione plumbum praebebat, & viciſſim, quas edebat in quavis ejus admotione, extraneo deferente corpore elicerem, phiala etiam onerabatur, & ſuccutiebat; ſed ejus interna facies reſinoſam, externa vitream electricitatem habebat: ſi utraſque ſcintillas, tum quas in taeniae acceſſu, tum quas in ipſius receſſu plumbum praebet, in phialam ſimiliter congererem, nullam inde phiala electricitatem acquirebat, oppoſitis ſcilicet electricitatibus ſeſe invicem deſtruentibus. Demum ſi ſingula haec experimenta taenia reſinoſam electricitatem habente

insti-

inſtituerem, eadem omnia, ſed inverſo, ut quiſque intelligit, modo eveniebant. Ex quibus illud confirmatur, quod aliis argumentis ſuperius oſtendimus (39. 40.), ſcintillas plumbum inter, & digitum conſpicuas in taeniae admotione, tum in ejuſdem remotione a contraria electricitate ipſius plumbi ortas eſſe.

51. Cl SYMMERUS cruralium electricitatem acuminato ferro hauſtam (45. 47.) in phialam adigebat, ſicque ſucuſſionem habebat, quae porro tanta erat, quanta electricitas cruralium, qua phiala fuerat imbuta (*k*) nos ſcintillas totidem habemus, quarum ſingulae aequales ſunt actuali cruralis electricitati, quot vicibus ad plumbum admovetur, totidem iterum, ſed contrariae naturae, quot vicibus ab eodem removetur, ſicque modum invenimus facilem electricitatem abſque affrictu multiplicandi.

52. Ex hactenus dictis intelligitur ratio phaenomeni ſuperius (7) propoſiti; cur nempe taeniae, quamdiu plano, ſuper quod fricatae ſunt, applicitae perſtant nulla electrica ſigna edant, quae ſtatim praebeant, ſi ab eodem dimoveantur. Scilicet reſinoſa electricitas in taeniis praevalens ab aequali quantitate vitreae electricitatis in ſubjecto plano aequilibratur, uti conſtat, ſi prius *inſuletur* planum, quam taeniae removeantur: hinc nullam in exteriora corpora actionem exercet, donec, dimoto plano, aequilibrium non fuerit ſublatum (41).

(*k*) P. 40. 41.

CAPUT IV.

De phaenomenis tubi aëre vacui, aut deferentibus corporibus pleni. De analogia cruralium oppoſitas electricitates habentium cum onerato vitro. De tenacitate electricitatis in coërcentibus.

53. SI duo vitra plana, nuda, optime exſiccata, alterum alteri ſuperpoſitum ſupra corpus deferens laeve ex. gr. ſupra chartae inauratae folium cum ſolo communicans ſimiliter ac taeniae (§. 1.) fricentur, inde electrica fiunt, & tum ad ſe mutuo, tum ad ſubjectam chartam adhaereſcunt: ſi lamina plumbea haud valde craſſa loco chartae inauratae adhibeatur, ipſa etiam vitris adhaerens ab eorum vi electrica toto pondere ſuo ſuſtentabitur.

54. Quamdiu charta vitris adhaerens perſtat, vix ullum praebent electricitatis ſignum: ſi removeatur, & vitra juncta ſerventur, utraque facie vitream electricitatem oſtendunt; taeniam enim vitrea electricitate imbutam utraque facie repellunt, imbutam reſinoſa attrahunt utraque. Si charta vitris iterum aptetur, iterum electrica ſigna ceſſant, & ita deinceps, prout charta vitris adplicatur, aut ab eis removetur, ipſorum electricitas aut ſilet veluti ſopita, aut ad exteriora ſe prodit, donec penitus extincta ſit.

55. Si charta, aut plumbum vitris ſubjectum ſericeam taeniam adnexam haberet, per quam a vitris divelli poſſet, quin tangeretur, atque adeo receptam electricitatem amitteret, ipſum inter, & vitra leve corpus ex ſerico filo pendulum oſcillabat, aliaque omnia habebantur, quae contrariam vitris, atque adeo reſinoſam illius electricitatem oſtenderent.

56. Vi-

56. Vitra vero ipſa contrariam electricitatem praeſeferebant, adeo ut inter ipſa leve corpus ex ſerico filo pendulum oſcillaret ſuperiore vitream, eamque majorem, inferiore reſinoſam electricitatem habente.

57. Conſideranti facile patebit hoc experimentum idem omnino eſſe cum illo, in quo duae taeniae ejuſdem coloris altera ſuper alteram ſupra planum deferens fricatae ſimul ab eodem divellebantur (1): ut enim illic reſinoſa electricitas in ſuperiori taenia, vitrea cum ipſa aequilibrata partim in taenia ſubjecta, partim in ſubſtrato deferente corpore poſita erat (7. 52.), ita hic viciſſim vitrea in ſuperiori vitro, reſinoſa cum illa aequilibrata partim in vitro inferiori partim in ſubjecta armatura reſidet, unde vitrorum electricitas non prius ad exteriora ſe prodit, quam detracta armatura aequilibrium fuerit ſublatum.

Hiſce itaque vitris eadem experimenta exhiberi poſſunt, quae taeniis electricis inſtituta praecedenti capite expoſita ſunt.

58. Quod ſi, detracta priori laevi armatura (53) fricata vitra per breve tempus hirſuto deferenti corpori imponantur, aut ſi ſupra id corpus fricentur, ab eo dimota vix ullam in ambientia corpora electricam vim exercent: cohaerent tamen inter ſe, & ab invicem dimota acquiſitas oppoſitas, & quidem aequales electricitates oſtendunt, quae iterum ſilent vitris ad contactum reſtitutis, & ita deinceps donec omnis ipſorum electricitas extincta ſit. Et haec quidem iis iterum ſunt ſimilia, quae de taeniis in ſimilibus adjunctis expoſita ſunt (8. 10.)

59. Jam vero patet experimentum noſtrum (53) idem omnino eſſe cum hauksbejano (*), in quo globus, aut tubus vitreus aere vacua, aut deferentibus corporibus re-

ferta

(*) Experim. phyſ. mech. tom. I. p. 277., & ſeq. vid. etiam ſimilia *Du Fay* experimenta a Cl. *Demareſt* huc allata p. 299. & ſeq.

ferta confricantur, quando, ut notum eſt, nulla, aut perexigua habentur electricitatis ſigna, quae tamen abſque nova frictione ſe produnt, ſi aut aer admittatur (*l*), aut deferentia corpora educantur. Quare hic etiam dicendum erit electricitatem ita diſpoſitam eſſe, ut vitrea quidem electricitas ad exteriorem vitri ſuperficiem, reſinoſa autem priori aequalis partim in interna vitri facie, partim in armatura adnexa reſideat, aut in vacuo armaturae vices gerente (57.); hinc quamdiu oppoſitae illae electricitates aequales ſunt, & aequilibratae, exteriora ſigna earumdem nulla haberi; ſublata vero armatura, ſicque reſinoſa electricitate diminuta, jam praepollentem vitream electricitatem ſe oſtendere (*m*).

60. Illud vero etiam ex noſtris experimentis deducitur, ut experimentum hauksbejanum ad votum ſuccedat, corpora deferentia, quibus tubus repletur talia eſſe debere, ut internae illius ſuperficiei aptari poſſint, & uniformem armaturam eidem praeſtare; ſecus enim ſi ſcabra, anguloſa, hirſuta, jam tota, aut fere tota reſinoſa electricitas in internam vitri faciem inducetur, unde licet ea corpora poſt vitri frictionem detrahantur, oppoſitae electricitates in aequilibrio eſſe pergent, nullamque adeo, aut perexiguam in ambientia corpora vim exercebunt (58).

61. Si porro vitra deſcripto modo electrica facta (53.58.), utrimque armentur ex oppoſitarum armaturarum contactu ſuccuſſio nulla habebitur; imo & taeniae (7), & vitra, quamvis corpore deferente levi, ut charta inaurata ad aliquot minuta temporis undique obvoluta ſerventur cohaere-

re

(*l*) *Otto de Guerike* apud *Cl. Dalibar.* in hiſtor. elect. Franklin. epiſt. praefixa p. XVI.

(*m*) Apparet igitur quam recte Cl. Nolletius comparaverit latentem electricitatem cruralium ſibi mutuo applicitorum cum latente electricitate tubi deferentibus corporibus pleni, quoniam illa cruralium ſeparatione, haec deferentium corporum detractione manifeſta ſit. In *Symmer.* p. 51.

re pergent, & detecta, ac sejuncta nondum oppositas electricitates amisisse observantur, quum consuetum onus ex oppositarum armaturarum communicatione temporis momento fuissent amissura.

62. Experimentum instituebam a FRANKLINO propositum, nempe bina vitra plana optime exsiccata, alterum alteri superpositum, ut instar unius essent, ad inferiorem faciem deferenti lamina tegebam; ita tamen ut armatura haec cum solo neutiquam communicaret, sed perstaret *insulata*, quamdiu opposita superior junctorum vitrorum facies fricaretur. Dein superiorem hanc faciem alterne fricabam, alterne ad subjectam armaturam admoto digito scintillam ciebam: inde vitra, ut prius (53), tum inter se, tum ad subjectam armaturam adhaerescebant, & quemadmodum FRANKLINUS docet (*n*), onerabantur; ita ut, imposita superiori faciei, quae fricata fuerat, armatura, ex hujus, & inferioris armaturae simultaneo contactu succussio haberetur.

63. Verum quod singulare videri potest, postquam vitra, facta oppositarum armaturarum communicatione, succussissent, adhuc tamen cohaerebant, & quamvis juncta electricas vires in exteriora corpora non exercerent, ab invicem tamen dimota oppositas electricitates ostendebant, taliaque, uno verbo, erant, qualia statim post frictum fuerant in superiori experimento (58.). Duplicem adeo in hoc experimento electricitatem adquirebant, alteram qua succuterent, & quae succutiendo extingueretur, alteram quam diutius servarent. Illam franklinianam, hanc symmerianam brevitatis caussa deinceps appellabimus.

64. Porro si, vitris illis (62), quibus oppositae electricitates inhaerent ab invicem dimotis, eorum armaturae tangantur scintilla ex utraque habebitur, & jam succutiendo inepta fient. Iis enim ad contactum restitutis, facta licet

oppo-

(*n*) Tom. I. p. 217. 218.

oppositarum armaturarum communicatione nulla obtinebitur. Parum tamen ex eo armaturarum contactu symmeriana eorum electricitas infirmabitur; adhuc enim se mutuo attrahere pergent, & leve corpus ex serico filo inter ipsa pendulum in oscillationes adigere, eodem prorsus modo, quo in superiori experimento (63.) evenire diximus.

65. Igitur electricitas, quae succutit, similis est plumbi electricitati, quae solo contactu disperditur, quum primum taenia oppositam electricitatem habens ab ipso dimovetur (37.), cum contra symmeriana vitrorum, aut taeniarum electricitas hujusmodi sit, ut semota vitra, aut taeniae oppositas electricitates habentia jam quidem atmosphaeras electricas ostendant, quibus antea caruerant, sed easdem nonnisi lente, ac temporis progressu ex deferentium contactu amittant (38. 63. 64.)

66. Utraque igitur electricitas, sublata oppositae electricitatis propinquitate, nititur quidem, ut prodeat e corporibus, quibus insidet, sed electricitas, quae succutit, uti ea, quae plumbo inest, in objectum deferens corpus statim diffunditur, symmeriana nonnisi lente.

67. Iterum si symmeriana electricitas satis promte prodire posset, facta oppositarum facierum communicatione, succuteret, similiter ac frankliniana, & temporis momento extingueretur: quum vero contrarium contingat (61.63.), confirmatur eandem a corporibus, quibus insidet, irretitam difficilius, tardiusque se se expedire.

68. Revera si vitra, aut teniae symmeriana electricitate imbutae hirsuto deferente corpore undique obvolvantur multo citius eam electricitatem amittunt, quam cum laevi deferente quaquaversum tegerentur (61). Cujus quidem discriminis ratio, ut alibi innuimus, (15) in eo tota consistit, quod pili hirsutae superficiei faciliorem reddant electrici fluidi fluxum per coërcentia, quibus obvertuntur.

69. Qui vero consideret, quam difficile coërcentia electricitatem suscipiant, susceptamve dimittant, qui noverit, quam tarde aër electricitatem hauriat, haustamve disperdat (*o*), is facile intelliget symmerianam electricitatem aëreae similem esse, porisque coërentium altius intricatam, franklinianam deferentium electricitati assimilari, & vel deferentibus insidere, vel nonnisi superficie tenus in coërentibus positam, ac liberam esse.

70. Ex his constat tenacitatem electricitatis serico haud esse propriam, sed coërentibus quibusvis corporibus communem (*p*): constat deinde oppositas succutientes electricitates dimidiam hinc inde vitri crassitiem neutiquam occupare, multo minus per vitrum ex una in alteram superficiem trasmitti: constat demum tenacitatem electricitatis ex sola difficultate, qua per poros coërcentium electricum fluidum movetur, deducendam esse.

71. Facile autem est intelligere, cur vitrum, cujus una superficies fricatur, dum oppositæ faciei armatura cum solo constanter communicat, succutere nunquam possit, nec sericum, nec corpus aliud quodcumque similiter confricatum; nam ut FRANKLINUS advertit (*q*) contrariae electricitates, quae ad oppositas vitri superficies liberae adhuc sunt, ex simultanea communicatione cum corporibus deferentibus hinc per manum fricantem, inde per armaturam, qua proportione congeruntur, dissipari debent, nec unquam propterea vitrum succutiendo aptum fiet. At contra cum earum electricitatum pars, quae altius in vitri poros penetravit aegre inde iterum emergat, & sola oppositarum

 facie-

(*o*) Vid. *Cl. Cantonum* l. c. p. 294., & cl. *Beccaria lettera* VII., ubi de hac aeris electricitate multa nova, & pulcherrima theoremata per experimenta demonstrantur.

(*p*) Cum talci laminam non secus ac vitra symmeriana electricitate imbuissem, ipsam parieti adhaesisse observavi, & ultra horam in ea adhaesione perseverasse.

(*q*) Loco ult. cit.

facierum communicatione cum deferentibus promte diſperdi nequeat (61) ; hinc novam, & novam continuata frictione adigi poſſe liquet, quae memoratis hactenus ſignis ſe prodat.

72. Inde eſt ut ſericum, etiam deferente lamina interceptum, ex ejus frictione ſymmerianam electricitatem acquirat (3. 20. 32.) in eo *tourmaline* lapidi quodammodo ſimile, quem ex medii deferentis, in quod immergitur, calore electricum fieri obſervarunt (*r*).

73. Ex hactenus dictis erui poſſe videtur I. electricitate alterutra, vitrea ſcilicet, aut reſinoſa in unam vitrorum, aut aliorum coërcentium faciem irruente, contrariam electricitatem ad oppoſitam faciem, ſi via detur, aequa quantitate accurrere. II. Eas electricitates in ſe invicem tendere, hinc coërcentium laminas, quibus incumbunt junctas ſervare. III. Dum ad ſe mutuo tendunt, neutiquam niti ut ad exteriora diffundantur, hinc ex neutra parte atmoſphaeram efformare. IV. Interea tarde ac difficulter in interjectae coërcentis laminae craſſitiem penetrare. V. Si via facilior ac commodior detur, per quam miſceri poſſint, facta nimirum per deferentia corpora oppoſitarum facierum communicatione, electricitates quae ipſis liberae adhuc inſiſtunt, eam viam legere, & ſibi mutuo occurrentes ſe invicem deſtruere. VI. Eas vero, quae altius in poros coërcentis laminae penetrarunt, niti quidem ut eandem viam teneant, ſed cum aegrius inde exſolvi poſſint, multo tardius id fieri, niſi, acuminatis deferentibus corporibus utrimque admotis, earum exitus adjuvetur (68). VII. Cum eae oppoſitae electricitates ad ſe invicem tendant, hinc fieri, ut ſi via alteri tantum detur, admoto deferente, dum oppoſita undique coërcetur, ne illa quidam prodeat hujus actio-

(*r*) Hiſtoire de l'Acad. de Berlin tom. XII. *p.* 105., & ſeq.

actione retenta (*f*). VIII. Quotiescumque laminae, quibus oppositae electricitates inhaerent, sejunguntur, jam utrasque atmosphaeras electricas acquirere. IX. Et tunc quidem electricitates, quae liberae adhuc ad illarum superficiem sunt ex deferentium contactu momento dissipari (64). X. Eas vero, quae altius in ipsarum poros penetrarunt, multo tardius, nisi, acuminato deferente corpore objecto, ad exitum adjuventur (cap. III.)

C A P U T V.

De armaturarum officio in onere vitrorum, aliorumque coërcentium.

74. NOtum est FRANKLINI mirabile experimentum, in quo, vapore electrico per globi rotationem ab una ad alteram vitri armaturam deducto, vitrum onerat absque ullius extraneae electricitatis praesidio (*t*), tum aliud, in quo vitrum onustum, atque *insulatum* ope arcus deferentis item *insulati* deonerat, quin post deonerationem ullum in arcu deferente, aut in corporibus cum ipso communicantibus electricitatis vestigium supersit (*u*). Quibus quidem in experimentis, cum oneretur vitrum, nulla extranea adscita electricitate, deoneretur iterum, quin quidpiam susceptae electricitatis dimittat, inde VIR illustris concludit maximam electrici vaporis copiam in vitro delitescere (*v*), quae ex una in alteram ipsius superficiem deducta vitrum oneret, aequabiliter iterum distributa nativam ipsius habitudinem restituat.

 75.

(*f*) Ne acutissimo quidem obverso stilo cruralia electricitate exui potuerunt, quandiu juncta perstabant. *Symmer*. pag. 36. 37.
(*t*) Tom. I. p. 101. 102.
(*u*) Ib. p. 68. 69., & 115. 116.
(*v*) Ib. p. 9. 186. 196., 202. & alibi passim.

75. Enim vero vaporem, quo ex una in alteram armaturam deducto oneratur vitrum, non ex illa prodire, nec in hanc congeri censet VIR summus, sed a subjecta vitri superficie per armaturam alteram erumpere, ut per alteram in oppositam vitri superficiem immittatur. Nam, mutatis quantumvis onerati vitri armaturis, successionem haud minus haberi observat (*x*), & praeterea adnotat (*y*), dum deoneratur vitrum, iis ex locis, quibus arcus deferentis extremitates admoventur, ab emicante igne armaturae portionem disjici, & interpositum gluten comburi; ex quo confirmari contendit electricitatem, quae succutit, in armaturis neutiquam residere, sed sub ipsis positam in suo trajectu earum portionem abripere.

76. Quae quamquam maximam veri speciem praeseferant, experimenta tamen nonnulla afferam, quae suadere videntur electricitates, quibus vitra onerantur, in armaturis praesertim residere (*z*), ex iis in extimas vitri superficies, seu in exteriora ipsius strata deponi, quando armaturae divelluntur: idque non alio consilio, nisi ut acutiores excitem ad eandem rem accuratius pervestigandam.

77. Taenias plures sericas ejusdem coloris, quinque ad exemplum, aut sex, optime exsiccatas, alias aliis superpositas supra laminam deferentem laevem regula ex ebore fricabam, ea cautione, ne in eo affrictu taeniae, vel ab invicem separarentur, vel adversus subjectum deferens corpus attererentur. Postquam fricatae fuerant, si singulas seorsim, a suprema incipiendo, & ex ordine divellerem, in uniuscujusque divulsione inter taenias scintillae apparebant illis praecise in punctis, quae ab invicem separabantur:

(*x*) L. c. p. 140. & seq.
(*y*) L. c. p. 184. 185.
(*z*) Vim succutiendi in armaturis posuerat *Watsonus fuite* p. 240. objectiones etiam contra doctrinam franklinianam proposuit, quibus tamen Franklinus ipse respondet tom. I. p. 164. & seq.

tur: eae ſcintillae ſimiliter exiliebant in infimae taeniae ſeparatione a ſubſtrata deferente lamina. Taeniae autem hoc modo divulſae omnes reſinoſam electricitatem praeſeferebant.

78. Si poſtquam taeniae fricatae fuiſſent (77.), omnes ſimul a ſubjecto plano divellerentur, in unum faſciculum cohaerebant, qui praevalentis reſinoſae electricitatis ex utraque facie ſigna exhibebat. Tunc ſi facies, quae laminae laevi deferenti applicita fuerat ad hirſutam ſuperficiem admoveretur, ut electricitates oppoſitae ad aequilibrium redigerentur (58), dein ab infima taenia incipiendo, ſingularum iterum, ſed inverſo ordine ſeparatio fieret, iterum ſcintillae, ut prius, apparebant, ſed taeniae omnes electricitatem habebant vitream, atque adeo priori oppoſitam, ſuprema excepta, quae reſinoſam electricitatem ex affrictu acquiſitam ſervaverat.

79. Hinc eſt ut ſi taenias eas alias aliis ſuperpoſitas ſupra hirſutum corpus fricarem, dein omnes ſimul ab eo divellerem, ut faſciculum haberem, in quo oppoſitarum facierum electricitates aequilibratae eſſent (58) intermediae taeniae omnes, vel ſupremae congenerem electricitatem acquirerent, vel infimae, pro ut a ſuprema incipiendo, & progrediendo verſus infimam, vel contra ab infima ad ſupremum procedendo ex ordine revellebantur.

80. Porro ſi binae earum taeniarum ſimul revellantur (77. 78. 79.) ſibi mutuo adhaerent, & ſimul junctae eandem electricitatem habent, quam una tantum revulſa habitura eſſet, ſed ſi ſeparentur, obſervabitur eam electricitatem in ipſarum extima reſidere, intima, per quam faſciculo adhaerebant oppoſitam, ſed multo minorem electricitatem habente.

81. Ex quibus conjectare licet, per affrictum (77.) ſupremam taeniam electricitate imbui, caeteras, aut nullam, aut perexiguam recipere: oppoſitam vero, & aequa-

lem

lem electricitatem in subjectam deferentem laminam congeri, quae cum supremae taeniae electricitate aequilibrium constituat, impediatque quominus suprema taenia ulla exteriora edat electricitatis signa. Si taeniae, a suprema incipiendo singillatim, & ex ordine divellantur, supremae electricitatem in subjectam deponi scintillarum specie, ex hac in tertiam, & ita deinceps, donec in infimam deponatur, propterea taenias omnes supremae cognominem electricitatem adipisci.

82. Si taeniae omnes simul a plano deferente divellantur (78), verosimile est electricitatem in eo congestam, & cum supremae taeniae electricitate aequilibratam in infimae superficiem, quae ab ipso divellitur, ex parte deponi scintillarum specie, hinc taenias in unum fasciculum junctas retineri: praevalere tamen in eodem supremae taeniae electricitatem, quod subjectae deferentis laminae electricitas cum ea aequilibrata, tota in infimam taeniam permeare non potuerit: quod si jam ea infima taenia hirsuto corpori obvertatur, ex quo majori vi in ipsam electricitas immittitur (15), tantam recipiet, ut cum supremae contraria electricitate aequilibretur, & tunc porro, si ab hac incipiendo singulae taeniae ex ordine divellantur, fiet, ut ejusdem electricitas similiter scintillarum specie ex una in alteram diffundatur, sicque taeniae omnes intermediae ipsi congenerem; atque adeo supremae contrariam electricitatem obtineant.

83. Quando porro binae earum taeniarum simul revellantur (80) earum extima comperitur habere electricitatem quam ex frictu, aut ex divulsa superincumbente taenia acquisivit, intima contrariam ab opposita extima taenia propagatam, sed multo minorem, tantam nimirum, quantá per interpositas adhuc taenias alias propagari potuit.

84. Cum vero electricitas in hac taeniarum separatione ab extremarum taeniarum alterutra (81. 82.), vel potius

utra-

utraque (83.) in intermedias diffundatur ſcintillarum ſpecie, hinc eſt ut ubi ſemel taeniae faſciculum componentes ſeparatae ſunt, quantumvis in faſciculum iterum ordinentur nullae amplius in earum ſeparatione ſcintillae conſpiciantur; nam, electricitate in eum modum ex taenia in taeniam jam propagata, ratio ceſſat, ob quam in nova earum ſeparatione ſcintillae fuiſſent appariturae.

85. Intelligitur etiam ex his, cur binae taeniae, ubi ſemel ſeorſim divulſae a ſubjecto plano, aut a proximis taeniis ſe ſe repellunt, vel ex ſimultanea ſeparatione ſe ſe attrahunt, quantumvis ad eas taenias, aut ad planum iterum admoveantur, ſive ſeorſim, ſive ſimul divulſae, ut antea ſe attrahere, aut repellere pergant. Nimirum electricitate imbuuntur taeniae in prima ea ſeparatione: ubi ſemel eadem imbutae ſunt fruſtra ad planum deferens, aut ad caeteras taenias iterum admoventur. Ex quibus porro jam ratio patet phaenomenorum plerorumque in capite primo expoſitorum (ab 1. ad 10.)

86. Similiter vero taenias alias aliis ſuperpoſitas laminae metallicae adplicabam, quae electricitatem ex globo recipiebat, dum interim ad oppoſitam taeniarum faciem acuminatum metallum obvertebam, & per ipſius longitudinem promovebam; dein cum ceſſante globi actione taenias explorarem, eadem omnino eveniebant, ac in ſuperioribus experimentis: nempe pro vario ordine, quo revellebantur taeniae, vel omnes metallicae laminae contraria electricitate imbui poterant, vel eadem, prima excepta, cui apex obverſus fuerat, quae ab eodem receptam electricitatem laminae contrariam conſtanter ſervabat.

87. Quemadmodum igitur ab extimis taeniis in ſubjectas electricitas propagatur, aut a ſubjecto plano in proximam taeniam, quando a ſe mutuo ſeparantur, ſic ab armaturis in vitri ſuperficies deponi in ipſarum ſeparatione eorum phaenomenorum affinitas maxima, vel potius identitas ſuadere videtur.

88. Revera cum vitrum optime exſiccatum laminis plumbeis armaſſem, quae eidem tantum adplicitae, nequaquam vero adglutinatae erant, vitro de more onerato, armaturas firmiſſime ipſi adhaeſiſſe obſervavi, a quo cum poſtea divellerentur, lux pariter & ſcintillae in locis apparuerunt, ubi ab invicem ſeparabantur.

89. Cum vero plura ſericeae telae (*a*) folia alia aliis ſuperpoſita ſimiliter armaſſem, & oneraſſem (onus autem exiguum recipere poterant, quod, ubi paullo major electricitas congeſta fuiſſet, per ſerici craſſitiem ex una in alteram ſuperficiem exiliebat, unde deonerabantur), firmiter etiam armaturae ad ſerici ſuperficiem adhaeſerunt; ſed cum earum alteram, ſuſpenſa quamvis manu, divellere tentarem, nunquam id perficere potui, quin interim ſcintilla a punctorum aliquo, unde divulſio fiebat per ſerici craſſitiem ad oppoſitam armaturam exiliret, unde & deonerabatur ſericum, & oppoſita armatura proprio pondere ſecedens decidebat.

90. Quare veroſimile eſt electricitates oppoſitas in oppoſitis armaturis praeſertim locatas, eas eſſe, quae ipſarum ad vitrum, aut ſericum adhaeſionem efficiant, quaeque, dum armaturae divelluntur, in vitri ſuperficies irruentes ſcintillas exhibeant (88), in ea divulſione conſpiciendas. Cum maximo impetu ex armaturis, dum divelluntur, in proximam coërcentem ſuperficiem irruant, hinc factum eſſe, ut armatura altera divelli a ſerico non poſſet, quin electricitas ab ipſa in ejus ſuperficiem irruens ad oppoſitam armaturam perveniret (89).

91. Neque tamen electricitatem totam ab armaturis in armati coërcentis corporis ſuperficies deponi, dum divelluntur, ſed partem eius coërcentis reſtitentia reprimi (vid. cap. praec.) experimenta iterum inſinuare videntur: etſi enim,

(*a*) *Du ſatin.*

enim, postquam ab onerato vitro armaturae revulsae fuerunt, oppositae electricitates aequilibratae esse pergant, id ex eo fit, quod aequa pars electricitatis ab utraque facie repellatur; cum autem vitrorum, aut taeniarum altera superficies electricitatem immediate a fricante corpore reciperet, altera nonnisi a subjecta armatura in eius separatione super ipsam depositam, eveniebat constanter, ut non tota deponeretur; nam electricitates oppositae, quae in aequilibrio erant, quamdiu lamina deferens applicita perstabat, ea dimota, amplius non erant, praevalente nimirum electricitate superficiei fricatae, ex eo, quod deferens lamina oppositae electricitatis partem secum abripuisset (conf. cap. I. IV.).

92. Eamdem rem experimentis etiam aliis confirmavi. Nam, si vitrum inferiori facie armatum, superiori nuda electricitatem ab acuminato metallo e catena pendulo reciperet, rursus eveniebat, ut oneraretur, & binae oppositae electricitates aequilibrarentur, quamdiu vitro adhaerens armatura eidem adplicita perstabat, ea vero detracta, supremae superficiei electricitas praevaleret. Si superficies superior armata electricitatem reciperet a catena, dum acuminatum metallum ad inferiorem nudam obversum per puncta superiori armaturae respondentia promovebatur, iterum onerabatur vitrum, & oppositae electricitates in aequilibrio erant, rursus armatura adhaerebat, rursusque, ea divulsa, apparebat haud totam electricitatem supra vitri superficiem ab ipsa depositam fuisse; nam praevalens inferioris faciei electricitas jam ex utraque vitri facie se ostendebat.

93. Scilicet, ut paucis rem hanc complectamur, in vitris, aliisque coërcentibus praevalet semper oppositarum electricitatum illa, quae in alterutram faciem majori vi adacta est: propterea, si hinc per frictionem, aut per acuminata corpora immitatur, inde per planas superficies, illa

huic praevalebit: aequilibrabuntur vero quoties, vel utrimque per planas ſuperficies ac laeves, vel per ſtilos aeque acutos utrimque, vel hinc per frictionem, inde per acuminata corpora fuerint immiſſae.

94. Ex quibus iterum veroſimile fit electricitates ſuccutientes in armaturis maxime deferentibus praeſertim reſidere, nec niſi aegre in coërcentium interpoſitorum poros penetrare: partem tamen earum non exiguam in ipſorum coërcentium ſuperficies irruere, dum armaturae divelluntur, ex eo quod eae oppoſitae electricitates tanta vi in ſe invicem tendant, ut a ſe mutuo dimoveri non patiantur. Frictione, aut acuminatis corporibus obverſis facilius per coërcentia ſibi viam facere electricitatem, & per extima ſtrata, quibus haec obvertuntur, non aliter ac per deferentia permeare.

95. Hinc eruitur fieri utique poſſe, ut deferentia parem, ac coërcentia electrici ignis quantitatem contineant (43. 44.): electricitatem tantam in illis congeri non poſſe ac in coërcentibus, quia oppoſitae electricitates ſe mutuo cohibentes in iiſdem conſtitui nequeunt, quin ſtatim permiſceantur: id tantum obtineri interpoſitione coërcentis; indeque fieri, ut etiam ad coërcentium ſuperficies accumulatae oppoſitae electricitates maxima ex parte, vel per reſiſtentem aërem diſperdantur, quando ſeparatis, & dimotis coërcentibus laminis, quibus incumbunt in ſe agere, mutuaque ea actione ſe invicem cohibere deſinunt (*b*).

96.

(*b*) Uti in experimento §. 64. expoſito, tum in ſymmeriano mox §. 97. enarrando, quando dimotis vitris, quibus oppoſitae electricitates inſident per minimum tempus, etſi armaturae nullo deferente corpore tangantur, vis electrica maxima ex parte per reſiſtentem aerem diſſipatur, uti conſtat ex maxima vi, qua in ea divulſione repellitur deferens corpus ſuperiori armaturae impoſitum, ex ſibilo, ex ampla luce, quae tunc temporis in loco tenebricoſo ſupra vitrorum ſuperficies cernitur, hinc eſt, ut ad contactum reſtitutis vitris vel nulla, vel perexigua ſuccuſſio habeatur.

96. Ex his iterum intelligi poteſt, cur coërcentia, quotquot hactenus explorata ſunt, indiſcriminatim omnia ad ictum electricum idonea fuerint comperta. Sic *porcellana*, talcum (c) cryſtallus montana (d), reſinae, cera hiſpanica (e), ſericum (89), aër ipſe (f), ſimiliter ac vitrum onerari poſſunt, onerata ſimiliter ſuccutiunt. Scilicet nulla habita ratione denſitatis, elaſticitatis, mollitiei, fluiditatis; peculiariſve indolis eorum corporum, ſufficit, ut interpoſitione ſua contrariarum electricitatum in ſe mutuo tendentium mixtionem impediant, ut oneri ſuſcipiendo apta ſint.

97. Demum ex his commode explicari poteſt elegantiſſimum SYMMERI experimentum, in quo duo vitra ſibi invicem applicita, dein exterius tantum armata inſtar unici vitri onerabantur, & adhaerebant (g), contra vero, ſi utrimque unumquodque ipſorum armatum eſſet, ſuperior cuiuſque ſuperficies vitream, inferior reſinoſam illi aequalem de more recipiebat (h), propterea que nulla inter ipſa vitra adhaeſio oriebatur (i); enim vero, quando nulla armatura vitris interjicitur, nullum eſt corpus, in quo mobilis electricitas ſit praeter armaturas externas, hinc electricitas in alterutram ipſarum immiſſa contrariam, & aequalem electricitatem nonniſi in oppoſitam armaturam inducere poteſt, conſequenter contrariae, & aequales electricitates ad oppoſitas tantum junctorum vitrorum facies reſidebunt. Quum vero armaturae interjiciuntur, earum mobilis electricitas ſuppetit, quae commoveri poſſit: hinc electricitas vitrea in ſuperiorem armaturam a globo adve-

i 2 niens

(c) *Cl. Beccaria* in epiſt. ad *Cl. Nolletium* §. 472.
Cl. le Roy Encyc. coup. foudroyant.
(d) *Cl. Nollet.* Leçons VI. pag. 477.
(e) *Cl. P. Beccaria lettera* V. §. 148., & ſequent. *Aepinus Hiſtoire de l' Acad. de Berlin.* Tom. cit. p. 119. 120.
(f) *Aepinus* l. c.
(g) *Symmer* p. 113. 114.
(h) Id. p. 119. Franklin tom. I. p. 135. 136.
(i) *Symmer.* ib.

niens intermediarum armaturarum nativam electricitatem ita ſecedere coget, ut reſinoſa illi aequalis in proximiorem colligatur, vitrea earumdem in alteram abeunte, unde aequalem reſinoſae electricitatis quantitatem in armaturam infimam, vitriſque ſubjectam a ſolo alicere poteſt. Quando, inſtituta inter externas armaturas communicatione, vitra haec ſimul deonerantur, vitrea, & reſinoſa interjectarum armaturarum electricitas iterum per eaſdem aequabiliter diſtribuitur, ſicque ad nativum ſtatum reſtituuntur. Quod ſi porro electricus vapor, quo vitra onerantur, ex una vitri in alteram ſuperficiem abiret, in iiſque reſideret (74), nulla ratio eſſet, cur, etiam quando nulla armatura vitris interponitur, electricitas vitrea ab interna ſuperioris vitri ſuperficie expelli non deberet, & cum reſinoſa contiguae ſuperficiei inferioris vitri commutari; cum enim eae ſuperficies totidem punctis ſibi invicem reſpondeant, vel potius ſe tangant, fluidum electricum nullo vehiculo opus habet, ut ex una in alteram tranſeat, quod unum officium armaturis fuerat relictum (*k*).

98. Ad argumentum alterum franklinianum quod ſpectat; armaturae nempe portionem inde excuti, unde ignis electricus emicat (74), videtur utique id non minus a repercuſſione electrici fluidi fieri poſſe, quam a directo ipſius tranſitu per armaturas (*) ex eo praeſertim, quod in exploſione vitra interdum ipſa diffringantur (*l*), quan-

quam

(*k*) Experimentum hoc ſymmerianum aliquoties fruſtra tentatum a Clariſſimo *Nolletio* tandem ad votum ſucceſſit *Mem. de l' Acad.* l. c. p. 267. Enimvero, ut propria obſervatione didici, vel leviſſimus humor vitris adhaerens efficit, ut non ſecus onerentur, ac ſi armatura eſſet interjecta. Ex quo apparet multo magis ab ipſo cavendum eſſe in hoc & affinibus experimentis hactenus propoſitis, quam in pleriſque aliis electricis, cum humor, qui pro armatura inſervire poteſt illo multo adhuc minor ſit, qui impedit, quominus vitra onerari poſſint.

(*) Vid. *Frank.* tom. I. p. 187.

(*l*) *Idem* tom. I. p. 187.

quam erumpens ignis electricus ipsorum crassitiem neutiquam trajicere debeat.

CAPUT VI.

De contrariarum electricitatum natura.

99. CONtrarietatem vitreae, & resinosae electricitatis, quam experimentis memoratis (74), aliisque permultis (*m*) FRANKLINUS demonstraverat, simplicissima, celeberrimaque hypothesi explicavit; alteram nempe contrariarum electricitatum ab excessu electrici fluidi, alteram a defectu nativae ejusdem quantitatis in corporibus proficisci; indeque fieri, ut pari copia permixtae se mutuo destruant. Cujus hypotheseos praestantiam facile perspiciunt quicumque naturae simplicitatem in intricatissimis etiam phaenomenis mirari consueverunt. Haud diffitendum tamen est, alii cuicumque hypothesi locum esse, si ita experimenta postulent, modo illi contrarietati aeque satisfaciat (*n*).

100. Et SYMMERIUS quidem contrarietatem illam novis argumentis confirmavit (*o*), at hypothesim aliam francklinianae substituendam duxit: nempe binas oppositas electricitates a binis oppositis viribus *utrimque positivis* fieri, ex quarum contrarietate, & pugna phaenomena omnia electrica producantur, quae quidem vires oppositae a duobus fluidis oppositas naturas habentibus originem ducant (*p*).

101. Quanquam vero de duplicis fluidi natura nihil ulterius decernere audeat VIR modestissimus (*q*), manifestum est duo fluida elastica se se invicem attrahentia eius hypothesi

(*m*) Tom. I. a p. 85. ad 93., & alibi passim.
(*n*) Confer. *Cl. Beccaria lettera* II. §. 65.
(*o*) P. 116. 117.
(*p*) Pag. 111., & 119.
(*q*) Pag. 120.

thesi adamussim respondere; nam prius non quiescent, quam aequabiliter fuerint permixta. Haec autem profero, non quod velim Cl. VIRI mentem interpretari in re, de qua ipse consulto noluit aperire, sed tantummodo, ut appareat, quatenus haec hypothesis phaenomenis satisfaciat.

102. Scilicet ea semel admissa haud minus explicantur WATSONI, & FRANKLINI experimenta ad vaporis electrici circulationem spectantia (*r*), & similiter intelligitur, cur vitreae electricitatis subeuntis, & resinosae prodeuntis eadem species sit; & eadem iterum species resinosae subeuntis, ac vitreae prodeuntis tum ad acutorum deferentium apicem (*f*), tum ad mercurii summitatem in communicantibus barometris (*t*), nam ubi alterutrum elementum in quovis corpore praevalebit, in ambientia corpora se se expandet, ex quibus interim par oppositi elementi quantitas in id corpus migrabit, donec aequabiliter utrumque elementum fuerit distributum. Quod, si lamina coërcens inter deferens electricum corpus, & deferens aliud cum solo communicans interjecta sit, tunc a solo in hoc corpus par oppositi elementi quantitas attrahetur quidem, sed coërcentis resistentia impedita, tamdiu ad ipsius superficiem haerebit, quamdiu via praesto sit, per quam contraria ea elementa sibi invicem permisceri queant: unde nullo negotio ea intelliguntur, quae §. 73. allata sunt, & reliqua omnia ad coërcentium electricitatem spectantia; cur ad exemplum contraria elementa ad oppositas vitri facies aequabiliter permixta quiescant, ita secreta, ut vitrea electricitas ad unam faciem confluat, resinosa in alteram abeunte, vitri onus constituant, quod sola aequabili eorum distributione iterum destruatur (74). Pari facilitate ea intelliguntur,

(*r*) Vid. *Franck.* loco ultimò citato.

(*f*) Vid. *Cl. Beccaria elettricismo artificiale* passim, *Francklinum* tom. II. p. 167., & seq.

(*t*) Vid. experimenta *Cl. Wilson*, quae referuntur in *Mem. de l' Acad.* 1762. pag. 155.

liguntur, quae cap. III., & IV. de coërcentium electricitate dicta sunt, quando redundans elementum ita coërcentis poris irretitum est, ut non nisi aegre extricari possit; elementum vero oppositum, quod in ejus locum succedere debet aegre similiter eorum poros pervadit, unde in admotis deferentibus diu moram patitur, nisi ea deferentia ita acuminata sint, ut illi eliciendo, huic vero immittendo sint aptiora.

103. Equidem SYMMERUS hypothesim suam directis experimentis confirmari censet, quod & succussio in utroque brachio aequalis ab onerato vitro habeatur (*u*), & foramina a trajecta per chartam electricitate simbriata utrimque sint, simbriis oppositarum facierum ad oppositas plagas directis, quibus duarum virium opposita directione agentium certum argumentum exhiberi opinatur (*v*). Imo experimentum affert, quo huiusmodi oppositae virium directiones luculentius demonstrantur, ac veluti sub oculos ponuntur: nempe metalli tenuem bracteam chartae foliis interceptam ex vehementi vitri electricitate per chartam trajecta duas impressiones recipere, quae chartae foraminibus a trajiciente electricitate peractis utrimque continuae sint, & oppositas plagas respiciant (*x*), & ea quidem virium contraria directione agentium aequalitas etiam Cl. P. BECCARIA experimento confirmatur, in quo lamina vitrea onerata, ac pendula, dum admotis ad opposita respondentia puncta arcus deferentis extremitatibus deoneratur, ne minimum quidem commovetur (*y*).

104. At quantumvis haec omnia vires opposita directione agentes ostendant, vix probant duplici ad eas exercendas, eoque contrario fluido opus esse. Etenim ad succussionem, quod spectat, advertit Cl. BECCARIA eo majorem

(*u*) P. 87., & seq.
(*v*) P. 90. 91.
(*x*) P. 92., & seq.
(*y*) *Lettera* V. §. 168.

jorem esse debere, quo angustior via est, per quam electricus vapor trajicitur, hinc aequalia brachia in omologis locis aeque percuti, & succussionem eo altius, seu ad ampliores brachiorum dimensiones pertingere, quo electricitas fuerit vehementior (z). Fimbrias vero oppositas directiones habentes ab expansione fluidi quaquaversus circa centrum undae (a), neutiquam vero ab ipsius undae directione fieri respondet FRANKLINUS (b), similiterque dici posset impressionum contrariarum, quae in folio metallico observantur, alteram quidem ab impetu advenientis fluidi produci, alteram vero ab ejusdem repercussione ob resistentiam chartae ad oppositam ipsius partem adhuc trajiciendae: nec aliter Cl. BECCARIA ex actionis, & reactionis aequalitate explicat in frankliniana hypothesi, cur vitrum pendulum, dum explosio fit, non commoveatur (c).

105. Contra vero, ut principio dicebam, franklinianam hypothesim mira eius simplicitas commendat, tum illud scholarum *entia sine necessitate non esse multiplicanda*. Id unum in ea desiderari posse videtur; ut, qua facilitate intelligitur, cur contrariae electricitates inter se permixtae se destruant, eadem explicetur, cur, quando misceri non possunt, se invicem alliciant, cohibeantque, nec aliter in se agant, quam si mutua inter ipsas attractio intercederet (41. 73. 74. 95.). Sed jam nimis multa de perobscura quaestione, quae magnos VIROS in contrarias partes distraxit, quae tamen indicare voluimus, ut constaret, hypothesim quamcumque, quae contrarietatem electricitatum in se tendentium, & aequabili mixtione se se destruentium explicet; notis hactenus phaenomenis aeque consentaneam esse.

(z) *Electric. artific.* §. 431. 432.
(a) *Du courant.*
(b) Tom. II. pag. 230. Ita etiam *Cl. Beccaria elettric. artific.* §. 513.
(c) L. C.

DE L' ACTION
DE LA CHAUX VIVE

Sur différentes ſubſtances

PAR M. LE COMTE SALUCES.

1. PLuſieurs Savans ont traité de la Chaux, & leurs productions ſont très-intéreſſantes ; mais les réſultats différens qu' ils ont eus de leurs travaux, ayant contribué à une diverſité de ſentimens ſur la nature de cette ſubſtance, la verité ſe trouva ainſi balancée par la réputation des grands hommes, qui y avoient donnés leurs ſoins, &, à quelque opinion près, on demeura dans la perpléxité & dans l' incertitude : c' eſt pour cette raiſon, qu' après ce qu' en avoient dit les VANHELMONT, les STAHL, les LEMERY, les ZWELPHER, les HARTMANN, les FICKIUS, les LUDOVICI, les KUNKEL, & beaucoup d' autres que j'omettrai pour plus de briéveté, M. du FAY en entreprit un nouvel éxamen : ſon travail ne fut pas néanmoins ni dès-plus ſuivis, ni déciſif ; car quoiqu' il en eut retiré un Sel, il n' en a pas déterminé la nature. M. MALOUIN travailla enſuite ſur le même ſujet, & prouva que la Chaux contenoit un Sel ſélénitique. M. MACQUER voulut, au ſurplus, voir ſi ſes propriétés êtoient duës à quelque matière ſaline, qui concourut à ſa formation, & il a démontré le contraire. M. POTT tourna ſes vuës ſur les phénomènes que préſente la diſſolution de la Chaux vive dans l' acide nitreux. M. Du HAMEL obſerva ce qui réſultoit de la combinaiſon de cette ſubſtance avec tous les acides, & augmenta par là le

le nombre des connoiſſances qu' on avoit ſur cette matière; en traitant enſuite de la nature du Sel ammoniac, ce Savant ayant paſſé à éxaminer quelle pouvoit être la cauſe de la conſtante décompoſition de ce Sel en liqueur en employant la Chaux pour intermède, conclud d' une ſuite d' expériences très-ingénieuſes, que la Chaux n' agit pas ſeulement ſur l' acide du Sel ammoniac, mais encore ſur la matière graſſe qui eſt de l' eſſence des Alkalis volatils. M. BRANDT donna auſſi un Mémoire en 1749 à l' Académie Royale de Suéde ſur la Chaux; le premier objet qu' il a eû en vuë a été de décider ſi elle eſt entièrément diſſoluble dans l' eau, il paſſa enſuite à éxaminer, ſi par ſa combinaiſon avec les acides, il réſulte des Sels neutres, & il a trouvé que ni l' une ni l' autre de ces propoſitions n' étoit pas vraye; il entra enſuite dans une comparaiſon de ſes effets avec ceux des Alkalis fixes, & il finit par des recherches ſur les matières qui contiennent une terre ſemblable à la Chaux. M. HOFFMANN a de même fait différentes expériences ſur la Chaux vive, & il lui attribue un principe terreſtre très-fixe, & un autre volatil preſque de la nature du feu; il prétend que le feu ne fait qu' unir ces deux principes avec plus de force, & qu' on peut en ſéparer celui qui eſt volatil par la cuiſſon dans l'eau; M. NADAULT donna enfin une diſſertation remplie d' expériences toutes nouvelles, & fort ingénieuſes dans le recüeil que l' Académie Royale des Sciences fait paroître ſous le titre de Mémoires préſentés à l' Académie par divers Savans &c. Tom. 2. mais tous ces Illuſtres Ecrivains ont eut pour but, dans l' éxamen qu' ils ont fait de la Chaux, de voir ſi elle contenoit quelque matière ſaline; ſi cette matière entroit dans ſa compoſition, & quelle en étoit la nature. Le Seul M. DU HAMEL, que je ſache, développa, par occaſion, & dans le cas particulier du Sel ammoniac la propriété dont nous avons parlé; propriété qu' on con-

noiſſoit

noiſſoit en quelque façon; car on ſavoit, par exemple, qu' on pouvoit rendre, par ſon moyen, diſſolubles dans l' eau les huiles, & les graiſſes, en formant avec elles une eſpéce de ſavon; ces connoiſſances étoient pourtant trop vagues, & trop peu circonſtanciées, pour que l'on en put inférer ce que ce Savant a enſuite établi par des procédés fort élégants. M. Talducci avoit fait dès l' an 1671 des expériences ſur ce ſujet, & il avoit déja obſervé que la Chaux vive combinée avec le ſoufre augmentoit de poids, malgré l' inflammation de cette ſubſtance, & quelqu' autre phénomène qui reſulte de ſon union avec l' acide nitreux, ou avec quelqu' autre matière; ces expériences, quoique ingénieuſes, ne ſont cependant que des faits iſolés qui ne lui laiſſerent pas ſoupçonner la propriété qu' a la Chaux vive d' attaquer la partie phlogiſtique de pluſieurs corps: c' eſt ce qui fait l' objet de ce mémoire, que je crois d' autant plus intéreſſant, qu' il n' a encore été traité par perſonne ſous ce point de vuë, & que fourniſſant des phénoménes nouveaux, on peut en retirer des obſervations dont l' utilité ſera d' autant plus ſenſible, qu' on pourra, en les comparant à d' autres déja connuës, développer bien des vérités qui demeureroient encore, ou dans l' incertitude, ou, peut-être, dans l' obſcurité & dans l' ignorance.

2. C' eſt de cette matière que nous appellons auſſi du nom de *matière inflammable*, ou *ſoufre principe &c.* dont il eſt queſtion dans ce mémoire, & qu' il eſt néceſſaire de bien diſtinguer de ce qu' on entend communément par matière graſſe; car l' union qu' elle contracte avec toutes les parties, qui compoſent une ſubſtance graſſe, n' eſt pas, à beaucoup près auſſi intime, que l' eſt celle qu' elle contracte avec cette partie, dont la préſence, ou la privation, apporte des altérations, & des changemens ſi conſidérables aux corps.

3. Comme un tel èxamen ne peut naturellement que m' engager dans un grand nombre d' expériences, dont aucune n' eſt à négliger, & que, d'ailleurs, je ſerois trop diffus; je penſe de ne donner maintenant qu' un éſſai de tout le travail que j' ai fait, & dont je rendrai compte, par parties, conjointement à ce qui me reſte encor à faire. Je choiſirai pour ce mémoire les expériences dont les réſultats m' ont fourni quelques phénomènes, ou quelques obſervations plus particulières; pour ſuivre un ordre, je commencerai par expoſer ce qui m' eſt réſulté de la combinaiſon de la Chaux avec le ſoufre, & pour pouvoir procurer tous les éclairciſſemens que je crois néceſſaires, je me propoſe de faire obſerver, en même-tems, ce que m' a donné le mélange du Soufre avec l' alkali fixe, mélange qu'on connoît ſous le nom de foye de ſoufre, & le mélange d' un pareil foye de ſoufre avec la Chaux, c' eſt de ce dont je m' en vais rendre compte.

EXPÉRIENCE PREMIERE.

Combinaiſon du Soufre avec la Chaux: du Soufre avec le Sel de Potaſſe; & du foye de Soufre avec la Chaux.

4. JE fis, dans cètte vuë, un foye de Soufre, en mêlant quatre parties de Sel de Tartre à une de Soufre fondu, j' ai diſſous ce mélange dans l' eau, de même que les ſuivans. Je fis auſſi un mélange de quatre parties de Chaux vive avec une de Soufre fondu. J'en fis un troiſième enfin de ſix parties de Chaux, trois d' Alkali fixe, & une de Soufre. Je mis les trois cucurbites garnies de leurs Chapiteaux ſoigneuſement luttés dans un même bain de ſable.

5. Dans les deux premières combinaiſons la plus grande partie du Soufre ſe ſublima au Chapiteau; on voyoit néanmoins

moins des taches blanches très-luisantes, & principalement dans le col des cucurbites. Le caput mortuum étoit noir dans celle de la Chaux, & roux jaunâtre dans celle du foye de Soufre. Je ne m' arrêtai pas à éxaminer ces résultats, me réservant à le faire, lorsque j' en aurois eus des plus considérables.

6. Le troisième mélange, savoir celui du foye de Soufre avec la Chaux m' a fourni des observations plus remarquables; car il ne laissa rien sublimer, & la liqueur qui passa dans le récipient, quoiqu' insipide & sans odeur, changeoit cependant en rouge le papier bleu; il est vrai qu'elle ne fermentoit point sensiblement avec les Alkalis. Je suis cependant très-persuadé, qu' elle contenoit un peu d'acide; parcequ' outre ces indices, j' ai trouvé, depuis mon travail fait, que M. SEEHLIUS en avoit retiré, & qu' au sentiment de M. VOGEL, cet esprit tient de l' urineux; (*a*) la tête-morte étoit d' un blanc éclatant contre les parois du verre, noire dans le milieu, boursoufflée, facile à se réduire en poussière, grasse au toûcher, d'un goût très-salé. J' en retirai par la dissolution, filtration, & dessication, une substance très-blanche, cotonneuse feüilletée, à peu près, comme la terre foliée; cette substance étoit converte de petits cristaux luisants très-déliés qui s' élevoient en pointes, & se croisoient comme les brins d' une étoffe de laine blanche: son odeur approchoit beaucoup de celle que prend l' urine évaporée en consistence de miel, sa saveur étoit amère, & un peu salée.

Ayant répété cette expérience, en substituant au Sel concret du Sel qui étoit tombé en déliquescence, je commencai par remarquer que la liqueur avoit pris une couleur beaucoup plus chargée, je la décantai, & elle ne changea plus sensi-

(*a*) Ce Phénomène présente quelque chose d'extraordinaire, mais je ne dois pas dissimuler qu' il a été observé par plusieurs Savans.

ſenſiblement en rouge le papier bleu, (*b*) mais elle faiſoit une grande efferveſcence avec les acides : ayant enſuite calciné les matières dont j' avois décanté la liqueur, elles ſe ſont réduites en une maſſe pulvérulente, ſpongieuſe, très-légere, noirâtre dans la partie ſupérieure, bleuâtre dans l' intérieur de la ſubſtance, & très-blanche dans les autres endroits, comme la tête-morte de l' expérience précédente.

8. J' ai réiteré les deux combinaiſons précédentes, mais le rapport de la Chaux, & de l' Alkali fixe, au Soufre étoit dans chacune de 10: 1. Le foye de Soufre fournit une grande quantité de matière ſublimée au Chapiteau & au col du matras.

9. Cette matière étoit très- blanche & ne paroiſſoit tirer un peu ſur le jaune qu' au rebord du Chapiteau; elle étoit ſi graſſe que je ne pus la détacher du verre, ſans qu' elle s' engagea au pinceau, de manière à ne pouvoir l' en retirer qu' en le mettant dans l' eau.

Elle s' y eſt preſqu' entièrement diſſoute, ce qui reſtoit à la ſurface s' eſt enfin précipité ſous la forme d' une poudre blanche très-fine, & la diſſolution du blanc un peu jaunâtre devint claire, & paroiſſoit tirer ſur le bleu.

J' en pris une partie que je ſoûmis aux expériences dont je vais donner les réſultats.

10.

(*b*) La contradiction apparente qui ſe manifeſte dans ces réſultats, en ce qu'ils donnent des ſignes d' Alkali & d'acide ne viendroit'-elle point de ce que par cette combinaiſon l' acide vitriolique eut perdu un peu de ſon affinité avec le phlogiſtique, de manière que ſon union n'étant plus ſi forte, chacun des principes du mélange put agir avec liberté ſur des nouvelles ſubſtances avec lesquelles ils auroient quelque rapport, ſans que ces principes néanmoins puſſent contracter entr'eux de liaiſon à cauſe préciſément du phlogiſtique, qui dans cette rencontre, produiſit l'effet qu' on voit arriver ordinairement dans la diſtillation des plantes qui donnent de l' acide, & de l' Alkali volatil? Si on réfléchit ſur la facilité qu' il y a à décompoſer, par la ſeule évaporation lente, le ſoufre dans le foye de ſoufre, & à en retirer du tartre vitriolé, il paroît que cette conjecture n'eſt pas entièrément deſtituée de probabilité.

10. Elle ſe mêloit avec beaucoup d' effervefcence, & de chaleur à l' huile de vitriol, & donnoit un peu d' odeur ſulphureuſe.

11. Elle ne ſouffroit aucun changement avec l' eau-forte, & éxhaloit ſeulement un peu d' odeur ſulphureuſe.

12. Avec l' Alkali fixe il ſe fit un petit mouvement dans la liqueur qui reſſembloit à un principe de fermentation, & il s' éleva un peu d' odeur de leſſive.

13. Il arriva à-peu-près la même choſe avec l' eſprit volatil de Sel ammoniac, & il me parut qu' il émouſſoit l' odeur pénétrante qu' il avoit (*c*).

14. Je filtrai le reſte de la liqueur, & la fis évaporer; j' en retirai par une deſſication totale une croûte féche jaunâtre tirant un peu ſur le roux, je crus devoir rediſſoudre cette ſubſtance pour voir, ſi en lui enlevant la partie plus graſſe qu' elle contenoit, elle pourroit ſe criſtalliſer, & je vis que la diſſolution prenoit une couleur rouge très-belle, & qu' en même-tems, elle laiſſoit précipiter une matière brûne, laquelle ne s' enflammoit pas comme le ſoufre, quoiqu'elle en manifeſta encore un peu l'odeur; cette diſſolution filtrée n' a pas pû ſe criſtalliſer, & étant évaporée à ſiccité me donna de nouveau une petite pellicule qui fermentoit avec l' huile de vitriol, n' étoit point alterée par l' eau-forte, & donnoit avec l'un & l'autre une odeur ſulphureuſe.

15. J' examinai ce qui étoit reſté ſur le filtre, & il me parut à la couleur que ce n' étoit qu' une eſpécé de fleurs de

(*c*) Je dois avertir que le meilleur moyen que j' aye trouvé pour découvrir plus ſenſiblement l'éxiſtence de l'acide vitriolique a été celui d'employer la diſſolution du Sel marin, ou celle du Sel ammoniac, car quelqu' affoibli qu' il fût par l' eau, ou quelqu' engagée que fut ſon activité par des ſubſtances hétérogènes, les ſignes en étoient beaucoup plus ſenſibles dans ces ſolutions, de ce qu' ils l' étoient avec les alkalis fixes, ou volatils: c' eſt là une obſervation qui m' a paru trop intéreſſante pour négliger d' en rendre compte.

de ſoufre combinées cependant avec beaucoup de matières étrangères. Il eſt toujours certain que ce réſidu contenoit encore du ſoufre, ce qu' on (*d*) reconnoiſſoit à ſa couleur un peu jaunâtre, & à des pointes bleuâtres qui en éxhaloient l' odeur, lorſque je le faiſois chauffer, juſqu' à brûler le filtre ; de même qu' à la propriété qu' il avoit de ſurnager l' eau dans laquelle on le mettoit ; de ne ſouffrir aucune altération étant mêlé à l'eau-forte, quoiqu' il fit effervefcence avec l'huile de vitriol ; ce qui me porte à croire que le Sel qui ſe ſublime, ſouffre, par cette opération, une eſpéce de décompoſition, en ce qu' une partie de l' acide ſulphureux ſe détache de l'Alkali fixe, avec lequel il avoit contracté une union ſuffiſante à le volatiliſer, & qu' avant cette altération ce compoſé étoit une eſpéce de Sel ſulphureux de Stahl, qui ne diffère de celui qu' on fait à feu ouvert, que parce qu' il contient une plus grande quantité de phlogiſtique ; car, certainement, il n' en paſſe pas autant dans la liqueur du récipient, & il n' en reſte pas, outre cela, une auſſi grande quantité dans la tête-morte, qu' il s' en diſſipe par la combuſtion à l' air libre; nous verrons, en effet, que la liqueur paſſée dans le récipient étoit ſenſiblement acide, il eſt vrai qu' elle manifeſtoit une odeur ſulphureuſe, lors qu' on la mêloit à l'huile de vitriol ; mais j' ai lieu de penſer que cette odeur eſt produite par une eſpéce de déſunion qui ſe fait d'une partie du phlogiſtique du ſoufre, lorſqu' il eſt combiné avec l' Alkali fixe, de manière, qu' un peu d' acide vitriolique ſe convertit en eſprit ſulphureux, & qu' étant délayé dans

(*d*) Les fleurs de ſoufre qu' on fait avec le Sel polichreſte ne devroient-elles pas plutôt leur blancheur à une petite quantité de ce Sel, que le ſoufre enléve dans ſa ſublimation, qu' à l' atténuation que le Soufre ſubit dans ſes parties par l' intermède de ce Sel?
N'en ſeroit-il pas de même du Magiſtère par une raiſon opposée?

dans plus ou moins d' eau, approche plus de l' odeur du Soufre brûlant, ou de celle du foye de ſoufre.

16. Pour s'en convaincre, il n' y a qu' à mettre un charbon ardent dans l'huile de vitriol, il s' élévera d' abord des vapeurs ſulphureuſes volatiles; qu'on diminue la force de ces vapeurs par l' addition de l' eau, on trouvera que ces vapeurs s' affoibliſſent, à meſure que l' eau eſt en plus grande quantité, au point de changer cette odeur, en une odeur très-approchante, ſi elle n' eſt pas, tout-à-fait, la même que celle du foye de Soufre (*e*).

17. Dans la tête-morte enfin, il ſe trouve trés-peu de phlogiſtique, eû égard à l' acide & à l' Alkali fixe; car on verra qu' on obtient, par la lixiviation, filtration & évaporation, un Sel luiſant, pendant qu' il ne reſte que très-peu de matière ſur le filtre, laquelle ne s' enflamme point: il eſt vrai que cette ſubſtance ſaline n' en eſt pas totalement délivrée; car, ſans cela, il devroit réſulter un Tartre vitriolé; mais je crois que c' eſt auſſi un Sel ſulphureux, qui approche plus du Tartre vitriolé commun, en ce qu' il contient moins de phlogiſtique, que celui qui ſe volatiliſe, & qui, probablement, ne doit ſa volatilité, qu' à la grande quantité de phlogiſtique, à la quelle il eſt uni, le Sel de Tartre étant une des matières les plus fixes.

18. C' eſt encore ici un exemple de la volatilité que peuvent acquérir les Alkalis fixes, par l'addition du phlogiſtique; nous nommerons le premier, Sel volatil, & le

 ſecond

(*e*) La petite quantité de phlogiſtique qui ſe trouve combinée avec un acide vitriolique affoibli par beaucoup d'eau, eſt la cauſe de cette odeur fœtide; ce qui a été très-bien prouvé par *M. Hoffmann pag.* 110. *T.* 2. or, dans l' addition qu' on fait de l' huile de vitriol au Sel en queſtion, on combine l' acide vitriolique au phlogiſtique ſurabondant du Sel, d' où il doit néceſſairement ſe manifeſter l' odeur des œufs pourris.

ſecond Sel fixe ſulphureux (*f*). La liqueur qui paſſa dans le récipient, étoit un peu trouble, & avoit une odeur ſingulière, étant mêlée à l' huile de vitriol; elle s' échauffa conſidérablement, & développa une forte odeur de Soufre brûlant; avec l' eau-forte, elle donna des fumées dont on ne pouvoit pas diſtinguer la couleur, mais qui ſentoient l' odeur de celles de l' eſprit de nitre fumant: elle fit efferveſcence avec l' Alkali fixe, de même qu' avec l' Alkali volatil. Le Caput mortuum étoit une ſubſtance compacte blanche, tirant ſur le gris à ſa partie ſupérieure; gris brun à la ſurface inférieure, avec une partie très-blanche au centre; j' en eſſayai un peu, comme j' ai fait ci-devant, & il me réſulta ce qui ſuit; ſavoir.

19. Il fit une grande efferveſcence avec les acides, ſe couvrit d' une matière onctueuſe; prit une couleur brûne avec l' huile de vitriol, laiteuſe avec l' eau-forte, ne manifeſta aucun changement avec l' Alkali fixe & volatil: il ſe fit au ſurplus un précipité, dans chacun de ces mélanges. Ce précipité étoit tanné dans l' acide vitriolique, verd-clair dans l' eau-forte, tanné plus clair dans l' Alkali fixe, & preſque noir dans l' Alkali volatil.

20. J' ai diſſous le reſte, je l' ai filtré, & fait évaporer juſqu' à ſiccité, & il ſe forma une croûte épaiſſe, criſtalline & aſſez ferme, qui avoit une ſaveur onctueuſe piquante, amere, & ſentoit un peu l' odeur d'œufs pourris, moins cependant, de ce qu' elle le ſentoit, avant que la diſſolution fût filtrée: c' eſt-là le Sel dont nous avons parlé ci-devant §. 17.

(*f*) J' ai dit un exemple de la volatilité qu' acquièrent les alkalis fixes, par l' addition du phlogiſtique, pour m' exprimer ſelon l'acception commune; car j' aurai occaſion de faire voir, dans la ſuite, qu' elle doit être attribuée, en grande partie, à l'aſſociation qui s'eſt faite de quelque peu d' acide, de manière, qu' on doit regarder ces produits comme des compoſés d'acide, de matières inflammables, & d'une ſubſtance fixe, au moïen de l'eau.

21. Il resta sur le filtre une matière grise sans saveur, & sans odeur, qui ne brûloit point, étant mise sur les charbons ardents, mais qui y prenoit, seulement, une couleur blanche; elle fermentoit beaucoup avec les acides, & manifestoit une forte odeur sulphureuse avec l' huile de vitriol; ayant ensuite mèlé la combinaison de ce résidu avec l'eau-forte, dans celle faite avec l' huile de vitriol, il s' est élevé une quantité de vapeurs si prodigieuse, qu' il paroissoit que le mélange dut s' enflammer; j' y projettai des charbons en feu, & les vapeurs s' éleverént avec une force surprenante; elles étoient d' une couleur jaune très-vive, & répandoient une violente odeur d' esprit de nitre fumant, mêlée d' esprit sulphureux: le reste de la liqueur, qui ne s' étoit pas dissipée, continua à répandre des vapeurs jaunes rougeâtres pendant plus de 24 heures que je le gardai, elles ressembloient parfaitement à celles de l' esprit de nitre fumant, & n' avoient plus rien de sulphureux; d' où l' on voit que l' affinité de l' acide vitriolique avec la matière inflammable, se montre encore supérieure, dans cette occasion à celle des autres acides.

22. Le Célébre STAHL a été le premier, qui ait donné ce procédé, pour décomposer le soufre, & pour faire du tartre vitriolé; mais c' est toujours par le concours de l'air libre, que se faisoit cette opération; personne, que je sache, n' ayant crû, jusqu' à présent, qu' elle put réüssir à vaisseaux clos; on peut consulter à ce sujet les Savantes notes que l' Illustre M. BARON a faites sur LEMERY: (*g*) & c' est de cette différence, que nous devons déduire celles de nos résultats; car le phlogistique, ne pouvant se dissiper, se combine, en partie, avec l' acide qui se détache

l 2 du

(*g*) V. Cours de Chymie &c. par *M. Lemery* nouvelle édition revûë cor., & augm. d' un grand nombre des notes &c. par *M. Baron* 1757. pag. 465.

du Soufre, & qui est alors délayé dans beaucoup d'eau; pendant que le reste, qui est la partie la plus considérable, se joint au Sel de tartre avec un peu d' acide vitriolique; d' où il résulte un Sel volatil sulphureux, qui contient une plus grande quantité de phlogistique, que la tête-morte (*h*).

23. Le foye de Soufre fait avec la Chaux-vive, & dissous dans l' eau, donna de même une matière sublimée au Chapiteau, & au Col du matras; elle étoit encore plus blanche, & en plus grande quantité, que celle du foye de Soufre fait avec l' Alkali fixe, & avoit une apparence cristalline un peu terne; elle étoit onctueuse, & il me l'a fallu dissoudre dans l' eau pour l' en retirer; rien ne surnageoit dans cette dissolution, seulement après quelque tems qu' elle fut reposée, il se fit un precipitè blanc, un peu verdâtre; j' ajoûtai de nouvelle eau, & il se dissout encore une partie du precipité: la liqueur parut toujours un peu trouble.

J' en pris une partie, comme j' avois fait pour le foye de Soufre, & la mêlai avec les acides, & les Alkalis.

24. Mêlée à l' acide vitriolique, elle s' échauffa, fit une violente effervescence, & donna une odeur de Soufre brûlant. Avec l' eau-forte elle s' échauffa un peu, répandit des vapeurs; mais ne donna aucun signe sensible d' effervescence.

25.

(*h*) Ces Sels me paroissent être les mêmes que le Sel neutre que *M. Seypius* a observé dans les eaux minérales. Il le reconnoît de même nature que le Sel sulphureux de Stahl dont il ne différe, que parcequ'il ne se laisse pas décomposer par les acides nitreux & marin, & il en conclud qu' il ne doit cela, qu' à ce qu' il est moins volatil; je crois de même que le Sel du caput mortuum n' est qu' un tartre vitriolé altéré par un peu de phlogistique, & peut-être, surchargé d' acides, ce qui empêcheroit d' autant plus la cristallisation de ces Sels; comme le remarque *M. Junclker*.

25. Avec l' Alkali fixe il s' éleva des bulles d' air; je ne négligerai pas de faire obſerver ici, que dans le mélange de la diſſolution avec l' huile de vitriol, il ſe fit un précipité brun, qui s'élevoit en petits filamens aux côtés du verre: il ne paroiſſoit qu' un peu de pouſſière très-fine, & très-blanche dans celui de l' eau-forte: celui de l' Alkali fixe étoit plus conſidérable, de même que celui de l' Alkali volatil, avec la différence, que ce dernier étoit d' un verd un peu plus foncé.

26. Je crus devoir ajoûter de nouvelle eau dans le reſte de la diſſolution, pour voir ſi le nouveau précipité n' étoit point faute de diſſolvant; mais, quoiqu' il ſe mêla à l' eau dans le tems de l' addition, ce précipité reparoiſſoit néanmoins, à-peu-près en même quantité, après que j' avois laiſſé repoſer la diſſolution; je la filtrai enfin, je la fis évaporer juſqu' à ſiccité, & j' en retirai une ſubſtance qui adhéroit conſidérablement à la Terrine; ce n' étoit qu' une croûte bien mince d' une couleur fauve; elle répandoit un peu de fumée, étant expoſée au feu, s' y noirciſſoit, ſans s' enflammer, & ſans donner d' odeur ſulphureuſe bien ſenſible.

27. Elle fermentoit puiſſamment avec les acides, & manifeſtoit avec eux une forte odeur ſulphureuſe.

28. Il ſe faiſoit auſſi un peu de mouvement en la mêlant à l'Alkali fixe, & volatil. Voici encore un autre éxemple de la volatiliſation d'une matière très-fixe. Dépend-elle du phlogiſtique, de manière que par ſon moïen, la matière fixe change de nature, & prenne un caractère volatil? Ou bien exiſteroit-il des parties volatiles par elles-mêmes dans la Chaux, mais dont la propriété ſeroit ſuſpenduë, par une combinaiſon toute particulière, qui ſeroit détruite par l'addition de l' eau? C'eſt ici le ſentiment du Célébre M. HOFFMANN que nous aurons occaſion de diſcuter dans la ſuite.

29. La liqueur, qui passa dans le récipient, étoit claire; ne donnoit aucune odeur, & ne faisoit sentir aucune saveur, étant mise sur la langue.

Elle fermentoit avec violence, étant mêlée aux acides, & développoit avec eux une puissante odeur sulphureuse.

30. Elle excitoit aussi un mouvement en la mêlant aux Alkalis; mais, ce mouvement paroissoit plutôt de fermentation.

31. La tête-morte étoit une substance boursoufflée; grise, tirant sur le noir dans sa partie supérieure, blanche dans le centre de la masse, & un peu noirâtre au fond; elle étoit grasse au toûcher, soit dans sa partie grise, soit dans celle qui étoit parfaitement blanche; & se réduisoit avec toute la facilité en une poussière très-fine, qui s' attachoit aux doigts: son odeur approchoit de celle du foye de Soufre, son goût étoit un peu amer, & sembloit tenir comme un glû à la langue. Je l' ai dissoute dans beaucoup d' eau, & après l' avoir filtrée, je l' ai fait évaporer.

32. Lorsque la dissolution fut, environ, à moitié évaporée, il se forma à la surface une forte pellicule, sans qu' il se précipita rien au fond; ce qui me fit penser qu' elle pourroit bien se cristalliser: mais ce fut inutilement que je l' exposai, pendant une nuit, au froid; je pris donc le parti de l' évaporer à siccité.

33. J' en retirai, par ce moïen, une croûte saline d'un goût salé & amer, avant qu' elle fut entièrement desséchée; mais lors qu' elle fut réduite à une entière dessication, elle ressembloit assez, au goût, à du Sel commun, à la seule différence près, qu' elle étoit un peu moins salée, que n' est le Sel marin, & un peu onctueuse, laissant quelque trace d' une matière terreuse grasse brûlée par l' acide vitriolique; ayant ensuite pris ce qui étoit resté sur le filtre, & l' ayant mis dans l' eau boüillante, que j' ajoûtois à chaque

fois

fois que je filtrois la diſſolution qui s'étoit faite, je mis toutes ces diſſolutions ſur la croûte ſaline, dont je viens de parler, & j'en eus, par l'évaporation, une croûte qui, du blanc, avoit paſſé au jaunâtre, d'un goût fade, & ayant la conſiſtence d'une terre.

34. Cette ſubſtance diſſoute dans l'eau, fait beaucoup d'efferveſcence avec l'huile de vitriol, donne une grande odeur ſulphureuſe, prend une couleur laiteuſe, au moment du mélange, s'éclaircit, & ſe fait un précipité blanc, & une écume graſſe à la ſurface de la liqueur.

Après qu'on a verſé une certaine quantité d'eau-forte l'efferveſcence ſe manifeſte avec des fumées blanches, & après quelque tems, il ſe fait un petit précipité.

35. Il ſe fait un peu de mouvement avec l'Alkali fixe, il ſe forme enſuite un coagulum blanc, qui nage dans la liqueur devenuë laiteuſe, avec un petit précipité roux jaunâtre.

On voit le même mouvement avec l'Alkali volatil, la liqueur prenant une couleur rouſſeâtre; après être repoſée, on ne ſent plus d'odeur urineuſe, il ſe fait une précipité brun; & on voit une tranche, à la ſurface de la liqueur, qui reſſemble à une huile.

36. Ce qui eſt reſté ſur le filtre étoit une matière griſe foncée, qui perdoit un peu de ſa couleur, étant deſſéchée, pour l'en enlever, l'ayant miſe ſur une poële de fer à un feu violent, juſqu'à faire rougir à blanc la poële, elle a commencé par prendre une couleur jaune ſans fumée, ni odeur & elle devint enſuite blanche.

37. Je pris une partie de ce réſidu que j'avois fait deſſécher ſur le filtre, & je l'ai ſoûmis aux expériences ordinaires.

Il fit une violente efferveſcence avec les acides, & il manifeſta une puiſſante odeur ſulphureuſe volatile avec l'huile de vitriol, & une très-forte odeur d'eſprit de nitre

fumant

fumant avec l' eau-forte ; dans le premier, une écume surnageoit la liqueur que j'avois étenduë dans l'eau, & l'on voyoit des petites particules qui s' y soûtenoient, il se fit au surplus, un précipité gris-brun ; dans le second on découvroit de même cette écume grasse, qui adhéroit aux parois du verre, & il n'y avoit point de précipité sensible.

38. Dans les Alkalis, il parut se faire un petit mouvement, & il se fit, sur tout dans l'Alkali fixe, une précipitation, à ce que j'ai pû conjécturer, presqu' entière de ce résidu, lequel prit une couleur obscure.

39. Ce même résidu, calciné, donna les mêmes signes d'effervescence avec les acides, & de mouvement avec les Alkalis ; mais avec plus de force, de même que pour les odeurs qu'il développa dans le mélange des acides : cette écume se montra aussi avec l' huile de vitriol, mais elle n' étoit pas en si grande quantité, & le précipité en fut plus abondant, plus clair, & moins léger ; rien ne se soûtenant dans l' eau; dans l' eau-forte, il ne se fit point d' écume.

40. Avec les Alkalis, il se fit une précipité très-abondant, mais plus clair que celui dont nous avons parlé ci-devant.

41. Je réïtérai cette expérience, en mettant 24. parties de Chaux sur une de Soufre, & j' observai que la matière sublimée au Chapiteau, & au Col de la cucurbite, étoit très-blanche & luisante, sans le moindre vestige de jaune; on y découvroit même des cristallisations en assez grande quantité ; mais elles étoient tellement entrelacées les unes dans les autres, qu' on ne pouvoit pas distinguer la figure; cette matière étoit néaumoins très-grasse, & la partie, qui adhéroit au verre ne pût être enlevée, qu' en la dissolvant dans l' eau : j' en mis un peu de celle que j' avois détachée avec le pinceau sur les charbons ardents, & je vis qu' elle se boursouffloit comme fait l' alun, pendant

qu' elle

qu' elle donnoit des fumées qui ſentoient le Soufre; je diſſous le reſte, & je mêlai de cette diſſolution dans l'huile de vitriol, l' eau-forte, l'Alkali fixe, & l' Alkali volatil; je remarquai, outre les effets dont nous avons parlé ci-devant, §. 23. 24. 25. qu' elle manifeſtoit l' odeur de foye de Soufre avec l' huile de vitriol, une odeur ſulphureuſe avec l' eau forte; qu' elle ſe troubloit, devenoit laiteuſe, & formoit une eſpéce de coagulum, éxhalant une puiſſante odeur de leſſive, après s' être repoſée, avec l'Alkali fixe: par l'évaporation du reſte de cette diſſolution filtrée, je retirai une ſubſtance graſſe, amere, un peu ſalée, laiſſant une impreſſion terreuſe ſur la langue, elle étoit par écailles comme la crême de Chaux deſſéchée, ce Sel manifeſtoit une forte odeur de Soufre brûlant avec les acides, & faiſoit effervecence avec eux; il ne faiſoit voir, au reſte, aucun mouvement avec les Alkalis, & développoit l' odeur urineuſe volatil du Sel ammoniac.

42. Je ſaturai d' acide vitriolique le peu qui me reſtoit de ce Sel, je l' étendis dans l'eau, & après l'avoir filtré & évaporé, j'en eus un Sel blanc fait, à-peu-près, comme le précédent qui reſſembloit à un Sel ſélénitique, mais dont le goût âpre & ſtiptique approchoit beaucoup de l' alun. Je tentai de le faire criſtalliſer par l' addition d' une leſſive, mais je n' en retirai qu' une ſubſtance qu' il fallut deſſécher, & qui reſſembloit à des coquilles d' œufs pilées, & dont la ſaveur étoit extrêmément ſtiptique, & laiſſoit enſuite un impreſſion terreuſe ſur la langue.

43. Les réſultats des expériences faites ſur la liqueur ont été les mêmes, que ceux dont j' ai parlé §. 29. 30.

44. La tête-morte ne différoit de la précédente §. 31. qu' en ce qu' elle paroiſſoit plus légere, & plus brûne à ſa ſurface. Je trouvai

Qu' elle faiſoit une forte efferveſcence avec l' acide vitriolique, & qu' il s' éxhaloit une forte odeur d' acide vi-

triolique ſulphureux. Avec l'eau-forte, elle fit auſſi beaucoup d'effervefcence, & manifeſta une forte odeur, telle que celle que donne l'eſprit de Nitre fumant.

45. Avec l'huile de tartre, on voyoit un petit mouvement qui partoit de la Chaux, pour ſe rendre à la ſurface de la liqueur; & je crois être fondé à penſer, que ce mouvement étoit produit par l'air, qui ſe développoit de la Chaux: mêlée enfin à l'eau, elle faiſoit effervefcence comme la poudre de la Chaux, &, à-peu-près, comme la *creta bathenſis*.

46. Ayant mis le réſidu qui étoit ſur le filtre, & qui y étoit en aſſez grande quantité, dans un creuſet ſur le feu; je remarquai des petits points de flamme bleuâtre, qui indiquoient qu'il contenoit encore un peu de Soufre, quoiqu' en petite quantité; il apparoiſſoit enſuite des petites étincelles de feu, comme ſi elles euſſent été de poudre de charbon: après un feu très-vif, cette terre qui étoit griſâtre, devint beaucoup plus claire; elle ne ſe diſſolvoit qu'en très-petite quantité dans l'eau: il ſe fit un précipité conſidérable d'une terre très-fine, & très-blanche, d'ailleurs, inſipide, & inodore: ce réſidu mêlé à l'huile de tartre développa une odeur urineuſe, pendant qu'il en donnoit une de leſſive, lors qu'il n'étoit point calciné.

EXPÉRIENCE SECONDE.

Combinaiſon de la Chaux avec le foye de Soufre décompoſé par l' addition de l' acide vitriolique.

47. JE mêlai du Soufre avec du Sel de potaſſe, & je noyai ce mélange dans l' huile de tartre où j'avois mis la Chaux; lorſque ce mélange ſe fut repoſé, je le ſaturai d' acide vitriolique, pour faciliter le dégagement du Soufre, & le ſoûmis à la diſtillation au bain de ſable; le feu étant très-vif du commencement, il ſe fit néanmoins une ſéparation des ſubſtances, ſelon leur différente gravité ſpécifique; mais la liqueur qui ſe montroit rouge dans le matras monta claire, & après elle, il paſſa un peu de Soufre dans le bec du Chapiteau: lorſqu' il ne parut plus d' humidité, je pouſſai le feu juſqu' à faire rougir le ſable, & il ſe ſublima dans le Chapiteau des taches blanches en petite quantité; voyant, enfin, que la tête-morte avoit une apparence vitreuſe brûne, je laiſſai refroidir le matras; l' ayant enſuite décoëffé, il s' éleva une violente éxhalaiſon de vapeurs volatiles qui a une odeur urineuſe, celle-ci étoit encore plus développée dans la matière ſaline du Chapiteau.

48. La liqueur, qui étoit paſſée dans le recipient, étoit un peu laiteuſe, & n'avoit point d'odeur. Mêlée à l'acide vitriolique, elle ne fermenta point, & développa ſeulement un peu d'odeur ſulphureuſe; avec l'acide nitreux, elle produiſit le même effet.

49. Mêlée à l'Alkali fixe, il me parut qu'elle avoit développé quelque peu d' odeur urineuſe. Mêlée enfin, à une diſſolution de Sel volatil concret dans l' huile de tartre, mélange qui ne donnoit plus qu' une foible odeur urineuſe, elle ſe renouvella avec beaucoup de force.

50. Le ſoupçon que j' avois formé, que cette liqueur pût contenir du Sel ammoniac, me fit penſer à la mêler

à l' eau-forte, pour en faire une eau régale; je mis de l'or dans la liqueur, elle l' a entièrement diſſous (*i*).

51. En conſidérant les réſultats de toutes ces expériences, il paroît qu' on peut conclure que le Soufre a changé quant à ſes propriétés principales, & que l' aſſociation de la Chaux, & des Alkalis fixes le rend ſuſceptible de pluſieurs modifications, & d'une décompoſition dans ſes principes qui ne peut ſe faire d'ailleurs, que par la combuſtion à l'air libre; mais comme les ſubſtances, qui ſe mêloient, & ſe noyoient dans l' eau qui paſſoit dans le récipient, & celles qui ſe ſublimoient dans le Chapiteau, où, qui s' élevoient dans le col, étoient en trop petite quantité pour en déterminer par des expériences éxactes la nature, & pour en déduire en conſéquence les altérations arrivées au Soufre; j' ai pris le parti de ſaturer de Soufre une quantité déterminée

(*i*) *M. du Hamel* a obſervé p. 76. mém. de l'Acad. R. des Sciences an. 1747. un phénomène qui a beaucoup de rapport à celui-ci, & par lequel il paroît que l' eſprit de nitre ſe régaliſe en paſſant ſur la Chaux, ce qui avoit été dit par *Beker*, nous renvoyons à ces deux Auteurs ceux qui voudroient éxaminer le fondement de leur opinion, & nous nous contenterons d'avancer quelques réflexions qui y ont rapport.

M. Malouin dans ſon mémoire ſur la Chaux dit pag. 95. d'en avoir tiré une liqueur de la nature de l' eſprit de Sel commun &c.

On ſait qu' en ne ſaturant pas les terres abſorbantes d' acide marin, on obtient un Sel qui a les propriétés des Alkalis fixes.

On ſait que le ſang contient du Sel marin dénaturé par l' action des eſprits vitaux.

M. Baumé dit avoir fait un Sel alkali artificiel, en ſaturant de la Chaux avec du phlogiſtique. Man. de Chimie pag. 74.

Ne pourroit-on pas ſoupçonner que par cette opération, on ne fit par une roûte inconnuë, que la combinaiſon de l' acide marin à la terre, dans le rapport qui eſt néceſſaire pour former la ſubſtance ſaline dont nous avons parlé, qui a les propriétés de l'alkali fixe? ce ſeroit l'effet d' une décompoſition, & récompoſition, ou, au moins celui d' une ſurcompoſition dont nous avons tant d' éxemples.

Je n' oublierai pas de rapporter ici un phénomène qui ſemble prouver l'éxiſtence de l' acide marin dans la Chaux; c' eſt qu' en diſſolvant de la Chaux dans une forte diſſolution de Sel de glauber, il m' eſt réſulté, par la filtration & évaporation, un Sel cryſtalliſé comme le Sel d' Ebſom.

minée de Chaux, & d' Alkali fixe pour en éxaminer les produits.

52. Je pris pour cela de la Chaux ſulphurée, ou le caput mortuum d' une diſtillation de la Chaux faite avec le Soufre; le rapport de ces matières étoit de 16: 1. Sur deux onces de ce caput mortuum, je mis un gros de Soufre, ayant ſoin de bien mêler les matières, & de les incorporer par le ſecours de l' eau, je fis diſtiller ce mélange dans une cucurbite de terre à feu nud, ayant la precaution de n' augmenter conſidérablement le feu, que lorſqu' il ne ſe ſublimoit plus rien dans le Chapiteau, & je l' y ſoûtins ainſi pendant une heure; je laiſſai refroidir la cucurbite, j' en retirai la tête-morte qui étoit devenuë encore plus griſe, & plus légere; je la mêlai à un autre gros de Soufre, & la ſoûmis de nouveau à la diſtillation, remettant le même Chapiteau, & tel que je l' avois retiré de la diſtillation précédente, je mis à part l' eau que j' en avois retirée, & je réïtérai ſix fois le même procédé, en pouſſant le feu à la dernière violence la ſeptième fois.

53. Je vis à chaque fois ſe ſublimer une matière blanche comme celle dont j'ai parlé §. 23. elle péſoit 36. grains, & à la ſixiéme ſublimation la matière du Chapiteau devint jaune pâle en dedans, pendant qu'elle reſta blanche contre le verre.

54. La premiére liqueur qui paſſa dans le récipient, le rapport de la Chaux au Soufre étant de 10: 1., étoit un peu laiteuſe, elle avoit une odeur d' œufs pourris.

Mêlée à l' huile de vitriol, elle s' échauffa, fit efferveſcence & prit l' odeur de Soufre brûlant, en donnant des vapeurs blanches.

Je ne remarquai aucun mouvement avec l'eau-forte, ſeulement elle s' y mêloit comme fait le ſirop dans l' eau.

55. Il me parut entrevoir un peu de mouvement par l' addition de l' Alkali fixe, & il s' éleva une odeur de leſſive.

Cette

Cette liqueur étoit, d' ailleurs, ſi foible, que les ſeuls ſignes de l' huile de vitriol ont été manifeſtés.

56. La ſeconde liqueur étoit limpide, & ſentoit un peu l' empireume.

Elle ne fit aucune effervefcence avec les acides; elle donna ſeulement des fumées rouſſes & épaiſſes avec l'huile de vitriol, & une odeur de Soufre brûlant aromatique avec tous les deux; on doit encore obſerver, que l' huile de vitriol ſe précipitoit, & ce n' étoit, qu' en agitant les liqueurs, qu' elles ſe mêloient, faiſoient paroître les fumées, & l' odeur en queſtion.

Elle fit effervefcence avec l' Alkali fixe, & diminua l' odeur urineuſe avec l' Alkali volatil que je lui rendis, par l' addition du Sel de Potaſſe.

57. La troiſiéme étoit auſſi claire, ſentant de même l'empireume, & donnant les mêmes réſultats.

58. La quatriéme étoit auſſi claire à la ſurface, on voyoit nager une liqueur qui paroiſſoit huileuſe, elle ſentit l'odeur d' eſprit de nitre dulcifié, & produiſit les mêmes effets que ci-devant.

59. La cinquiéme étoit claire, une huile verte ſembloit nager à la ſurface, ſon odeur étoit ſulphureuſe très-volatile & très-pénétrante.

Mêlée à l' huile de vitriol, elle prit une odeur aromatique que l' Alkali fixe lui enlevoit, & elle ſuivit en tout, ce que nous avons vû ci-devant.

60. La ſixiéme étoit, à-peu-près, comme la précédente, & donna les mêmes réſultats; mais on voyoit un ſédiment conſidérable d'un blanc jaunâtre.

61. La tête-morte dans les premiers procédés étoit bleuâtre; mais cette couleur ſe changeoit à chaque fois, & devenoit plus blanche, juſqu' à ce qu' elle paſſa au blanc ſale à la ſixiéme repriſe; & elle reſſembloit, pour lors, un mortier dont on fait les revêtemens, & ſentoit

l'odeur

l'odeur de la Chaux, à laquelle on mêle la colle, & le gypse pour blanchir les murailles, elle étoit insipide, & pesoit onc. 2. $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$

62. La Chaux a donc augmenté son poids de $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$ car je n' en avois employé que onc. 2. &, en ajoûtant les gr. 36. de la matière qui s' est sublimée, il manque encore $\frac{3}{8}$ au poids total, puisque j'avois fait l'addition de $\frac{6}{8}$ de soufre : or, il faut que ces $\frac{3}{8}$ soient passés avec l' eau dans les récipients; mais comme les liqueurs étoient sensiblement acides, & que dans les dernières, l'acide sulphureux volatile étoit manifesté & développé; il suit, qu' il doit avoir passé dans les récipients gr. 200. d' acide libre, étant, d' ailleurs, probable que le phlogistique se soit combiné (*k*) avec les parties de la Chaux, dont gr. 36. ont été sublimés à la voûte du Chapiteau: il est vrai que dans la sixiéme opération, il se sublima un peu de Soufre, sans avoir souffert aucun changement, autant du moins, que j' en ai pû juger par la seule inspéction; & quoique la quantité ne fut pas considérable, elle a, néanmoins, concouru aux gr. 36., & c' est cette partie que nous verrons qui ne s' est point dissoute dans l' eau.

63. Je pris la substance qui s' étoit sublimée, & qui n' étoit plus si grasse, qu' elle étoit, à la première & à la seconde sublimation; je la mis dans l' eau froide, elle se soûtint

(*k*) A la sixiéme reprise une partie du Soufre se sublima sans se décomposer, & c' est cette partie qui ne pût pas se dissoudre, & dont nous parlerons plus bas; le reste n' étoit, je crois, que des parties de Chaux combinées avec le phlogistique qui a abandonné l' acide vitriolique, ce qui doit revenir environ à gr. 9., savoir au quart du poids total.

foûtint à la furface pendant quelque temps ; mais petit-à-petit, il fe fit un précipité blanc , le peu qui furnageoit demeurant jaune ; j' en mis un peu fur le feu & il s' enflamma comme le Soufre. Les premières fublimations cependant en contenoient très-peu ; car cette matière étoit toute diffoluble dans l' eau , quoiqu' elle fut fort graffe , & qu' elle contint par conféquent beaucoup de phlogiftique. Je crois néanmoins que dans l' un & dans l' autre , il fe trouve encore du véritable Soufre ; mais il n' eft pas moins vrai, que la Chaux fe volatilife avec lui , & qu' elle en décompofe la plus grande partie : or il eft probable que , pendant que la Chaux agit fur une partie du phlogiftique du Soufre , & qu' elle en dégage l' acide , il y a des parties de cette Chaux, qui font volatilifées, par l' aggrégation du phlogiftique du Soufre, qui a été décompofé.

64. Ces obfervations fervent à appuyer l' opinion de quelques Phyficiens , qui prétendent que la cohéfion des parties des corps dépend de la matière inflammable : M. STAHL a démontré qu' elle fe rencontre dans les trois Regnes , & qu' elle n' y diffère, que par la quantité; or, cela pofé , en raprochant des faits qui nous montrent que par une calcination fuivie , & violente, ou par d' autres opérations réïtérés , on peut dépoüiller les corps du principe qui fervoit à les caractérifer, fans qu' on puiffe les récompofer par l' addition du phlogiftique , il paroît naturel de conclure , qu' il n' eft pas le principe qui conftitue toutes les propriètés des corps, comme quelques Chimiftes l'ont crû.

65. Quoique les expériences , que j' ai rapportées, prouvent que la Chaux décompofe le Soufre , en attaquant la partie phlogiftique , il eft pourtant vrai auffi qu'on n' en rétire environ que la moitié en acide fulphureux , en y comprenant une partie qui fe fépare par la fublimation; il nous refte donc encore à éxaminer, fi le Soufre reftant, ne fe trouve dans la Chaux, que comme un fimple aggrégé ,

ou

ou bien s' il s' eſt combiné avec elle d' une manière plus intime; ce qui me porte à être plutôt de cette opinion, c' eſt que j' ai toujours fait rougir les cucurbites de terre dont je me ſuis ſervi dans ces dernières expériences, en employant un feu de bois très-vif & continué pendant long-tems, après toute diſtillation, & toute ſublimation finie : or il paroit que par cette opération, le Soufre auroit dû reparoître, s' il avoit encore été uni à ſon phlogiſtique; mais je préſume que ce phlogiſtique s' eſt combiné avec la Chaux d' une manière aſſez forte, pour ne plus être ſujet à l' action de l' acide vitriolique, qui, à ſon tour, eſt puiſſament retenu par la Chaux comme le prouve M. Hoffmann.

66. Pour déterminer plus exactement ſi le Soufre qui reſte dans la Chaux, n' eſt plus ſous la forme de Soufre, je fis les expériences ſuivantes.

Je mis la tête-morte §. 61. dans ſix livres d'eau, il s'en eſt diſſout environ trois gros; je la filtrai, & ayant diviſé cette diſſolution, je mis du Sel de potaſſe dans une partie, elle devint d' un jaune clair, il ne ſe fit point du tout d' effervefcence, & il parut ſeulement un peu de précipité; mais comme je n' ai eû aucune marque qui m' indiqua le point de ſaturation, je ne ſais pas ſi ce peu de precipitè n' a point été produit par de l' Alkali ſurabondant; ce qui me paroit d' ailleurs très-probable. Il s' éleva nénamoins à la ſurface de la liqueur une ſubſtance blanche qui reſſembloit à de la graiſſe figée, & qui, peu-à-peu, s' eſt précipité. (J' avois vû la même choſe dans le mélange du foye de Soufre à la Chaux : toutes les fois que j' ajoûtois du Sel de potaſſe, le mélange alors ſembloit même ſe gonfler, & il en ſortoit une grande quantité de bulles d'air) mais revenons à l' expérience; je décantai la liqueur, & la fis évaporer au bain de ſable, ce qui me fournit un Sel gras fait, à-peu-près, comme celui du §. 42. mais ſentant

l' odeur d'urine évaporée ſans aucune différence, ſon goût étoit fort acide étant bien deſſéché, (*l*) amer, un peu ſtiptique, & laiſſoit une impreſſion onctueuſe ſur la langue, d' ailleurs très-avide de l' humidité.

67. Ce qui étoit ſur le filtre deſſéché à l'air, étoit comme du limon, il ſe pétriſſoit avec l' eau; mais il ſe fendoit au feu, il exhaloit un peu d' odeur de Soufre brûlant, & il paroiſſoit altéré par un autre odeur qui reſſembloit à du Camphre; il ne donnoit point de flamme, ſon poids ne fut pas ſenſiblement diminué, il devint très-blanc & approchoit beaucoup de la craye friable.

68. Je mis le reſte de la diſſolution dans un alembic de verre, & après la diſtillation finie, je trouvai une croûte griſe claire, dont le centre étoit roux noirâtre. Je ne pus détacher cette partie, tant elle adhéroit au verre; je pris le parti de la diſſoudre dans l'eau, pour la remettre à évaporer juſqu' à ſiccité, ſans pouſſer le feu ſur la fin (comme j' avois fait dans la diſtillation, pour voir s' il ne ſe ſublimoit rien au Chapiteau,) & j' eus encore une craſſe rouſſe qui ſentoit la graiſſe brûlée, & très-adhérente à la capſule; dans le milieu, on remarquoit une tache qui ne reſſembloit pas mal à une pierre, dont on tire le gypſe, qui eſt un peu argentine; j' eus beaucoup de difficulté à la détacher, & elle reſſembloit éxactement à la pouſſière par ſa couleur.

J' en mis une priſe ſur un fer rouge, elle y jetta beaucoup de fumées d'une odeur de graiſſe brûlée, & y prit la couleur du charbon; l'ayant miſe dans l' eau elle parut s' y diſſoudre, mais elle ſe précipita en entier, autant que j' en pû juger lorsqu'elle fut bien repoſée.

69.

(*l*) Tout le monde ſait, que de la combinaiſon de la Chaux avec un Alkali fixe il réſulte le cauſtique potentiel dont ſe ſervent les Chirurgiens celui-ci cependant diféroit de la pierre à cautére, en ce qu'il étoit très-blanc.

69. En conſidérant maintenant tous ces réſultats, nous commençons par reconnoître une décompoſition du Soufre, dont une grande partie de l'acide ſe convertit en eſprit ſulphureux. 2.° Qu'une partie, & probablement la plus grande du phlogiſtique qui entroit dans la formation du Soufre, s'unit à des parties de la Chaux, & ſe volatiliſe. 3.° Que les Sels qui reſultent ainſi de la combinaiſon de l'acide vitriolique avec la Chaux, ſont très-diſſolubles dans l'eau, propriété contraire à la nature des ſélénites, qui ſont les Sels réſultants de l'union de cet acide avec les terres calcaires; ſoit que ces Sels ſoient naturels, ſoit qu'ils ſoient le produit de l'art. 4.° Qu'on peut obtenir une liqueur, & même du Sel volatil urineux, phénomène cependant déja connu, & qu'on trouve dans pluſieurs Auteurs. 5.° Que la Chaux perd par ce moïen toutes ſes propriétés, & qu'il reſte une partie qui eſt très-difficile à ſe diſſoudre dans l'eau; il y a apparence que c'eſt la partie qui, étant ſaturée d'acide vitriolique, ne contient point de phlogiſtique.

70. C'eſt de l'union du phlogiſtique, que nous devons déduire cette plus grande diſſolubilité; en ce que, par ſon aſſociation l'acide s'unit d'une manière moins intime, & moins forte avec la baſe terreuſe, d'où il ſuit que l'eau a une plus grande action ſur ce compoſé (*m*).

(*m*) Nous ne laiſſerons pas d'obſerver auſſi qu'il n'en eſt pas de même, lorſque la matière inflammable eſt unie en particulier avec une de ces ſubſtances, car nous voyons que, lorſqu'elle s'y trouve dans une quantité convenable que nous nommerons ſaturation; les compoſés qui réſultent ne ſe diſſolvent plus avec la même facilité dans l'eau, ou même point du tout, ce qui paroît une preuve convaincante que c'eſt de ſon interpoſition, qu'on doit déduire la propriété en queſtion.

Il me ſemble, d'ailleurs, que ceci tient à la théorie de la ſurabondance d'un des principes qui entre dans la formation d'un compoſé, d'où il paroît que doit dependre la facilité de leurs décompoſitions, ou pour prendre la choſe plus généralement, du défaut d'un des principes

71. Cet effet ne doit cependant pas être regardé comme particulier au phlogiſtique, car je penſe qu' un principe qui auroit du rapport avec ceux-là produiroit du plus au moins le même effet.

Je remarquerai de même en paſſant que cette induction eſt d' autant plus fondée, qu'on voit que c' eſt de-là que dépend la diſſolubilité du Soufre dans l'eau par l' intermède de l' Alkali fixe.

72. Ne pourroit-on pas auſſi penſer que la décompoſition des corps vient de ce que le diſſolvant a une plus grande affinité avec la partie phlogiſtique du corps dont il eſt le menſtruë, que n' en ont toutes les autres parties intégrantes de ce même corps avec la partie phlogiſtique ?

Cette conjecture, je l' avoüe, ſouffre de grandes difficultés ; mais elle n' eſt pas dénuée de probabilité, & elle pourroit être diſcutée avec plus de fondement autre part: d' ailleurs, elle paroît être le fondement de la théorie des doubles affinités.

73.

cipes, ce qui eſt d'autant plus ſenſible, que les corps ſont plus compoſés: dans cette théorie je comprens la volatilité ſoit naturelle ſoit artificielle comme le défaut d' un de ces principes, ainſi que nous verrons ailleurs.

Le travail que *M. Roüelle* a fait ſur les Sels neutres capables d' une ſurabondance d' acide ſemble confirmer ce ſentiment ; en ce qu' ils m'ont paru plus aîſes à décompoſer. L'opération du départ par l'eau-forte qui ne peut ſe faire, que lorſque la quantité de l' argent eſt au moins triple de celle de l' or.

La décompoſition du Borax pour en retirer le Sel ſédatif ſont des exemples de la ſurabondance abſoluë d' un principe.

La diſſolubilité du Soufre dans les huiles tient de même à cette claſſe; mais nous rapporterons à une claſſe oppoſée la diſſolubilité du Soufre dans l' eau par l' intermède des Alkalis, & par conſéquent, la facilité de ſa décompoſition, la facilité de la décompoſition des Sels ſulphureux &c. Ces dernières doivent être conſidérées produites par le défaut d'acide, de manière que la grande affinité qui ſe trouve entre cette ſubſtance ſaline, le phlogiſtique & les alkalis, produit à peu-près le même effet, que celui qui arrive aux Sels compoſés voyez n. du §. 7.

73. Cette décompoſition du Soufre, quelqu' extraordinaire qu' elle ſoit, eſt pourtant fondée ſur les mêmes principes que celle qui ſe fait par la cloche : on ſait que l' union du phlogiſtique à l' acide vitriolique ne peut ſe faire, que lorſque celui-ci eſt dans ſon plus grand dégré de concentration, d' où il ſuit qu' il faut rendre à l' acide le phlegme dont on l' avoit dépoüillé, pour obtenir la décompoſition du Soufre; & c' eſt ce qui ſe fait dans cette opération, qui ſert de preuve à l' éxactitude de cette théorie, & qui eſt encore confirmée, par ce qu' on ne peut faire cette décompoſition par le moïen de la Chaux ni de l' Alkali fixe ſans le concours de l' eau; c' eſt pour m' aſsûrer de cette vérité, que j' ai fait un mélange de 8. parties de Chaux ſur une de Soufre, & de 8. parties d' Alkali de même ſur une de Soufre; la Chaux, & l'Alkali étoient ſecs : je mis ces deux mélanges dans deux cucurbites de verre garnies de leurs Chapiteaux, & de leurs récipients bien luttés dans un bain de ſable, ayant eû ſoin de donner au commencement un feu tout-à-fait doux pour en retirer le peu d' humidité, qui ſe trouve toujours dans ces ſubſtances, quelque ſoin qu'on ſe donne pour les avoir ſéches, ſans qu' elle put favoriſer la décompoſition du Soufre, en effet, je retirai quelques gouttes de liqueur dans les deux récipients : celle de la Chaux étoit néanmoins foiblement ſulphureuſe, & celle de l'Alkali fixe avoit une odeur urineuſe trés-dévelopée; (*n*) lorſque la chaleur commença à être

(*n*) En rapprochant ce que nous avons dit §. 6.18. 46. 49. il eſt aîſé de voir, que les différences des phénomènes dans les réſultats des expériences qui ne différent que par quelques circonſtances, nous conduiſent à des remarques intéreſſantes. Premiérement; nous avons vû que la combinaiſon de 24. parties de Chaux ſur une de Soufre §. 46. a donné à la voûte du Chapiteau un ſublimé que je ſaturai d'acide vitriolique, & que ce qui reſta ſur le filtré étant bien deſſéché, développa une odeur urineuſe dans l' huile de tartre.

2. Que

à être un peu plus grande, il s' éleva une matière blanche dans les deux cucurbites, elle ne fut pas considérable dans le foye de Soufre, mais elle le fut dans le mélange de la Chaux, & il résulta un soufre verd le long des parois de la cucurbite, pendant qu'il n'y avoit qu'une matière à peine, colorée dans le Chapiteau.

74. La tête-morte du foye de Soufre pésoit $\frac{2}{onc.}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{2}$ la liqueur urineuse pésoit environ $\frac{15}{8}$; ce qui manquoit au poids total doit être assigné à ce qui a été sublimé.

On voit cependant que l' union que contracte le Soufre avec l' Alkali fixe est très-considérable, puisqu' il s' en est sublimé une si petite quantité dans laquelle on reconnoit que la plus grande partie, doit être assignée à de l'Alkali fixe qui a été volatilisé.

75. Le caput mortuum de la Chaux pésoit $\frac{2}{onc.}\ \frac{1}{8}$ le phlegme sulphuré pésoit aussi $\frac{15}{gr.}$ d' où, il suit que le subli- mé,

2. Que la liqueur du foye de Soufre, combiné avec la Chaux, & décomposé par l' addition de l' huile de vitriol, donna de même des marques sensibles d' esprit volatil §. 49.
3. Que le foye de Soufre mêlé à la Chaux §. 6. donna non seulement de l' esprit; mais un peu de Sel volatil.
4. Que le foye de Soufre sans être diffous §. 73. donna de même de cet esprit, pendant que nous n' avons qu' une liqueur qui sentoit le foye de Soufre dans une pareille combinaison noyée dans l' eau §. 18.

Je ne m' arrêterai pas à des conjéctures vagues, mais je ferai seulement observer que l' odeur volatil urineuse qui s' est manifestée par l' addition de l' Alkali fixe §. 46. & 49. prouve qu' il y étoit enveloppé par un acide; or, la dissolution de l' or arrivée par le mélange de cette liqueur à l' eau-forte, semble prouver la présence de l' acide marin: Je ne veux cependant rien assûrer sur ceci, car n' ayant pas preparé l' eau-forte moi-même, peut-être n' en étoit-elle pas tout-à-fait exempte.

mé a été de $\frac{57}{gr.}$ l' odeur de ce ſublimé étoit celle d' ail brûlé.

76. Je ne négligerai pas de rendre compte ici d' un phénomène tout-à-fait ſingulier que j' ai obſervé, à l'occaſion où je m' étois propoſé de procéder ſur l' Alkali fixe, comme j' avois fait ſur la Chaux §. 51. c' eſt-à-dire, de chercher à le ſaturer de Soufre; quoique l' opération ait manqué par la rupture du Vaiſſeau, ce qui m' a empêché de faire fond ſur les produits de la ſublimation, & de ce qui étoit paſſé dans les récipiens, la tête-morte néanmoins me fournit des obſervations aſſez intéreſſantes, pour ne pas les paſſer ſous ſilence.

Je pris le caput mortuum de la diſtillation dont nous avons parlè §. 5. & dont le poids étoit de $\frac{5}{8}$ $\frac{1}{2}$ j'y ajoûtai $\frac{6}{8}$ de Soufre dans 6. répriſes différentes, ce qui revénoit à $\frac{1}{onc.}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{2}$ La tête-morte ne péſoit néanmoins que $\frac{2}{8}$ elle étoit d' un blanc éclatant, ſa gravité ſpécifique avoit conſidérablement diminué, elle étoit au reſte graſſe au toûcher, ſans gout & ſans odeur, enfin n' ayant aucun caractère de ſubſtance ſaline; j' en mêlai avec les acides, elle ne ſouffrit aucun changement; elle me parut ſe diſſoudre avec facilité dans l' huile de tartre, développant, en même temps, une forte odeur de phoſphore; la liqueur retirée par la diſtillation ſentoit de même cette odeur; mais elle paroiſſoit approcher beaucoup de celle de l' eſprit ſulphureux, & cela eſt aſſez naturel; car la cucurbite étant ſcellée, il ne pouvoit réſulter autre choſe, auſſi étoit-elle très-acide.

J' ai voulu diſſoudre le reſte qui ſe trouvoit être du poids de $\frac{111}{gr.}$ & il m' y a fallu $\frac{48}{onc.}$ d' eau; encore ſont-ils

reftés $\frac{6}{8}$ d'une matière qui fe précipitoit toujours au fond de l'eau, & en eft-il refté environ $\frac{30}{gr.}$ fur le filtre ce qui revient à $\frac{75}{gr.}$ de matière qui s'eft diffoute, je la fis évaporer à un feu très-lent, & j'en obtins un véritable Sel fulphureux qui s'eft criftallifé en aiguilles fort minces; ce Sel différoit de ceux dont nous avons parlé §. 18 en ce qu'outre à la criftallifation, il faifoit une grande effervefcence avec l'acide nitreux, pendant qu'on ne voyoit prefque pas de mouvement avec l'huile de vitriol; ce phénomene me parut bien fingulier, lorfque j'obfervai que très-peu d'eau-forte continuoit à faire effervefcence avec beaucoup de ce Sel mis à différentes reprifes, & qu'il fe précipitoit auffi tôt fous fa forme (*o*) criftalline. Après en avoir mis une quantitè confidérable, voyant que l'effervefcence ne difcontinuoit pas, je le fis évaporer jufqu'à ficcité, je le diffous enfuite & le mis de nouveau à évaporer, mais lentement, & il ne parut plus de criftaux, mais une efpéce de boüillie que j'eus beaucoup de peine à déffécher. Je mis ce Sel fur les charbons en feu, & il y eut très-peu de déflagration; il refta une matière très-blanche, farineufe qui reffembloit affez à la Chaux lavée, par ce que je pus en juger à la feule infpection.

77. Après avoir traité le Soufre avec la Chaux, la premiére idée qui me vint dans l'efprit, fut de voir fi, en la mêlant aux huiles, il fe feroit un déchet confidérable, & ce que je pourrois obferver dans la Chaux même.

Je

(*o*) Ce phénomène eft tout à fait digne d'obfervation, l'effervefcence n'avoit lieu qu'à la furface de l'eau-forte, le Sel fe faifoit par grumeaux, de blanc il devenoit jaune, & fe précipitoit enfuite au fond. Les vapeurs qui en exhaloient étoient celles de l'efprit de nitre; le Sel réfultant étoit pour la plus grande partie le même qu'auparavant; il y avoit néanmoins un peu du falpêtre.

Je pris à cet effet onc. 2 de Chaux-vive pilée, je la mêlai à $\frac{1}{\text{onc.}}$ de charbon pilé & passé par un tamis très-serré, je mis sur ce mélange $\frac{7}{8}$ d' huile d' olive, & après avoir mêlé exactement le tout je le mis dans une cucurbite de grés garnie d' un Chapiteau de verre bien lutté & avec son récipient à feu nud: je retirai d' abord une liqueur rougeâtre, ensuite un huile claire un peu empireumatique, & en troisième lieu une huile jaune tout figée comme l' huile commune est en hiver, elle sentoit fort l' empireume & restoit adhérante pour la plus grande partie aux parois du récipient, je filtrai la liqueur, & l' huile claire passa avec la première elles pésoient $\frac{3}{8}$; ayant ensuite rincé le récipient. Je trouvai que l' huile figée pésoit un demi gros, ce qu' ajoûté à $\frac{1}{8}$ pour celui qui étoit resté sur le filtre & aux $\frac{3}{8}$ des liqueurs filtrées, nous donne; $\frac{4}{8}$ $\frac{1}{2}$ donc il est resté $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$ qui n' ont pas passé en liqueur malgré la vivacité du feu, mais une partie, il y a apparence, s' est sublimée avec les parties de Chaux dont le Chapiteau étoit couvert, sauf à la voûte tout-à-fait.

78. Le deux liqueurs mêlées ensemble à l' huile de vitriol ne donnerent aucun signe de changement; elles procurérent des fumées blanches d' une odeur aromatique dans l' eau-forte; elles firent un peu d' effervescence avec l'Alkali fixe & rougîrent le papier bleu, ce qui prouve que la première étoit sensiblement acide.

79. Ce qui s' étoit sublimé étant d' une couleur rousse, & sentant l' odeur d' ail brûlé. Je cherchai à le détacher du verre pour l' avoir sous une forme concrête, mais il

ne me fut pas possible, tant la matière étoit grasse. Je pris le parti de la dissoudre dans l' eau, persuadé que ce devoit être une espéce de savon volatilisé par la violence du feu, elle s' est en effet entièrement dissoûte, je tentai cependant en vain d' en séparer l' huile par le moïen de l'acide vitriolique, il se fit par ce moïen un précipité très-léger & par floccons.

80. Le caput mortuum étoit jaunâtre farineux sous poudré d' un peu de charbon au centre de la surface supérieure, je l' arrosai d' eau sans qu' il y ait eû la moindre effervescence, & je vis se former comme des graisses qui ne ressembloient pas mal à de l'huile noire empireumatique qu' on tire de la suye, & comme le melange étoit trop liquide, j' ajoûtai $\frac{4}{8}$ de charbon ce qui endurcit aussi-tôt la matière; je la détrempai avec de nouvelle eau la pétrissant, & la soûmis à une nouvelle distillation.

81. Je retirai une liqueur claire un peu onctueuse qui ne faisoit aucune effervescence avec les acides, en faisoit sensiblement avec l' Alkali fixe & rougissoit un peu les bords du papier bleu; son odeur étoit celle du noir de fumée. Il se sublima une bande très-blanche au Chapiteau. Cette liqueur acidule & ce sublimé me firent naitre la pensée de cohober de nouvelle eau le caput mortuum, & de voir ce que j' en aurois; je disposai l' appareil, & ayant mis le même Chapiteau sans récipient, l' évaporation qui se fit pendant la nuit enleva tout le sublimé; je fis néanmoins la distillation, & l' eau que j' en retirai quoiqu' ayant la même odeur que la précédente ne donna aucun signe d'acide ni d' Alkali, il se forma cependant un nouveau sublimé qui ressembloit aux fumées que laisse la bonne poudre à canon sur la batterie des mousquets.

82. Pour m' assûrer si ces sublimés dépendent du phlogistique qui entre dans ces combinaisons, ou si en effet ce

sont

ſont des parties volatiles qui exiſtent dans la Chaux, je mêlai encore $\frac{4}{8}$ de charbon à cette tête-morte délayée dans l'eau & en même-tems je mis $\frac{2}{\text{onc.}}$ de charbon dans une autre cucurbite & $\frac{2}{\text{onc.}}$ de Chaux dans une troiſième pour être aſſûré des mes réſultats; il paroît même que j'aurois du commencer par-là; ſi en effet je n'avois pas regardé ceci comme un acceſſoire, ſans doute c'eut été ma marche; mais venons au fait: l'eau qui paſſa étoit rouſſeâtre onctueuſe & ſentoit l'odeur de la fumée du bois, d'ailleurs elle ne donna aucun ſigne d'acidité, il me parut à la verité qu'elle faiſoit quelque mouvement avec les acides, & que le papier bleu perdit quelque nuance de ſa couleur. Ce qui ſe ſublima au Chapiteau étoit ſi peu de choſe qu'il étoit à peine ſenſible.

83. La tête-morte étoit une matière farineuſe un peu jaunâtre, on n'y voyoit plus de veſtige de charbon quoique j'en euſſe mis un poids égal à celui de la Chaux ſans tenir compte de l'huile; ſon poids n'ètoit plus que d' $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{2}{8}$. Nous avons rémarqué §. 77. que la tête-morte après la première diſtillation devoit avoir augmenté de $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$ le poids de la Chaux employée qui étoit de $\frac{2}{\text{onc.}}$; or il faut de toute néceſſité qu'il ſe ſoit volatiliſé $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ gros, de ces ſubſtances par l'intermède de l'eau; il me paroît naturel d'aſſigner cet effet à l'eau (*p*) car nous voyons qu'elle

(*p*) C'eſt ici le dénoüement du doûte propoſé §. 28.

qu' elle étoit toujours chargée de couleur ; la premiere sur tout donnoit des marques sensibles d' un Sel acide: une partie doit donc avoir été confonduë ou dissoûte par l'eau même, l' autre qui sans doûte n' étoit pas la moins considérable est celle qui s' est sublimée au Chapiteau les trois premières fois sur tout.

Cette volatilisation de la Chaux ne me paroît pas néanmoins l' effet de l' art, & semble nous convaincre que l' eau seulement est le véhicule propre à dégager ces parties, qui existent telles dans la Chaux, sans que le phlogistique concoure à cet effet; si ce n' est qu' en s' engageant à la Chaux, l' eau qui est dans les corps dont il arrive la décomposition, par sa privation, puisse alors opérer (*q*) cette séparation des principes fixes, & volatils de la Chaux; en effet nous voyons que la quantité de matière qui se sublime va toujours en diminuant, qu' elle continuë à se faire sans addition de phlogistique, & par le seul intermède de la nouvelle eau qu' on ajoûte.

84. Je crois de pouvoir me dispenser d' examiner ce qui regarde les Sels nitreux avec la Chaux; ce sujet ayant été traitè avec plus d' étenduë par des Savans du premier ordre (*r*) sous un point de vüe, exige un temps plus long que celui que je pourrois y donner pour le présent. Il me suffit de rendre compte ici, que non seulement le

nitre

(*q*) Les résultats dont nous avons rendu compte §. 81. 82. semblent nous prouver qu' il arrive le changement en question ; car quelque soin que je me fusse donné pour priver la Chaux, & l'Alkali fixe de toute humidité, il est néanmoins passé un peu de liqueur, & il s'est formé à la voûte du Chapiteau un peu de sublimé blanc qui avoit les caractères de ceux dont nous avons parlé §. 8. & 23. la petite quantité cependant de ces produits nous a encore fait connoître que ce n' est qu' à la faveur de l'eau que le Soufre peut être décomposé.

(*r*) Outre les observations de *M. Du-Hamel*, on trouve dans le recüeil des ouvrages de *M. Pott* un excellent mémoire dans lequel il rectifie bien des choses, qui avoient été avancées par d' autres Savants.

nitre calcaire eſt moins inflammable que le ſalpêtre commun, mais que la Chaux ſulphurée ne fait point détonner ce Sel, & que la poudre à canon diſſoûte dans une eau de Chaux, cohobée pluſieurs fois ſur de nouvelle Chaux, perd beaucoup de ſon inflammabilité.

Le travail que l' Illuſtre M. Du-Hamel a fait ſur la Chaux, & ſur le Sel ammoniac a jetté un ſi grand jour ſur cette matière, qu' il ne reſte plus que quelques expériences à faire, & dont il en a tenté quelques unes lui-même.

85. Celle qui paroît être la plus naturelle, & en même temps déciſive eſt ſans doute celle, par laquelle il s' étoit propoſé de faire du Sel volatil en chargeant la Chaux de phlogiſtique; mais comme je n' ai pas vû la ſuite du travail dans laquelle il ſe propoſe la réſolution de ce problême, j' ai cherché s' il étoit poſſible de réuſſir par un (*t*) procédé différent de celui dont le Savant M. Baume' a fait uſage. Ce procédé quelqu' ingénieux, & quelqu' élégant qu' il ſoit, me paroît néanmoins ſouffrir des difficultés pour la réſolution du problême en queſtion: ceci ne doit cependant diminuer en rien le mérite du travail

(*s*) Comme il n' eſt pas poſſible de ſe procurer tous les éclairciſſemens néceſſaires pour développer les cauſes qui produiſent, ou qui concourent à un effet dans un ſujet quel conque, ſans chercher à déterminer s' il n' eſt produit que dans un cas particulier, où ſi c' eſt une loi conſtante dans des circonſtances déterminées (ce qui emporte la néceſſité de comparer le plus grand nombre de réſultats qu' il eſt poſſible, & qu' on obtient des variations de quelque circonſtance que l' on tâche de ſe ménager) on ne ſera pas ſurpris ſi, m' étant propoſé l' examen de quelques phénomènes qui réſultent de l' action de la Chaux ſur le Sel ammoniac, je donne une quantité d' expériences où la Chaux n' y entre pas, & qui ne doivent ſervir qu' à me faciliter le developpement de l' objet que je me ſuis propoſé. Je ne crois cependant pas de devoir négliger quelques obſervations, & quelques réfléxions qui ſe préſentent naturellement dans le cours de ces expériences, & je me fais un plaiſir de reconnoître que ce travail ne doit être regardé, dans cette partie, que comme une ſuite de celui du Savant *M. Du-Hamel*.

travail de M. BAUME'; car il eſt en effet parvenu à faire non ſeulement du Sel volatil en employant la Chaux pour intermède, mais il a encore tellement dénaturé la Chaux, qu' il dit lui-même l' avoir convertie en Alkali fixe; d' ailleurs ſon but n' a pas été d' examiner, ſi ce Sel volatil étoit produit entièrement par la décompoſition du Sel ammoniac, ou s' il ne s' en trouvoit pas une partie, qui fut produite par la matière animale avec laquelle il avoit phlogiſtiqué la Chaux; (*t*) mais ce fut pour réfuter un problême propoſé dans le journal de Médecine en Octobre 1762. dans lequel il eſt annoncé qu' on peut obtenir par le moïen de la Chaux-vive pure, l' Alkali volatil du Sel ammoniac ſous la forme fluide ou concrête, à la volonté de l' artiſte: on voit que c' en étoit aſſez pour démontrer l' *inſubſiſtance* de l' énoncé du problême; mais en eſt il de même pour la réſolution du problême propoſé par le Savant M. DU-HAMEL? Je crois qu' elle ſuffit pour démontrer, que tant que la Chaux ne change pas ſa nature, elle ne peut donner de Sel volatil.

86. Voici les difficultés qui me paroiſſent encore ſubſiſter dans leur entier.

Primo. La Chaux chargée d' une matière qui contienne du phlogiſtique, & dans laquelle on ne puiſſe ſoupçonner rien

(*t*) On pourroit objecter que par la violence du feu qui eſt neceſſaire pour cette opération, l' Alkali volatil auroit dû ſe diſſiper; mais il me paroît qu' on ne feroit pas bien fondé à penſer ainſi; car l' Alkali volatil n' exiſtant pas par lui-même dans ces matières, & n' étant qu' une production de l' art, il eſt naturel de croire que la Chaux qui eſt capable de le retenir avec tant de force dans la combinaiſon qu' on fait de cette ſubſtance avec le Sel ammoniac, doit de même empêcher la diſſipation qui s' en feroit en ſe combinant avec le Sel ammoniacal dont cet Alkali fait partie: il eſt vrai qu'on pourroit même nier la préſence ou la formation de ce Sel ammoniacal, comme n' étant pas demontrée, ſi l'on réfléchit cependant ſur les produits de l' analyſe du ſang, on verra que la choſe n' eſt pas tout-à-fait hors de vraiſemblance.

rien de volatil, donne-t-elle du Sel volatil avec le Sel ammoniac ?

Secundo. L' esprit volatil fait par la Chaux-vive, ou par les Chaux métalliques n' enleve-t-il rien de l' intermède ?

87. Voici les expériences que j' ai faites sur ce sujet: je commencerai par celles qui se rapportent à la première question.

Je mêlai aussi exactement qu' il me fut possible deux parties de charbon végétal sur une de Chaux, & j' en fis une pâte avec de l' huile d' olive, je la mis dans un creuset au feu, que je fis rougir à blanc aprèsque l' huile fut toute brûlée & réduite en charbon; je retirai alors cette Chaux, & la pétris avec de nouvelle huile, rémettant ce mélange dans un creuset au feu, je réïterai enfin trois fois cette opération.

88. La Chaux ainsi chargée des matières grasses, & exposée à un très-grand feu soûtenu pendant long tems se réduit en une poussière brûne séche qui ne fait plus d' effervescence avec l' eau; j' en pris $\frac{9}{8}$ que je mêlai avec $\frac{3}{8}$ de Sel ammoniac dans une cucurbite de verre sur un bain de sable; je commençai par un feu doux que j' ai poussé ensuite jusqu' à faire rougir le fond de la cucurbite: il passa un peu de liqueur foiblement urineuse dans le récipient, & le Sel ammoniac s' éléva le long des parois du verre, sans qu' il se soit fait le moindre atôme de Sel volatil: je décoëfai l' alembic, & je mis $\frac{9}{8}$ d'eau de pluïe ayant soin de faire dissoudre autant qu'il m' étoit possible le Sel qui s' étoit élevé, mais comme il en étoit passé dans le récipient même, & qu'il en étoit resté dans le bec du Chapiteau, je ne crois pas que la quantité dis-

soûte

ſoûte par l'eau put arriver à $\frac{2}{8}$; je commençai de même par un feu tout-à-fait doux, & lorſque la diſtillation fut achevée, je pouſſai le feu à la dernière violence & il ſe ſublima ſur la fin une petite quantité de matières blanches, qui s'eſt néanmoins réſoûte en liqueur en continuant l'opération; le Chapiteau ne ſentoit pas d'odeur urineuſe & tenoit plutôt une foible odeur de foye de Soufre, ce qui s'accorde parfaitement bien avec les expériences de M. MALOUIN; la liqueur étoit du véritable eſprit de Sel ammoniac qui tenoit cependant en diſſolution une certaine quantité du même Sel, ſavoir celui qui avoit paſſé dans le récipient à la première diſtillation, & ce qui m'a prouvé que ce n'étoit point un Sel volatil ce ſont les vapeurs blanches qui éxhaloient du mélange de cette liqueur avec les acides vitrioliques & nitreux dans le temps de l'efferveſcence; phénomène cependant qui n'a pas lieu lorſqu'on mêle à ces acides un eſprit de Sel ammoniac tiré de la Chaux qui ſoit exactement pur: (*u*) une autre indice qui a ſervi encore à me confirmer dans ce ſentiment, c'eſt le mouvement qui s'eſt excité dans cette liqueur par le mélange d'un peu de Sel de tartre, ce qui a augmenté conſidérablement la force de cet eſprit.

Un phénomène cependant tout-à-fait digne de remarque, c'eſt la couleur verte decidée que cet eſprit fait prendre au papier bleu, ce qui paroît encore confirmer ce que nous avons dit à la n. du §. 70.

89.

(*u*) Je dis un eſprit éxactement pur, car il arrive très-ſouvent que par un coup de feu trop vif du commencement de l'opération, d'une proportion peu convenable entre le Sel ammoniac & la Chaux, il paſſe du Sel dans le récipient; auſſi ne ſauroit on aſſez prendre de précautions.

89. N' ayant pû réuſſir par ce procédé à retirer du Sel volatil, je me doûtai que cela eut pû provenir d' une trop grande quantité de matières graſſes dont j' aurois impregnée la Chaux, & comme je n' étois pas dans le cas de chercher par un tâtonnement trop long à déterminer la quantité qui pourroit être néceſſaire pour procurer à la Chaux cette propriété étrangère à ſa nature ; je me flattai d' y parvenir de même en broyant enſemble du charbon à la Chaux, & en combinant enſuite ce mélange avec un tiers de ſon poids de Sel ammoniac.

90. Quoique je fuſſe aſſûré que le charbon ne peut pas par lui-même décompoſer le Sel ammoniac, pour m'en convaincre cependant par l'expérience, je fis auſſi un mélange de charbon & de ce Sel dont en effet je ne retirai rien.

Dans la première de ces combinaiſons, la Chaux, le charbon & le Sel ammoniac que je mis dans une cucurbite de terre étoient en égale quantité, & il me réſulta une liqueur inſipide & ſentant très-fort l'empireume avec du Sel concrêt à la voûte du Chapiteau, ce Sel n' étoit cependant que des fleurs de Sel ammoniac comme je m' en ſuis aſsûré en en mettant dans l' huile de vitriol avec l' huile de tartre, & la Chaux.

La liqueur quoiqu' inſipide & ſans odeur urineuſe donnoit les mêmes ſignes, de manière que je ne ſavois ſi le défaut de ſaveur & d' odeur urineuſe devoit être attribué à la ſurabondance des matières graſſes dont elle avoit les caractères les plus marqués, ſavoir l'onctuoſité, l' odeur très-empireumatique, la couleur rougeâtre, l'odeur ſulphureuſe qu' elle manifeſtoit avec l' huile de vitriol ; ou à ce que la plus grande partie du Sel ammoniac fut paſſée ſans ſe décompoſer en forme liquide : ce ſentiment me parut le plus probable ; mais avant toutes choſes je crus devoir réïtérer cette expérience en variant la doſe des matières.

91. Je retirai donc d'un mélange d'une partie de Chaux-vive ſur deux de charbon & une de Sel ammoniac une liqueur dont l'odeur approchoit très-fort de la précédente, & le Sel qui s'étoit ſublimé en plus grande quantité avoit un peu d'odeur urineuſe, à-peu-près comme les fleurs ammoniacales métalliques.

92. Je repaſſai une partie de ce Sel ſur deux parties de nouvelle Chaux-vive, mais les produits furent très-peu conſidérables; car ayant employé un gros de ces fleurs, je ne retirai que quelques grains de nouvelles fleurs de Sel ammoniac & quelques goûtes d'eſprit urineux, malgré que j'euſſe fait cette opération à feu nud dans une cucurbite de terre.

93. Quelque ſoin donc que je me ſois donné je n'ai pû parvenir à retirer du Sel volatil de la Chaux chargée de phlogiſtique tiré d'une ſubſtance végétale (*x*).

Je

(*x*) La Chaux ainſi chargée de phlogiſtique & ſaturée enſuite d'acide vitriolique, donne par la diſſolution, filtration & l'évaporation un Sel qui ne m'a pas paru différer de l'alun de plume & qu'on ne doit cependant pas confondre avec l'amiante comme fait *M. Lemery*, celui-ci eſt d'un goût aſtringent un peu douceâtre blanc comme de la neige, forme des végétations en bouquets par une évaporation moïenne, ſe bourſouffle ſur le feu, enfin il a tous les caractères de ce Sel qui eſt fort rare, & qui par-là peut devenir très-commun. Je ne ſache pas que perſonne ait encore donné la manière d'en faire, ni cherché à connoître ce qui entre dans ſa compoſition.

Je décompoſai cet alun par l'addition de l'eſprit volatil dans l'eſpérance de retirer un nitre, fondé ſur les expériences de *M Vallerius* & de *M. Pietſch*. Le premier diſant qu'il avoit retiré de ce Sel par la combinaiſon de l'acide vitriolique avec l'huile de l'eſprit de vin & le Sel de tartre, & rapportant en même tems que ce dernier en avoit fait avec du vitriol, de l'urine putrefiée & de la Chaux: or comme il ſuivroit de ces expériences que le nitre ne feroit que l'acide vitriolique dénaturé par l'Alkali volatil qui ſe développe par la putréfaction, ou ſelon le premier que ce même acide chargé de matière phlogiſtique eſt combiné à un Alkali fixe; j'ai voulu voir ſi cette combinaiſon m'en fourniroit, mais je n'ai retiré que du Sel ammoniacal ſecret.

Je ne prétends pas dire pour cela que la chofe ne foit pas poffible; fi le problême de M. BAUME' eft foluble dans cette circonftance, on voit qu' il ne rencontre plus de difficultés; mais la réfolution du problême propofé par ce Savant ne feroit-elle pas plus facile, fi on employoit la pierre à Chaux, la craye, ou toute autre fubftance capable de fe convertir en Chaux, mais qni n'eut pas encore fouffert l' action du feu, au lieu de fe fervir de la Chaux-vive?

Comme c' eft une queftion qui ne peut être décidée que par le fait, je me difpenferai d' expofer les raifons qui me déterminent à penfer qu' il y ait un plus grand dégré de probabilité & qui m' ont engagé à propofer cette conjecture.

Les réfultats des dernières expériences & les réfléxions que m' ont fourni d' autres qui font très-connuës fur le Sel ammoniac, conjointement à celles du Savant M. DU-HAMEL, m' ont engagé à en faire de nouvelles dont je vais rendre compte.

Pour plus grande clarté, je commencerai par expofer quelques corollaires que cet Illuftre PHYSICIEN a tirés de fon travail rempli de fagacité.

„ I.° Toutes les fois que l' urineux ammoniac paroît „ dans la diftillation en forme concrête, c' eft qu' il a em- „ portée avec lui une portion concrête de l' intermède „ avec lequel on l'a diftillé.

„ II.° Toutes les fois qu' on a cet urineux en „ forme d' efprit, c'eft qu' il a paffé dans la diftillation „ avec l' eau qui étoit contenuë dans les matières, & „ qu' au lieu d' être joint à un fubftance folide qui lui „ donne du corps, il l'eft à un liquide qui le fait pa- „ roître fous cette forme qui lui eft propre.

Après les expériences que nous venons de rapporter, tout cela ne fouffre plus de difficulté; mais pourquoi la

craye paſſe-t-elle avec l'urineux dans la diſtillation, & que la Chaux reſiſte ſi puiſſament à ces effets?

94. Il nous eſt encore moins difficile de répondre à ces difficultés après ce que nous avons dit de la Chaux §. 83.; car nous avons démontré que la partie volatile de cette ſubſtance ne peut en être dégagée qu'à la faveur de l'eau qu'on y mêle & dont il eſt probable, comme nous le verrons dans la ſuite, que dépend la décompoſition du Sel ammoniac; mais comme elle n'eſt pas en grande quantité, il eſt naturel de penſer que l'eau qui lui ſert de véchicule en quelque petite quantité qu'elle ſoit elle même, peut toujours diſſoudre le Sel volatil qui ſe dégage par ce moïen (*y*).

95. L'éxamen des différences qu'on reconnoît dans pluſienrs opérations entre l'eſprit volatil tiré par la Chaux & celui que l'on obtient avec les Alkalis fixes, m'avoit fait penſer auſſi que l'eſprit urineux fait avec la Chaux n'emportoit point de ſon intermède concrêt; je crus cependant devoir m'en aſsûrer, & je fis dans ce deſſein l'expérience ſuivante.

Je diſtillai du Sel ammoniac avec de la Chaux éteinte à l'air dans une cucurbite de terre à laquelle j'avois adapté un Chapiteau ouvert à ſa partie ſupérieure, pour qu'il put avoir la communication avec un ſecond Chapiteau de verre que j'avois ſoigneuſement lutté au premier qui étoit de terre garni de ſon réfrigératoire, au moïen du quel, en rempliſſant une grande partie de ſa cavité, je pouvois mettre du feu autour du ſecond Chapiteau; je décompoſai de cette manière l'eſprit volatil en trois parties, c'eſt-à-dire en une liqueur très-limpide qui ſentoit un peu l'urineux & qui étoit paſſée par le bec du premier Cha-

(*y*) Ceci ne ſuffit pas encore pour rendre raiſon de ce fait, mais nous en trouverons le dénoüement par la ſuite.

Chapiteau. Une couche de terre blanche inſipide, ſans aucune odeur urineuſe & auſſi mince qu' une feüille de papier laquelle adhéroit fortement au verre, & formoit comme une zone qui tenoit du rebord du Chapiteau juſqu' au commencement de la voûte. Une ſeconde liqueur très-rouſſe & ſans odeur qui avoit paſſé par le bec du ſecond récipient.

96. La première qui étoit limpide ne paroiſſoit pas augmenter ſon odeur urineuſe par l'addition de l'Alkali fixe, au contraire la ſeconde développoit cette odeur avec beaucoup de force en y mêlant du Sel de tartre ou de la Chaux.

97. La matière blanche dont je viens de parler ne me paroît être autre choſe que la partie terreuſe du Sel ſélénitique de la Chaux qui n'eſt que la crême de la Chaux même, laquelle eſt la véritable partie volatile dont nous avons parlé; en effet, j' en ai retiré du Sel ſélénitique en y ajoûtant un peu d' huile de vitriol affoibli par beaucoup d' eau, & il s' eſt même reproduit une croûte criſtalline un peu opaque & aſſez ſemblable à la crême de Chaux à la ſurface de la liqueur; l' odeur fort-urineuſe qui ſe développa de la ſeconde liqueur par le mélange de la Chaux ou de l' Alkali fixe, ſemble nous prouver la préſence d' un acide qui formoit un Sel ammoniacal; & je penſe que c' eſt le même qui étoit auparavant engagé à la terre en queſtion, & qui formoit avec elle la ſélénite; pour me convaincre de la verité de cette opinion, je fis une diſtillation d' une partie de Sel ammoniac ſur deux parties de crême & d' eau de Chaux que j' avois fait évaporer à ſiccité, mais n' ayant obtenu qu' une très-petite quantité de liqueur urineuſe le Sel ammoniac s'étant ſublimé, je decoëffai l' alembic, & je mis une quantité aſſez conſidérable d' eau, ayant eû ſoin de diſſoudre autant qu' il m'étoit poſſible le Sel ammoniac: j' en fis enſuite

ſuite

ſuite la diſtillation, & j' obtins une liqueur foiblement urineuſe, un Sel par floccons à l' orifice de la cucurbite & au bord du Chapiteau; ce Sel me parut ne ſouffrir aucune altération de la part de l' eau-forte, quoiqu' il fît effervefcence avec l'huile de vitriol; il ne m' a pas été poſſible de bien conſtater ſi ce Sel étoit réellement un Sel ammoniacal vitriolique, je ſuis cependant très-porté à le croire tel; la tête-morte étoit d' ailleurs un Sel ammoniac fixe très-déliqueſcent qui ſe bourſouffloit & qui ſe fondoit au feu en répandant des vapeurs fort épaiſſes.

98. Cette expérience m' engagea naturellement à examiner ce qui réſulte du mélange du Sel ammoniac avec la Chaux bien lavée; je pris pour cela une quantité de Chaux éteinte, je la lavai douze fois dans de l' eau toujours nouvelle & toujours boüillante, je la fis enſuite deſſécher ſur un ſupport de mouffle & j' en mêlai $\frac{3}{\text{onc.}}$ avec $\frac{1}{\text{onc.}}$ de Sel ammoniac; je retirai par la diſtillation environ $\frac{3}{8}$ d' eſprit volatil, & il ſe ſublima à la voûte un Sel très-blanc qui avoit de l' odeur urineuſe; comme il y en avoit cependant très-peu, je ne pus pas m' aſſûrer s' il ne ſe trouvoit pas encore un peu de Sel ammoniac avec l' Alkali urineux: ce qui cependant m' a donné lieu de former ce doûte, c' eſt la grande quantité de vapeurs blanches & ambrées qu' il répandit en y mêlant de l'huile de vitriol; M. DU-HAMEL pourtant qui avoit déja fait cette expérience avec quelque changement dans les circonſtances, dit que le peu de Sel qu' il en retira étoit de l' Alkali volatil; ce qui ſuffit pour tenir en ſuſpend mon jugement ſur une expérience que je n' ai pû répéter & qui doit être faite plus en grand. Je me contenterai pour le préſent de faire remarquer que la tête-morte avoit été fonduë; ſa couleur étoit d' un roux clair comme

ſont

ſont les briques avant d' avoir ſouffert l' action du feu; ſa ſaveur étoit un peu douceâtre & avoit quelque peu d' aſtringent ; elle attiroit l' humidité à-peu-près comme le Sel marin qu'on fait avec la craye, mais beaucoup moins que le Sel ammoniac fixe.

99. Ayant reconnu que dans toutes les décompoſitions du Sel ammoniac pour en tirer l' urineux volatil, il ſe fait un enlévement d' une partie de l' intermède concrêt ; je me déterminai à reprendre mon travail de plus loin, en commençant par l' éxamen des effets qui arrivent au Sel ammoniac ſans intermède par le feu différement adminiſtré, & enſuite par ceux que préſente la combinaiſon de ce Sel avec d' autres matières.

EXPÉRIENCE PREMIÈRE.

Diſtillation du Sel ammoniac à feu nud.

Sel ammoniac fluor.

100 UNE once $\frac{1}{2}$ de Sel ammoniac en gâteau dans une cucurbite de terre, garnie d'un Chapiteau de verre, me donna à un feu d' abord aſſez vif $\frac{1}{onc.}$ $\frac{1}{8}$ de liqueur teinte un peu en jaune, foiblement ſalée & amère, développant ſur la langue un goût lixiviel qui dégéneroit en un goût urineux : ſon odeur étoit un peu empireumatique, elle donna des vapeurs blanches & épaiſſes en grande quantité avec l' huile de vitriol, s' échauffa & boüillonna conſidérablement; elle manifeſta une forte odeur urineuſe avec la Chaux-vive en quelque petite quantité que je l' euſſe miſe, pendant qu' il falloit beaucoup d'Alkali fixe pour lui faire développer foiblement cette odeur.

Il

Il eſt clair que cette liqueur n' eſt (z) que du Sel ammoniac diſſoût dans beaucoup d' eau.

II.E

(z) Je voulus m' aſſûrer ſi cette réſolution en liqueur dépendoit de ce que le phlogiſtique eut abandonné cette partie du Sel pour s' unir plus intimément à la partie du Sel ammoniac qui ne paſſe pas en liqueur, ou ſi c' étoit ſeulement à cauſe de la ſurabondance de l'eau dont ce Sel eſt chargé; j' en mis à cet effet $\frac{7}{8}$ avec $\frac{1}{\text{onc.}}$ de noir de fumée, & j'en fis la diſtillation au bain de ſable. Il me vint premièrement une liqueur un peu opaque qui donnoit quelques fumées avec l' huile de vitriol, & ne donnoit d' autre odeur avec la Chaux & l' Alkali fixe que l' empireumatique qu' elle avoit naturellement; il ſe forma enſuite une petite quantité d'une ſubſtance blanche qui reſſembloit aſſez à du Sel ammoniac & qui fut détruite par une huile jaune très-empireumatique qui s' éleva après & qui paſſa dans le récipient: comme j' ai fait cette opération au bain de ſable, je n'ai pas pû pouſſer la tête-morte à un feu ſuffiſant pour décider ſi après l' huile noire je n' obtiendrois pas du véritable Sel ammoniac: mais comme d' autre part l' Alkali volatil qui ſe trouve dans le noir de fumée pouvoit cauſer des altérations à ce produit, je crus inutile de pouſſer plus loin l' opération, d'autant plus que ces premiers réſultats ſuffiſoient pour me faire connoître que la ſurabondance d' eau eſt la cauſe principale de la liquidité du Sel ammoniac dans le procédé dont nous avons rendu compte; que ce Sel ammoniac fluor n'eſt cependant plus auſſi chargé de matière phlogiſtique que lorſqu' il eſt ſous la forme concrête; & cela me paroît d' autant plus ſûr que les fleurs de Sel ammoniac qui ſe ſubliment, après que la liqueur eſt entierément paſſée, ſont d'une couleur jaune très-foncée, & les dernières même ſont rouges.

II.e EXPERIENCE.

Diftillation du Sel ammoniac au bain de fable.

Fleurs de Sel ammoniac.

101. JE fis en même tems cette opération dans une cucurbite de verre au bain de fable, ayant pris la précaution de bien étendre le Sel ammoniac en lui faifant occuper tout le fond de la cucurbite, mais je ne retirai que 5 à 6 goûtes de liqueur laquelle étoit confidérablement urineufe; le refte du Sel fe fublima, n' étant refté au fond du vaiffeau qu' un peu de matière noire; je remarquai cependant que cette fublimation peut être divifée en trois parties; la première qui fe fait à un feu tout-à-fait moderé, & les fleurs en font blanches; la feconde qui éxige un plus grand dégré de feu, & elle fe fait principalement au parois de la cucurbite, y adhére fortement & paroît prefque avoir fouffert la fufion; la troifième qui n' a lieu qu' après un dégré de chaleur beaucoup plus grand & long-tems continué; on obtient par celle-ci des fleurs d' un jaune très-foncé.

Nous déduirons de ces deux expériences. I.° Que toutes les fois que le Sel ammoniac entre en fufion avant que de fe fublimer, il doit paffer pour la plus grande partie en liqueur.

2.° Que la différence dans l' adminiftration du feu, foit par rapport à fa vivacité & fa force abfoluë, que rélativement aux Vaiffaux dont on fait ufage pour les opérations, apporte une différence totale dans les réfultats.

III.e EXPÉRIENCE.

Distillation du Sel ammoniac, qui n'a pas passé en liqueur dans la première expérience, avec la Chaux-vive.

Esprit volatil caustique ; Sel sublimé très-blanc.

102. SUR ce qui est resté dans la cucurbite de la première expérience §. 100. je mis environ deux onces de Chaux-vive, & après avoir lutté le Chapiteau & le récipient, j'en fis la distillation dont je retirai un peu plus de $\frac{3}{8}$ d'esprit très-pénétrant, & d'une couleur jaune avec quelques grains d'un sublimé très-blanc. La tête-morte avoit une saveur très-picquante, elle étoit d'une couleur rousseâtre & avoit été fonduë.

103. Le résultat dont je viens de rendre compte, m'engagea à éxaminer si en enlevant seulement au Sel ammoniac une partie de l'eau qu'il rétient toujours en grande quantité, on peut parvenir à le décomposer, & sous quelle forme l'Alkali volatil se présente.

Nous remarquerons en attendant. I.° Que le Sel ammoniac, qui ne souffre aucune décomposition avec la Chaux-vive comme l'a très-bien observé le Savant M. Du-Hamel, peut cependant être décomposé, au moins en partie, lorsqu'il est ainsi privé d'une grande partie de son eau. 2.° Qu'on doit nécessairement convenir qu'il emporte des parties de l'intermède fixe ce qui confirme ce que j'ai dit dans les §§. précédents.

IV.e

IV.E EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac légerement calciné avec la Chaux-vive.

Eſprit volatil cauſtique ſublimé en effloreſcence ſentant l'urineux.

104. SUR cette idée je pris $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ de Sel ammoniac en gâteau, & l'ayant mis dans un creuſet au au feu, je le réduiſis à $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$ & le mêlai à $\frac{3}{\text{onc.}}$ de de Chaux-vive que je fis encore deſſécher à un feu violent, (*aa*) j'obtins par la diſtillation environ $\frac{6}{8}$ de liqueur d'une force extrêmément pénétrante & d'une couleur jaune ſemblable à celle que l'on retire par les ſubſtances métalliques. On voyoit au ſurplus dans la cucurbite & dans le Chapiteau une eſpéce d'effloreſcence terne & acide qui ſentoit un peu l'urineux en la paſſant entre les doigts. La tête-morte péſoit $\frac{3}{\text{onc.}}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{24}{\text{gr.}}$, elle étoit ſpongieuſe paroiſſant comme criblée, rouſſeâtre, très-picquante attirant beaucoup l'humidité, elle ſembloit au reſte avoir été fonduë de même que la cucurbite. (*)

(*aa*) Quoique la Chaux n'eut pas encore attiré l'humidité de l'air, & que j'euſſe eû la précaution de choiſir une groſſe maſſe dont j'avois ôté une couche aſſez conſidérable. Je crûs devoir lui faire eſſuïer cette opération pour être toujours plus aſſûré du fait.

(*) Cette expérience découle naturellement de la précedente & lui ſert de confirmation.

V.e EXPÉRIENCE.

Répétition de la précédente avec du Sel ammoniac privé d' une plus grande quantité d' eau.

105. CEtte ſinguliére décompoſition me porta à chercher, ſi en calcinant davantage le Sel ammoniac, je pourrois obtenir du Sel volatil au lieu d' eſprit.

Je réduiſis à cet effet $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{1}{2}$ de ce Sel à $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{2}$, je le mêlai avec trois onces de Chaux-vive qui avoit été expoſée à un grand feu pendant plus d' une heure; j' obtins par la diſtillation de ce mélange près de $\frac{4}{8}$ d' eſprit urineux très-pénétrant & d' une couleur jaune comme le précédent avec des taches blanches comme celles dont j' ai parlé précédement; & quoiqu' elles fuſſent en plus grande quantité, je n' en pus pas recüeillir aſſez pour les éxaminer.

VI.e EXPÉRIENCE.

Addition de l' eau enlevée au Sel ammoniac par la calcination.

Eſprit volatil.

106. JE voulus au reſte voir ſi en rendant à la tête-morte & à cette ſubſtance blanche la quantité d' eau à-peu-près que j' avois enlevée au Sel ammoniac, je retirerois encore une quantité conſidérable d' eſprit volatil, ou au moins toute l' eau que j' ajoûtois, & comme je ne doûtois pas qu' il ne ſe fut diſſipé de l' Alkali volatil & de l' acide marin dans la calcination, j' ai crû

ne devoir employer qu' une plus petite quantité d' eau, c' eſt pourquoi je n' en mis que $\frac{2}{8}$, & après avoir ſcellé avec ſoin les vaiſſeaux, j'en fis la diſtillation en commençant par un feu doux & le pouſſant ſur la fin juſqu' à faire fondre la partie inférieure de la cucurbite, mais je ne retirai plus qu' $\frac{1}{8}$ d' eſprit.

Voici un réſultat tout-à-fait ſingulier; nous avons obſervé §. 102. que la quantité d' eſprit dans cette expérience étoit un peu plus grande que celle du Sel ammoniac qui reſtoit dans la tête-morte de l' expérience §. 100., & qu' au ſurplus il ſe ſublima quelques grains d' une matière blanche; nous voyons par celle-ci que bien loin d'excéder la quantité d' eau nouvellement ajoûtée, nous n' en avons pû retirer que la moitié; mais il eſt bon d' obſerver que malgré que le fond de ma cucurbite ait été fondu, le dégré de feu néanmoins n'aura pas été auſſi conſidérable que celui qu' a ſouffert l'autre cucurbite qui étoit de terre, & à feu nud.

Quant à l' augmentation du poids, elle doit être attribuée aux parties de Chaux qui ont été enlevées dans l'opération ce qui ne paroit pas avoir beſoin de plus grande démonſtration, les réſultats des expériences dont j' ai rendu compte ci-devant me paroiſſant plus que ſuffiſantes pour nous convaincre de cette verité.

VII.e EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac avec le Sel ammoniac fixe.

Eſprit volatil ſublimé très-blanc.

107. JE fus curieux d'obſerver ce que le Sel ammoniac fixe donneroit avec du nouveau Sel ammoniac. Je mêlai à cette fin $\frac{4}{\text{onc.}}\frac{1}{2}$ du Sel ammoniac fixe réſultant des expériences 104. & 105 avec $\frac{1}{\text{onc.}}\frac{1}{2}$ de Sel ammoniac ſans être privé d'eau, & j'obtins environ $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{2}{8}\frac{1}{2}$ d'eſprit urineux $\frac{1}{8}$ d'un ſublimé très-blanc, & $\frac{16}{\text{gr.}}$ d'une matière de même ſublimée qui étoit extrêmément graſſe & qui adhéroit très-fort au verre, l'ayant détachée avec un pinceau, elle étoit d'un gris cendré; étant brûlée ſur du papier à la chandelle, elle donna un couleur verte à la flamme; ſon goût étoit très-ſalé, & très-picquant ſur la langue, moins cependant que celle du ſublimé blanc qui communiquoit de même la couleur verte à la flamme. La tête-morte péſoit $\frac{4}{\text{onc.}}$ & un peu plus de $\frac{4}{8}$ elle attiroit très-fort l'humidité, ſa couleur étoit rouſſeâtre, ſa ſaveur étoit (*bb*) brûlante, ſa texture enfin friable entre les doigts; ſon poids ne fut pas conſidérablement augmenté.

108. Mon plan étant celui de rapprocher les différens phénomènes que préſentent les décompoſitions du Sel ammoniac faites par différens intermèdes, je ne ſaurois négliger

(*bb*) Cette ſubſtance me paroît devoir être miſe au nombre des cauſtiques plus puiſſants.

gligér de rendre compte de ce que j'ai observé de plus remarquable dans la répétition que j'ai faite des opérations d'ailleurs trés-connuës.

VIII.^E EXPÉRIENCE.

Distillation du Sel ammoniac avec la grenaille de plomb.

Esprit volatil caustique.

Plomb corné.

JE pris $\frac{2}{\text{onc.}}$ de plomb grenaillé que je mis dans une cucurbite de verre avec $\frac{6}{8}$ de Sel ammoniac: le feu fut administré dans le commencement avec beaucoup de précaution, pour que le Sel ammoniac ne se sublima point, & fut poussé sur la fin avec beaucoup de vivacité, de manière que le fond de la cucurbite s'étoit presque fondu.

Il passa dans le récipient un esprit jaune dès-plus pénétrants & dont la force étoit encore augmentée par l'addition du Sel de tartre, ce qui me fit conjecturer qu'il étoit passé un peu de Sel ammoniac fluor avec l'esprit urineux; j'en fus d'autant plus convainçu que cet esprit faisoit une violente effervescence & s'échauffoit très-fort pas le mélange de l'huile de vitriol, répandant dans ce tems beaucoup de vapeurs blanches qui avoient une forte odeur d'esprit de Sel; il se sublima ensuite des fleurs de Sel ammoniac d'un jaune foncé qui contenoient un peu de plomb: les deux tiers environ de la tête-morte étoient convertis en plomb corné, & ce plomb corné en occupoit la partie supérieure, & adhéroit comme des scories à la partie inférieure qui étoit formée par le plomb qui avoit été fondu & que l'acide n'avoit point attaquée.

IX.^e EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac avec le plomb & la Chaux-vive.

Eſprit volatil cauſtique.

109. DE la diſtillation d' $\frac{1}{onc.}\ \frac{1}{2}$ de plomb avec $\frac{1}{onc.}\frac{1}{2}$ de Chaux-vive, & $\frac{9}{8}$ de Sel ammoniac je retirai de même un eſprit cauſtique très-pénétrant & d' une couleur jaune ; cet eſprit faiſoit efferveſcence avec l' huile de vitriol & reſſembloit parfaitement en tout au précédent. La tête-morte cependant parut m' offrir quelque différence. I.° En ce que le plomb étoit preſque tout converti en plomb corné. 2.° Que la Chaux ſembloit n' avoir pas ſouffert de changemens ſenſibles ; pour m' en aſſûrer d'avantage, j' en ſéparai une partie au moïen d' un tamis fort ſerré ; je la mis dans un creuſet au feu, & je ne remarquai aucune des vapeurs que le Sel ammoniac fixe donne abondament dans cette opération ; après cela il me parut qu' elle n' attiroit pas l' humidité de l'air avec plus de force que ne fait la Chaux-vive commune, & boüillonnoit, ou du moins faiſoit un ſifflement en entrant dans l' eau.

Les différences remarquables qui ſont entre la tête-morte de l' expérience précédente & de celle-ci, me font conjecturer qu' il faut que l'acide marin ſoit délayé dans beaucoup d' eau pour attaquer le plomb, & que c' eſt pour (cc) cette

(cc) Je ne prétends pas que cette ſeule cauſe facilite la diſſolution du plomb j'ai même raiſon de penſer que cet effet n'a pas lieu lorſqu'elle eſt toute ſeule, mais que dans le cas où il ſe trouve de l' Alkali volatil combiné à cet acide, ce mélange exerce ſon action ſur le plomb, tant que ces deux ſubſtances ne ſont point dans un certain dégré de concentration.

cette raiſon que dans l' expérience précédente il n' y a eû qu' une partie du plomb convertie en plomb corné, pendant qu' outre à du Sel ammoniac fluor il s' eſt encore élevé une quantité conſidérable de fleurs de Sel ammoniac ; ces deux effets n' ayant lieu probablement que lorſque l' acide & l' Alkali volatil ſont dans leur plus grand dégré de concentration.

2.° Que la Chaux ſert à retenir une partie de l' acide du Sel ammoniac qui s' échapperoit dans le commencement de l' opération avec l' Alkali volatil.

3.° Que l' acide marin affoibli par beaucoup d' eau a plus d' affinité avec le plomb qu' avec la Chaux (*dd*).

(*dd*) Cette opération a fait le ſujet d'une grande queſtion entre les Célébres *M. Geoffroy, & Neumann.* Ce dernier ayant remarqué que le Chimiſte François avoit placé les ſubſtances métalliques, au deſſous des Sels, comme ayant un moindre rapport avec les acides, dans la table des affinités, lui fit obſerver que cette régle ſouffroit des exceptions, en lui donnant pour exemple la décompoſition du Sel ammoniac par les ſubſtances métalliques; mais *M. Geoffroi* n' attribuant cette décompoſition qu' à l' altération conſidérable que ces ſubſtances ſouffrent en paſſant à l'état de Chaux, faiſoit rentrer cette exception dans la loi générale, en ſuppoſant que les Chaux metalliques contiennent quelque peu d' Alkali fixe qui ſe développe, ou qui ſe forme dans la calcination. *M. Neumann* répondit que ſi cela eut été vrai, on n'auroit pas dû obtenir de l' eſprit urineux par le minium bien lavé dans de l'eau boüillante & deſſeché, comme l'on l'obtenoit de même en l' employant ſans aucune préparation, & pour couper court à toute ſorte de diſpute, il lui fit voir qu'on pouvoit ſubſtituer avec un égal ſuccès le plomb granulé, & ſous la forme métallique ; je ne ſache pas que *M. Geoffroy* ait répondu depuis au Savant Chimiſte du Roy de Pruſſe, la preuve étant ſans replique, mais ſi cet Illuſtre Phyſicien eut cherché à s' éclaircir plus particuliérement ſur cette exception en examinant avec ſoin les produits qu'on obtient par ces opérations, il eut ſans doûte vû qu' elle n' avoit lieu que dans le cas particulier de l' acide du Sel ammoniac, qui non ſeulement eſt très-foible, mais qui ſe trouve aſſocié à une grande quantité de matiére phlogiſtique ; ce qui, peut-être, ne contribuë pas peu à la déſunion qui ſe fait de cet acide d'avec l' Alkali volatil, & tout au moins auroit-il reconnu que la table qu' il a dreſſée ne pouvoit pas être exactement vraïe dans tous les

X.^e EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac avec le plomb, & le Sel de tartre.

Eſprit urineux.

Sel volatil.

110. COmme le Sel ammoniac décompoſé par le plomb ne donne que de l'eſprit urineux, & que d'autre part les Alkalis fixes donnent très-peu d' eſprit, & beaucoup de Sel volatil; je me propoſai d' obſerver les réſultats qui me viendroient de la combinaiſon du plomb avec du Sel de potaſſe, & je crus en même tems de pouvoir m' aſsûrer, ſi dans cette opération l' acide marin attaque par préférence l' Alkali fixe comme il ſeroit aſſez naturel: pour n' avoir rien à me reprocher, je crus devoir emploïer une quantité de Sel ammoniac capable ſeulement de ſaturer une quantité donnée de plomb dans la décompoſition qu' il ſouffriroit; c' eſt pour cette raiſon que je diſtillai une once de Sel ammoniac ſur $\frac{3}{\text{onc.}}$ de plomb, & $\frac{3}{\text{onc.}}$ de Sel de potaſſe.

Je

les cas, & qu' il auroit dû en former deux, comme le remarque fort-bien *M. Baumé*, ſavoir une qui exprima tous les rapports des ſubſtances dans les opérations qui ſe font par la voye humide, & une autre dans laquelle fuſſent marqués les rapports en opérant par la voye ſéche; ou pour m' exprimer d' une manière plus générale une table qui déſigna le plus ou le moins d'aptitude que les ſubſtances ont à s'unir, ſuivant que par la combinaiſon des principes ſecondaires, le nouveau compoſé approche plus ou moins du rapport des élémens ou des véritables principes qui conſtituent des compoſés plus ou moins aîſés à être détruits. La Chimie ne ſeroit plus alors une ſcience pûrement expérimentale, elle pourroit fort-bien être ſujette au calcul avec autant d' exactitude que le ſont les ſciences phyſico-mécaniques, l' aſtronomie &c.

Je dois cependant avertir que faute de plomb granulé, j' employai de petites lames minces, & que le Sel de potasse n' étoit pas bien pur, deux circonstances qui certainement pourroient causer des variations, & c' est pour cela que j' en avertis.

Je retirai $\frac{1}{8}$ $\frac{15}{gr.}$ d' esprit volatil très-limpide qui faisoit une violente effervescence avec l' huile de vitriol, & répandoit des fumées blanches & épaisses; rougissoit un peu le papier bleu pendant qu' il étoit humide, & qu' il devenoit blanc en se desséchant; cet esprit contenoit $\frac{54}{gr.}$ d' un Sel volatil cristallisé en aiguilles très-déliées. Une partie du Sel ammoniac se sublima, & il en resta une petite quantité en forme d' efflorescence sur la tête-morte, laquelle étoit d' une couleur brûne parsemée de points d' une très-belle couleur bleüe comme l' azur de Berlin, une partie du plomb paroissoit réduite en litharge, le reste étoit fondu avec toute la masse, & présentoit différentes couleurs dans la partie inférieure qui étoit tout-à-fait adhérante au verre, & sembloit ne faire qu' un tout avec lui; je me déterminai sur cela à remettre dans la cucurbite tout le Sel ammoniac qui n' avoit point été décomposé avec $\frac{3}{onc.}$ $\frac{1}{2}$ d' eau commune sur la tête-morte, & à faire ainsi une nouvelle distillation; je retirai par ce moïen $\frac{2}{onc.}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ d' esprit de Sel ammoniac un peu plus foible que le précédent, mais il ne se fit point de Sel volatil, ce qui d' ailleurs est assez naturel, vû que la quantité d' eau nouvellement ajoûtée n' a passé qu' en partie dans le récipient, le reste ayant été absorbé & retenu par la tête-morte, laquelle, de brûne qu' elle étoit, passa à un blanc éclatant, sa saveur étoit salée & amère

comme l' eſt ordinairement le Sel fébrifuge; la partie du plomb qui touchoit le fond de la cucurbite n' a ſouffert d' autre altération que la fuſion, & une petite partie de celui qui étoit mêlé à l' Alkali fixe vers la ſurface ſupérieure avoit changé légerement ſa couleur, le reſte ne paroiſſoit avoir ſouffert aucun changement, & n' étoit pas même entré en fuſion.

XI.E EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac avec la Chaux de cuivre; ou avec le fer.

Eſprit volatil.

Ens veneris.

ou

Ens Martis.

111. LA diſtillation d' $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ de Sel ammoniac avec $\frac{4}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ de vitriol de cuivre bien calciné m' a auſſi donné un eſprit urineux jaune très-pénétrant & cauſtique; des fleurs de Sel ammoniac teintes en jaune, & un peu en verd lorſque j' employois du Sel ammoniac impur au lieu de fleurs. La tête-morte étoit une matière rouſſe, un peu déliqueſcente & d' un goût ſtiptique.

La limaille de fer roüillée ou non me donna à-peu-près les mêmes réſultats, la tête-morte ſeulement me parut différer conſidérablement, en ce qu' elle contenoit plus d' acide, ſon goût étoit beaucoup plus âpre, ſe gonfloit davan-

davantage & ſe réſolvoit entièrement en une liqueur épaiſſe & jaunâtre.

L'eſprit urineux qu'on retire par l'intermède des Chaux ou des ſubſtances métalliques ſous leur forme naturelle donne toujours des marques aſſûrées de la préſence de l'acide marin, quelque ſoit le rapport qu'on ait obſervé entre le Sel ammoniac & l'intermède ; il en eſt de même de l'opération du Sel ammoniac privé d'une partie de ſon eau, avec la Chaux, ce qui prouve que la décompoſition n'eſt pas complette.

112. Si nous réflechiſſons maintenant ſur toutes ces différentes décompoſitions & ſur les circonſtances qui les accompagnent, nous remarquerons que pour qu'elles puiſſent avoit lieu, il eſt néceſſaire qu'il ſe diſſipe une plus ou moins grande quantité de l'eau du Sel ammoniac, & que c'eſt pendant cette évaporation qu'elles arrivent.

Or il m'a paru avoir obſervé trois cas différens, ſavoir, le premier dans lequel eſt compriſe la décompoſition par les Alkalis fixes, & tous les intermèdes qui donnent très-peu d'eſprit & beaucoup de Sel; les compoſés qui reſtent dans le fond du vaiſſeau ſont des Sels qui retiennent à-peu-près autant d'eau que le Sel ammoniac, & la retiennent même avec plus de force.

Le ſecond dans lequel doivent être compriſes les Chaux & les ſubſtances métalliques ſous leur forme naturelle ; il demeure dans le fond des Vaiſſeaux des Sels qui attirent beaucoup l'humidité, mais qui la lâchent avec plus de facilité que les précédents.

Le troiſième regarde la Chaux combinée avec le Sel ammoniac dans des circonſtances différentes, ſavoir la Chaux-vive & le Sel ammoniac calciné, dont les reſultats ſont les mêmes que ceux des ſubſtances métalliques ; la Chaux-vive & le Sel ammoniac avec toute ſon eau dont on ne retire aucun produit, excepté le phoſphore

D'

D' HOMBERG ; la Chaux éteinte & le Sel ammoniac ſans être calciné ; la crême & l' eau de Chaux évaporée à ſiccité avec du Sel ammoniac contenant toute ſon eau.

De toutes ces combinaiſons de la Chaux on a pour réſidu un Sel ammoniac fixe à la verité, mais qui différe dans chaque opération par le plus ou moins d'eau qu'ils attirent; cependant en général ces composés peuvent en être privés aîſément par l' action d' un feu plus moderée que tous les précédents, & c' eſt ſelon moi, de cette force plus ou moins grande de ces nouveaux composés à retenir l' eau, que dépend la décompoſition en eſprit ou en Sel volatil ; mais comme les Sels volatils emportent avec eux une plus grande quantité de parties concrêtes de l'intermède, il eſt naturel de penſer que du moment que l' acide marin eſt dans le dégré de concentration néceſſaire pour former avec une partie de l' intermède un nouveau Sel de nature fixe, l' Alkali volatil ſe combine par le moïen de l' acide plus délayé, & dont l'eau ſurabondante ne ſauroit être entièrement enlvée, avec les parties de l'intermède qui reſte, & forme le Sel volatil concrêt: la Chaux étant en effet une ſubſtance dont les parties quoique d' une nature différente, ainſi que le penſoit le célébre M. HOFFMANN, & que nous avons eû occaſion de le conſtater, retient cependant ces parties avec une force que le feu ne fait qu' (*ee*) augmenter & que l'eau ſeule eſt capable de détruire : il eſt clair que plus la Chaux ſera vive, moins l' eau contenuë dans le Sel ammoniac, quoique ſurabondante, pourra opérer cette déſunion réciproque qui ne me paroît conſiſter qu' en ce que l' eau dégage la partie volatile de la Chaux, qui ayant attaqué la partie phlogiſtique du Sel ammoniac, facilite d' autant

(*ee*) Nous aurons occaſion de voir la raiſon de cette fixité de la partie volatile de la Chaux, & d' où lui vient cette derniere propriété.

d' autant plus la désunion entre le Sel volatil & l' acide marin, que cet acide affoibli par beaucoup d'eau paroît avoir plus d' affinité avec la Chaux qu' avec l' Alkali volatil, comme nous le ferons remarquer par la suite; d' où il suit que pendant que la Chaux est dans son état naturel, c' est-à-dire, que ces principes ne sont pas désunis par l' eau, elle peut bien former un corps surcomposé, en s' unissant au Sel ammoniac avec beaucoup de force, mais elle n' en peut pas procurer la décomposition.

XII.E EXPÉRIENCE.

Distillation du Sel ammoniac dissout dans l' eau de Chaux.

Sel ammoniac fluor.

Esprit de Sel.

Sels ammoniacaux.

113. POur ce qui est de l' enlévement de la partie inflammable des Alkalis volatils par la partie de la Chaux qui se volatilise, elle me paroît très-probable par ce que j' ai fait observer §. 97. où je rendis compte d' une double décomposition qui se fait par un tour de main particulier, & qui ne me paroît pas possible sans le secours du phlogistique qui diminuë la force d' union que l' acide vitriolique a contractée avec la partie terreuse, & cela paroît d' autant plus probable, que c' est en faveur du feu, que cette opération se fait (*ff*); car d'ailleurs la crême de Chaux ne procure point d' esprit volatil

(*ff*) Cette opération dont j' ai parlé §. 97. a quelque chose d' analogue à celle du Soufre artificiel.

til non plus que l' eau de Chaux, comme je m' en ſuis aſſûré en diſtillant $\frac{2}{\text{onc.}}\ \frac{2}{8}$ de Sel ammoniac diſſous dans $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{2}{8}\ \frac{1}{2}$ d' eau de Chaux, qui contenoit beaucoup de crême de Chaux, & comme ce mélange étoit trop liquide, j'y ajoûtai encore environ $\frac{1}{\text{onc.}}$ de terre vitrifiable, mais les $\frac{7}{8}\ \frac{1}{2}$ environ de la première liqueur que j' obtins n' étoient que du Sel ammoniac fluor très-limpide au fond de laquelle étoit un peu de liqueur très-jaune qui reſſembloit aſſez à de l' huile figée, & qui, en ſe mêlant par l' agitation avec l' autre, donnoit une grande quantité de bulles d' air (*gg*).

114. Par toutes les expériences que j' ai faites, je crois pouvoir conclurre que celles d' entre les décompoſitions qui méritent ce nom par excellence, ſont celles qui ſe font par le moïen de la Chaux éteinte, & de l' huile de tartre, celle de l' Alkali fixe concret ne donnant qu' un Sel volatil ſurchargé de parties hétérogènes, de même que les crayes & les autres terres abſorbantes: pour celles qui

(*gg*) La ſeconde liqueur qui paſſa dans le récipient étoit du véritable eſprit de Sel fumant, elle péſoit environ $\frac{46}{\text{gr.}}$ ce qui prouve que l' eau de Chaux contient un véritable acide vitriolique, le reſte du Sel ammoniac ſe ſublima en fleurs jaunes, parmi leſquelles il s' en trouvoit une petite quantité qui étoit d' un beau rouge, & que je me doûtai être du Sel ammoniacal ſecret de Glauber. La ſeconde liqueur mêlée à la première ſervit de diſſolvant à celle qui étoit au fond du matras, & toute la liqueur prit ainſi une couleur violette: je ne dois cependant pas laiſſer ignorer que les pierres à fuſil que j' avois calcinées & dont je fis uſage contenoient vraiſemblablement un peu de parties férugineuſes dont je cherchai à les délivrer par un peu d' eſprit de vitriol, & par des édulcorations reïtérées, j' en enlevai l' acide.

qui se font avec les substances métalliques, elles sont très-imparfaites (*hh*).

115. Nous avons observé que le Sel ammoniac fluor éxige beaucoup d' Alkali fixe pour développer son odeur urineuse §. 100., pendant que très-peu de Chaux produit cet effet, cela me paroît prouver que l'acide marin étendu dans beaucoup d' eau a plus d' affinité avec la Chaux qu'avec l' Alkali volatil, & qu' il en a davantage dans cette circonstance avec celui-ci qu' avec l'Alkali fixe.

116. Nous avons aussi remarqué §. 101. & nous l'avons répeté ci-devant que le Sel ammoniac avant de se sublimer en fleurs donne un peu de liqueur urineuse, ce qui semble nous faire voir que l' acide marin s' unit à une plus grande quantité d' Alkali volatil lorsqu' il est foible, que lorsqu' il est concentré.

XIII.[E] EXPÉRIENCE.

Distillation du Sel ammoniac fluor avec l'Alkali fixe.

Sel ammoniac fluor.

117. POur m' assûrer si l'acide marin délayé dans beaucoup d' eau avoit plus d' affinité à l' Alkali volatil qu' à l' Alkali fixe, je pris $\frac{4}{\text{onc.}}$ $\frac{36}{\text{gr.}}$ de Sel ammoniac fluor, & j' y mis autant de Sel de potasse qu' il en fallut pour

(*hh*) Une marque certaine que la décomposition du Sel ammoniac n'est pas complette & dont on peut juger par la seule inspection, c' est la couleur jaune qui est toujours plus foncée à mesure qu' elle contient plus de Sel ammoniac fluor, & ce qui sert à le prouver, c' est la facilité avec laquelle on peut l'enlever par l'addition d'un Alkali fixe ou de la Chaux.

J' ai

pour lui faire développer l' odeur urineuſe, ce qui monta à $\frac{2}{\text{onc.}}$, mais avant que l' Alkali fixe eut abſorbé toute la liqueur, ce qui je cherchois à faciliter par l' agitation du mélange, il ne s' élevoit plus d' odeur urineuſe; après avoir lutté avec ſoin le Chapiteau & le récipient, j' en fis la diſtillation au bain de ſable, & la liqueur qui paſſa péſoit environ 12 à 15 grains de plus que ne péſoit le Sel ammoniac fluor, & la tête-morte par conſéquent péſoit ces grains de moins, ce qui m' a fait voir que la liqueur avoit emporté un peu d' Alkali fixe; elle étoit de même couleur qu' auparavant, & n' avoit point d' odeur urineuſe ſenſible, mais elle la développoit par l' addition de la Chaux.

XIV.E EXPÉRIENCE.

Diſtillation à feu nud du caput mortuum de l' expérience précédente.

Sel ſublimé.

118. Comme j' avois fait cette diſtillation dans une cucurbite de verre, j' en pris la tête-morte, & ayant reconnu qu' elle contenoit de l' acide marin, malgré que la liqueur dont nous avons parlé ne ſentit pas l' urineux, je me propoſai de voir ſi par la force du feu je pouvois détacher cet acide, pour examiner enſuite ſi par ces différentes opérations il avoit ſouffert quelque chan-

J' ai remarqué qu' elles ne ſont jamais parfaites, & qu' il arrive toujours de deux choſes l' une, ſavoir ou du Sel ammoniac ſublimé, ou de l' intermède non décompoſé: la première a lieu toutes les fois qu'on employe une trop grande quantité de Sel ammoniac, & la ſeconde lorſque cette quantité eſt trop petite.

changement ; je fis donc piler $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{7}{8}\ \frac{50}{\text{gr.}}$ de cette tête-morte, je la mis dans une cucurbite de terre à creuſet avec environ $\frac{1}{8}$ d' eau diſtillée, & j' en retirai premièrement $\frac{1}{8}\ \frac{25}{\text{gr.}}$ d' une liqueur plus foible mais de même nature que la première, $\frac{1}{8}$ d' un Sel ſublimé à la voûte de la cornuë, & la tête-morte qui s' étoit réduite à $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{5}{8}\ \frac{25}{\text{gr.}}$ avoit priſe une couleur bleuâtre : j'éxaminai la liqueur & le Sel, l'un & l' autre donnerent beaucoup de vapeurs blanches avec l' huile de vitriol, développerent une odeur urineuſe aſſez forte avec la Chaux vive, ils paroiſſoient cependant avoir du goût du Sel marin, mais le Sel loin de décrépiter ſur une lame de fer rougie, ſe diſſipoit en fumée, ce qui me fit juger que c' étoit du véritable Sel ammoniac.

119. Cette expérience me fit reſſouvenir que j' avois obtenu le même effet une autre fois que j' avois voulu faire du Sel volatil, & que le vaiſſeau ayant caſſé par un coup de feu après que l' opération étoit déja fort avancée, j' ai entomé le fond de ma cornuë dans une cucurbite de terre, & j' en retirai par ce moïen du Sel ſublimé comme celui dont je viens de parler, ſavoir ſans odeur urineuſe, ſentant ſeulement un peu l' empireume.

120. En réfléchiſſant ſur les circonſtances des décompoſitions du Sel ammoniac pour en retirer le Sel volatil & peut-être l' eſprit, il me paroît d'entrevoir qu'il en eſt de ces ſublimations comme des précipitations, c' eſt-à-dire que la partie volatile enleve un peu de l' intermède fixe,

pendant que l'intermède retient auſſi quelque peu de la partie volatile.

Seroit-ce une loy générale des volatiliſations ?

Dépendroit-elle de ce que par des nouvelles combinaiſons une partie des ſubſtances fixes devint volatile, & une partie de celles qui ſont volatiles prit le caractère de fixité ?

Ou ſeroit-ce enfin que toutes les ſubſtances continſſent ces parties d'une manière diſtincte ?

La ſeconde de ces propoſitions peut fort bien être la véritable, mais comme il ſera toujours néceſſaire de quelques tours de mains pour les déſunir & les faire paroître chacune dans ſon état naturel, il me ſemble que la première eſt la plus générale & la plus conforme à l'expérience; car nous voyons qu'il eſt très-poſſible de faire prendre un caractère de fixité en entier à une ſubſtance volatile par des procédés très-connus, de même qu'on peut volatiliſer des ſubſtances très-fixes. Il eſt vrai cependant que dans pluſieurs ſubſtances il ſe trouve des parties plus ou moins doüées de ces propriétés.

XV.^E EXPÉRIENCE.

Diſtillation de l'eſprit volatil avec le noir de fumée.

Eſprit urineux empireumatique.

121. JE tentai encore inutilement d'obtenir du Sel volatil, ou plutôt de convertir en Sel l'eſprit urineux en combinant $\frac{2}{\text{onc.}}\ \frac{1}{2}$ de noir de fumée avec $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{1}{2}$ d'eſprit volatil fait avec la Chaux, mais je ne retirai qu'une liqueur urineuſe graſſe un peu empireumatique; la ſurface de la tête-morte étoit de la couleur du verdet,

je

je crus néanmoins devoir soûmettre la tête-morte à une chaleur plus forte, je la mis pour cela dans une cucurbite de terre, & après avoir retiré une liqueur très-limpide, d' un goût salé un peu empireumatique qui développoit une odeur fort agréable par le Sel de tartre & la Chaux qui faisoit effervescence avec l' huile de vitriol sans répandre des fumées, il se sublima environ $\frac{36}{gr.}$ de véritable Sel ammoniac alteré par une odeur très-empireumatique.

XVI.[e] EXPÉRIENCE.

Distillation d' une dissolution de Sel ammoniac avec la tête-morte d' un Sel vitriolique calcaire qui avoit servi à une distillation d' urine putréfiée.

Esprit urineux.

Sel ammoniac sublimé.

122. JE ne me dispenserai pas de rendre compte d'une expérience que j' ai faite pour obtenir du Sel volatil en employant de la Chaux que j' avois chargée d'acide vitriolique après qu' elle avoit servi à retirer le phlegme d' une quantité d' urine putrefiée, & qui étant ainsi combinée avec beaucoup d' huile de vitriol, me donna une quantité considérable d' esprit urineux très-pénétrant accompagné cependant d' une odeur un peu fœtide, cet esprit boüillonnoit (*ii*) considérablement avec l' huile de vitriol

(*ii*) Cette combinaison est à-peu-près celle dont parle *M. Vallerius* dans un Mémoire sur le nitre artificiel, & par laquelle il dit que le Docteur *Pietsch*, qui a remporté le prix de l'Académie de Berlin, a fait

vitriol, jettoit des vapeurs blanches & épaiſſes, manifeſtoit un mouvement d'efferveſcence avec le Sel de tartre : d'où il ſuit inconteſtablement que cet eſprit d'urine tenoit du véritable Sel ammoniac en diſſolution : c'eſt donc du caput mortuum qui reſta dans cette opération que je me ſuis ſervi ; c'étoit une ſubſtance d'une ſurface unie, & ayant des crevaſſes comme la Chaux éteinte, deſſéchée, d'un grain tout-à-fait fin, d'une légereté ſurprenante ; elle étoit blanche dans ſa partie ſupérieure, un peu bleuâtre daus le centre, d'un goût fade, ne s'humectant point à l'air : je mêlai $\frac{6}{onc.}\ \frac{4}{8}$ de cette tête-morte avec $\frac{2}{onc.}$ de Sel ammoniac & environ $\frac{1}{onc.}\ \frac{2}{8}$ d'eau diſtillée dans une cucurbite de terre, & j'en retirai $\frac{3}{onc.}\ \frac{36}{gr.}$ environ d'une eſprit urineux aſſez fort, $\frac{3}{8}$ d'un Sel ſublimé à la voûte, & la tête-morte dont la couleur bleuë étoit conſidérablement augmentée péſoit environ $\frac{6}{onc.}\ \frac{3}{8}$; ayant éxaminé le Sel ſublimé à la voûte, je trouvai que c'étoit du Sel ammoniac.

123. Cette expérience ſert à nous faire voir combien il eſt difficile d'enlever l'acide vitriolique à la Chaux, de même que le phlogiſtique dont elle ſe charge avec tant d'avidité, & confirme en même-tems ce que nous avons dit

fait du nitre artificiel ; je n'ai pas encore eû le tems de m'aſſûrer ſi je pouvois retirer de ce Sel, mais je puis avancer que cette tête-morte fait une grande efferveſcence avec l'huile de vitriol & manifeſte l'odeur inſupportable de l'eſprit de nitre, en répandant dans cette occaſion une grande quantité de fumées dont je ne pus pas diſtinguer aſſez bien la couleur ; il ne me fut cependant pas poſſible de retirer du ſalpêtre par la diſſolution, la filtration & l'evaporation de cette tête-morte.

dit §. 112. ſavoir que le Sel ſélénitique enleve la partie phlogiſtique du Sel ammoniac & facilite par-là ſa décompoſition ; & quoique le Sel ſublimé ait donné des marques de Sel ammoniac de même que la liqueur ; ces ſignes cependant ont été beaucoup plus foibles que ceux que donnent les fleurs de ce Sel ou le Sel fluor, d'ailleurs la diminution de poids de la tête-morte nous prouve aſſez qu'il s'en eſt volatiliſé une partie, & il eſt probable qu'elle ſoit de la nature de la partie volatile qui ſe dégage de la Chaux par le moïen de l'eau, c'eſt-à-dire que ce ſoit un ſel ſéléniteux. Il eſt bon d'avertir auſſi que dans l'eſprit d'urine dont nous avons parlé ci-devant, l'on voyoit des petits corps précipités au fond de la liqueur, & d'autres qui y nageoient ; or il eſt probable que ce n'étoit que de ce Sel ſélénitique.

XVII.E EXPÉRIENCE

Séparation du Sel volatil d'avec l'eau qui le tient en diſſolution au moïen du Sel ammoniac.

124. POur ne rien négliger de tout ce qui me paroiſſoit pouvoir contribuer à la formation d'un Sel volatil urineux par le moïen de la Chaux, je voulus éſſayer ſi la méthode que propoſe l'Illuſtre M. LEMERY m'en fourniroit effectivement, & pour faciliter l'opération, j'ai diſſous deux parties de Sel ammoniac en gâteau qui comme on ſait contient beaucoup plus de parties inflammables que les fleurs, dans trois parties d'eſprit de Sel ammoniac, & je retirai ſur $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{5}{8}$ d'eſprit volatil & $\frac{1}{\text{onc.}}$ de Sel ammoniac une quantité aſſez conſidérable de très-beau Sel volatil criſtallin, mais dont il me ne fut pas poſſible

possible de savoir le poids, parceque la liqueur ayant boüilli dans le fond des matras le détruisit dans peu de minutes; je l' avois cependant reconnu quelque tems avant cet accident, & son odeur étoit beaucoup plus pénétrante que n' est celle du Sel volatil fait avec l' Alkali fixe ou la craye.

XVIII.E EXPÉRIENCE.

Séparation du Sel volatil d' avec l' eau qui le tient en dissolution.

125. CE résultat me fit esperer d' obtenir du Sel volatil avec le seul esprit de Sel ammoniac, comme l' avance, ainsi que je l' ai dit, le Savant M. LEMERY, je mis pour cela $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{6}{8}\ \frac{1}{2}$ d' esprit de Sel ammoniac fait avec la Chaux dans un matras à long col garni de son Chapiteau, & comme j' avois observé qu' il est indispensable pour réüssir de ne donner qu' un petit dégré de chaleur afin que l' eau ne puisse en s' évaporant détruire la formation du Sel volatil, je crus devoir employer un bain-marie en prenant la précaution de ne jamais laisser boüillir l' eau en la tenant toujours entre 60. & 65 dégrez de chaleur au termométre selon la production de M. RAUMUR.

Il se fit effectivement du Sel volatil par ce moïen, mais ce Sel n' étoit pas si beau ni si volatil que le précédent; d' ailleurs il se détruit avec beaucoup de facilité, sa couleur est un peu terne, & l' opération est dès-plus laborieuses (*kk*).

126.

(*kk*) Cette opération, toute pénible qu' elle est, ne laisse pas d' être fort intéressante par les singularités qu' elle fournit, je tirai, avant toutes

126. Ces expériences nous apprennent plusieurs vérités, & servent à confirmer ce que j'ai avancé §. 112. que la forme concrête ou liquide que prend le Sel volatil, ne dépend pas seulement de la quantité de l'intermède concrêt qu'il enleve avec lui dans cette opération, mais principalement de la force avec laquelle le nouveau Sel fixe qui résulte & qui reste dans le fond du vaisseau retient l'eau qui lui est nécessaire.

127. Nous déduirons encore qu'en emploïant de la Chaux-vive avec une suffisante quantité d'eau pour l'éteindre & pour opérer par la décomposition du Sel ammoniac, la chaleur étant assez grande pour résoudre en vapeurs l'humidité surabondante au Sel ammoniac fixe, il n'est pas étonnant que dès le commencement de l'opération où il n'est pas même nécessaire d'emploïer le feu, cette décomposition ne se fasse qu'en esprit.

tes choses, que je retirai par ce moïen environ trois gros de Sel volatil très-dur qui est sans contredit plus pénétrant que celui qu'on retire par d'autres méthodes.

Ce qu'il y a de plus singulier c'est qu'au dessous de 50. & à 70. il se détruit, & qu'il ne se forme qu'entre ces limites; outre cela pendant que le Sel se forme dans le col du matras on voit des vapeurs dans le Chapiteau, ce qui prouve que ce Sel est moins volatile que l'eau, apparemment à cause des parties de Chaux aux quelles il s'est associé, & ce qui me paroît servir de plus forte preuve à cela, c'est qu'il se dissout à un degré inférieur que celui au quel se forme le Sel; de manière que par cette chaleur il s'evapore une plus grande quantité d'eau qu'il ne s'éleve de Sel volatil pour former des cristaux avec elle; quant au degré supérieur, il est clair que cette proportion sera encore moins conservée, puisque l'evaporation à mobilité égale sera toujours proportionelle à la quantité absoluë des deux substances; & comme il se trouve dans l'esprit urineux assez d'eau pour tenir le Sel en dissolution, car sans cela il seroit sous la forme concrête; il s'en suit nécessairement qu'il doit toujours se faire une évaporation de parties aqueuses capable de tenir le Sel qui s'éleve avec dans une parfaite dissolution: je crois que la Chaux enlevée est aussi la cause de la grande force de ce Sel en ce qu'elle en dénature la partie grasse, au lieu que dans les autres elle leur donne des entrâves & en émousse l'odeur.

128. Si nous obſervons enfin les réſultats des dernières expériences §. 118. 119. 122. 123. nous voyons que la volatilité des intermèdes fixes n' eſt duë qu' à l' aſſociation des acides & de la matière inflammable. (*ll*)

129. Que dans les Alkalis fixes cette volatilité doit être entièrement aſſignée à l' acide marin, qui étant par lui-même volatile n' a pas beſoin d' autre ſecours pour communiquer cette propriété à ces ſubſtances.

130. Que dans la Chaux au contraire ſe rencontrant l' acide vitriolique qui n' eſt pas par lui-même volatile, & qui ne peut acquérir cette propriété que par le moïen de l' eau & du phlogiſtique, ce n' eſt que dans ces circonſtances que cette propriété peut ſe développer; & comme cet acide attaque avec plus de force le phlogiſtique que l' acide marin, il eſt naturel que ce ſoit lui qui éxerce par préférence cette fonction.

Il ſuit de-là que l' acide ſulphureux ne doit pas ſeulement ſa volatilité à la matière inflammable à laquelle il s' eſt uni, mais encore à l' eau dans laquelle il eſt délayé.

131. En rappellant ici l' obſervation faite par M. Malouin que les Sels ſéléniteux quand ils ont été une fois privés de toute l' eau qui les tenoit en diſſolution, il en faut une beaucoup plus grande quantité pour les rediſſoudre; il paroît que la fixité de la partie qui eſt diſpoſée à devenir volatile dans la Chaux dépend du même principe, ſavoir que l' acide vitriolique étant alors dans un grand dégré de concentration eſt ſurchargé de parties terreuſes dont il ne retient plus qu' une moindre quantité lorſqu' il eſt affoibli par l' eau, & qu' il peut exercer librement ſon action ſur les ſubſtances inflammables; en effet nous avons obſervé §. 73. que la Chaux peut décom-

(*ll*) C' eſt ce que j' ai avancé dans une note §. 17.

composer le Soufre en attaquant sa partie phlogistique, mais que ce n' est qu' à la faveur de l' eau, comme il arrive dans toutes les décompositions de cette substance, qui ne peuvent absolument avoir lieu sans son secours.

132. En considérant l' opération qui est nécessaire pour la formation du Soufre artificiel, il est naturel de voir que ce n' est que dans l' état de fluidité que l' acide vitriolique peut attaquer le phlogistique, mais qu' il se passe une grande différence dans la manière avec laquelle cette union se fait, car dans l' état de fonte cette union est la plus intime possible, & dans celui de dissolution elle est bien petite, (*mm*) au reste nous remarquerons que le tartre vitriolé paroît être la combinaison la plus parfaite de cet acide avec une substance d' une nature différente, parcequ' il est nécessaire d' employer toute la violence du feu pour la détruire, pendant qu' il ne faut que des opérations très-simples & très-aisées pour décomposer le Soufre & les sélénites que je regarde après le tartre vitriolé comme les composés de cet acide les plus difficiles à détruire, mais nous laisserons des discussions que je

t 2 me

(*mm*) Les expériences dont je vais rendre compte me paroissent assez propres pour confirmer cette proposition. Comme le mélange du charbon & du Sel ammoniac dont j'ai parlé §. 89. ne m' avoit rien donné ainsi que je l' avois prévû, j' y ajoûtai du vitriol vert bien calciné, & je retirai de ce mélange de l' esprit de Sel mêlé à de l' esprit sulphureux très-puissant & du Sel ammoniacal vitriolique, ce qui sert à nous faire voir encore qu' on peut tout aussi bien emploïer ces sortes de Sel pour dégager l' acide du Sel ammoniac que les acides libres, il est vrai qu' il seroit peut-être nécessaire de repasser l' esprit de Sel sur du nouveau Sel ammoniac pour l' avoir pur, mais toujours est-il moins vrai qu' on obtiendroit par ce moïen le Sel ammoniac secret de *Glauber*, avec plus de facilité, & moins de danger.

Une seconde expérience sert encore à appuïer les raisonnemens ci-devant.

Je pris $\frac{1}{\text{onc.}}$ d'esprit volatile $\frac{3}{8}$ de Soufre & je laissai ce mélange

en

me réserve à traiter autre part dans toute l' étenduë qu'elles peuvent mériter.

133. Je reviendrai à ce que j' ai dit §. 130. que c' est l'acide vitriolique qui se volatilise avec des parties terreuses dans la Chaux en attaquant par préférence de l'acide marin la partie inflammable du Sel ammoniac, & l'attaquant même avec plus de force ; je ne disconviendrai pas cependant que peut-être la partie que cet acide abandonne à la faveur de l' eau ne puisse être attaquée par l' acide marin & se volatiliser avec lui de manière que la décomposition fut d' autant plus intime par la Chaux, que les deux acides y concourrent, & il me paroît à propos d' observer qu' il en est de celle-ci comme de plusieurs dissolutions faites par l' acide marin dans lesquelles cet acide n' a de jeu, qu' autant que les substances ont déja été, pour ainsi dire, ouvertes & atténuées par des acides plus-forts.

J' en ai eû un exemple dans le plomb minéralisé par le Soufre dont j' ai parlé dans la note du §. précédent, ce plomb qui est si réfractaire, s' est pourtant réduit en plomb corné pour la plus grande partie en le mêlant à des fleurs de Sel ammoniac dans un creuset à un feu

au

en digestion pendant la nuit sur des cendres tiédes & dans un vase d' un très-petit orifice que j' eus soin de couvrir d' un cornet de papier ce qui me donna la teinture dorée dont parle le Célébre *M. Boherave*, mais dont le procédé n' est pas si simple, & comme il étoit resté du Soufre qui n' avoit point souffert de changement, j' ajoûtai à ce mélange $\frac{3}{\text{onc.}}$ de minium; j' en fis ensuite la distillation dont je retirai une liqueur mêlée d' esprit de Sel & d' acide sulphureux, un peu de Sel ammoniacal vitriolique, & le plomb calciné fut entièrement mineralisé par le Soufre, sa couleur étoit noire, sa consistance étoit friable, il s' attachoit aux doigts & donnoit une flamme bleüe étant exposé à une chaleur modérée de même que fait le Soufre, & ne discontinuoit à brûler qu' en lui interceptant la communication avec l' air libre, en un mot c' étoit du véritable plomb brûlé.

auquel un mélange de ce même plomb avec de la poudre de charbon n' avoit rien changé.

134. J' ai dit §. 109. en parlant de la différence entre les résultats de la combinaison du Sel ammoniac avec le plomb, & de ce même Sel avec le plomb & la Chaux-vive, que j'avois lieu de conjecturer que l' acide marin devoit être affoibli par beaucoup d' eau pour attaquer le plomb, & §. 110. dans la note que non seulement par cette raison, mais encore parceque dans le Sel ammoniac cet acide se trouve associé à un Alkali volatil (Sels qui sont toujours chargés de beaucoup de matière phlogistique) il éxerce son action sur le métal (*nn*) j' ai dit ensuite que lorsque cet acide est très-foible, il paroît avoir plus d' affinité avec la Chaux, qu' avec les Alkalis volatils, & qu' il en avoit davantage dans cet état avec ces derniers qu' avec les Alkalis fixes, ces inductions quoiqu' appuyées ne doivent cependant pas passer en maxime, & je ne les donne que comme des doûtes ou des conjectures qui ont besoin d' être prouvées d' une manière directe, ce que ne pouvant pas faire pour le présent d'une manière assez étenduë, je me contenterai d' exposer quelques expériences que j' ai faites sur cela.

135. Je mis de la grenaille de plomb dans de l'acide marin, & aprés douze heures il ne me parut pas qu' il en fut attaqué d' une maniére un peu considérable (*oo*).

J' affoibli cet acide par beaucoup d' eau, mais je n' observai pas qu' il y eut eû d' altération plus sensible au plomb après 6. heures.

J' ajoûtai

(*nn*) Cette proposition que je n' ai donnée que comme une conjècture à excité ma curiosité, & j' ai fait sur cela quelques expériences qu'on trouvera à la fin de ce mémoire.

(*oo*) Je dois avertir que mon esprit de Sel n' étoit pas d' une grande force, & que c'est peut-être pour cette raison que les effets qu' il a produits sur le plomb sous sa forme métallique ont été bien petits, mais comme je me suis servi de ce même esprit de Sel pour les Chaux, il me paroît que les résultats n' en sont pas moins concluants.

J' ajoûtai à l' acide un peu d' eſprit volatile, ce qui excita beaucoup d' efferveſcence, & il me parut à 3. heures de-là que le plomb avoit changé conſidérablement.

136. Je mis du pareil plomb dans de l' eſprit volatile très-pénétrant, & j' en mis dans un autre affoibli par beaucoup d' eau; après 24. heures de tems le ſecond avoit ſouffert beaucoup plus d' altération que le premier; mais je remarquai que le plomb étoit au fond de la liqueur ſous la forme d' une Chaux précipitée, ce qui prouve que le plomb eſt attaqué par l' Alkali volatile, mais que ce n' eſt pas une véritable diſſolution.

J' ajoûtai un peu d' acide marin à ces eſprits urineux, & je remarquai de même une grande différence d'action de cet acide ſur ce métal par les deux liqueurs; car celle qui étoit plus foible agiſſoit avec beaucoup plus d'activité que l' autre, elle étoit très-limpide, les bulles d' air ſe dégageoient avec beaucoup de rapidité, & je remarquai qu'elle répandoit une grande quantité de vapeurs acides, pendant que l' autre n'en donnoit aucune; il eſt vrai que dans celle qui étoit plus concentrée le rapport entre l'acide & l' Alkali volatile étoit plus approchant du point de ſaturation; je mis une quantité d' eau dans cette diſſolution & elle s' éclaircit un peu, mais elle n' étoit pas auſſi limpide que l' autre, je crois cependant qu' il ſe trouvoit une plus grande quantité de plomb diſſoûte.

137. Ces expériences nous apprennent clairement que l' acide marin agit avec d' autant plus de force ſur le plomb par le ſecours des Alkalis volatiles, que ces Alkalis ſont plus éloignés de leur plus grande concentration, quoiqu' il ſoit naturel de penſer que cette plus grande activité ne s' étende que juſqu' à un certain terme, qui je penſe ſera celui de leur parfaite diſſolution.

138. Il paroît de même qu' elle nous prouve que l' acide marin a très-peu, ou peut-être n' a aucune action de

de diſſolution ſur le plomb (*pp*), ſeroit-ce à cauſe de la grande quantité de phlogiſtique que contient ce métal? c' eſt effectivement ce que ſemblent me prouver les expériences ſuivantes.

139. Quant à ce que j' ai dit de l' affinité de cet acide avec la Chaux, les Alkalis volatils & les Alkalis fixes, il me paroît que la choſe eſt aſſez prouvée par les expériences dont j' ai rendu compte, & je ne m' y arrêterai pas davantage.

140. Voici en peu de mots ce qui m' a paru prouver que l' acide marin ne diſſout point le plomb à moins qu'on ne l' ait privé de ſon phlogiſtique, c' eſt que l' eſprit de Sel diſſout le minium avec beaucoup d' effervescence, il en fait de même à la céruſe mais avec quelque petite différence, & quoique ce même acide diſſolve le Sel de ſaturne, il le fait pourtant avec beaucoup moins d' activité & ſans effervescence: or perſonne n' ignore que le minium & la céruſe ſont deux chaux de ce métal imparfait, la première faite par le feu, & la ſeconde par les vapeurs acides du vinaigre, de manière qu' elles ſont entièrement privées de leur phlogiſtique, au lieu que le Sel de ſaturne par les digeſtions & les cohobations réitérées de l' eſprit de vinaigre en reprend indiſpenſablement, ce qui eſt aſſez prouvé par la révivification qu' on peut faire de ce Sel en plomb ſans addition de phlogiſtique.

Ce phénomène de la diſſolution du plomb par l' acide marin au moïen d' un peu d' Alkali volatil ſemble favoriſer le ſentiment de ceux qui prétendent que l' acide nitreux n' eſt que l' acide vitriolique altéré par du phlogiſtique

(*pp*) J' entends par diſſolution, une déſunion intime & uniforme de toutes les parties d' un corps, d' où il ſuit immédiatement la limpidité de la diſſolution, ce qui n' ayant pas lieu dans celle de l' eſprit de Sel ſur le plomb non préparé, ne me paroît par mériter ce nom, mais plutôt celui d' abraſion.

giftique & de l'Alkali volatil, & que l'acide marin n'en différe qu'en ce qu'il ne contient pas l'Alkali volatil; si cela étoit cependant, le Sel ammoniac fluor combiné à l'Alkali fixe devroit donner du véritable nitre, ce qui ne m'a pas réussi, non plus que d'en tirer d'une distillation que j'ai faite du mélange de l'esprit de vin avec l'acide vitriolique saturé d'Alkali fixe après 12. heures de digestion, qui a été l'opération dont M. VALLERIUS dit en avoir retiré; pour moi je n'ai obtenu qu'un tartre vitriolé en cristaux très-distincts, qui differoit cependant de l'ordinaire, en ce qu'il n'avoit point du tout de saveur amère. J'ai remarqué à cette occasion que malgré que l'évaporation soit très-rapide les crystaux qui en resultent sont en grande quantité & très-bien figurés, qu'il ne se forme point de pellicules, & qu'ils se crystallisent au fond de leur dissolution, comme le Savant M. ROUELLE dit qu'il arrive dans l'évaporation insensible, aux dissolutions ordinaires de ces Sels à l'air libre.

Quoique je me fusse proposé de rendre compte dans ce Mémoire de l'action de la Chaux sur différentes substances, les questions incidentes ne m'ayant pas permis d'être plus court, j'ai été dans l'obligation de me borner au Soufre, au Sel de Glauber, & au Sel ammoniac, me réservant à en donner la continuation dans d'autres Mémoires.

EX-

EXPÉRIENCES

Pour chercher les causes des changemens qui arrivent au Sirop violat, par le mélange de différentes substances.

PAR LE MÊME.

L'Illustre M. NEUMANN a donné un Mémoire dans le quatrième volume des *Miscellanea Berolinensia* sur le peu de confiance qu'on doit avoir aux changemens de couleurs qui arrivent au Sirop violat par le mélange de quelque substance pour en déduire la nature.

On sait que la couleur verte sert à caractériser les substances alkalines, que le rouge dénote la présence d'un acide, & que les Sels qui résultent de la combinaison exacte de ces principes, & plus généralement que les Sels parfaitement neutres n'apportent aucune altération à la couleur bleüe des végétaux, ce sont là des maximes généralement reçuës; quoique cependant ces axiômes ayent été depuis fort long-tems adoptés, ce Savant a fait voir qu'ils étoient sujets à un grand nombre d'exceptions, & qu'on ne pouvoit être en droit de conclurre de ces changemens que la substance qu'on avoit employée fut acide ou alkaline, ou enfin neutre, lors qu'il ne survenoit aucune altération à la couleur naturelle au sirop.

Ce n'est point une ampliation de ces exceptions que je me propose, mais l'éxamen de ces changemens & celui des causes de ces exceptions mêmes.

Je distribuerai mes observations selon l'ordre qui me paroît le plus naturel, savoir celui que tiennent les acides, &

& je chercherai ensuite à déduire les conséquences qui en découlent.

1. Le sirop violat mêlé avec l' huile de vitriol, prend une couleur rouge très-belle & plus ou moins foncée à mesure que la quantité d' eau dans laquelle on étend le sirop est plus ou moins grande.

2. Il n'en est pas de même si on met l'huile de vitriol sur le sirop sans le délayer dans une quantité d' eau considérable, quantité qui doit être fixée par l' espéce de dissolution qui se fait sans qu' il ne se précipite plus rien après qu' on l' a laissé reposer; car alors le sirop se convertit en charbon.

3. Toutes les fois que la quantitè d'eau excede le point de saturation, s' il est permis de me servir de cette expression, la couleur se change en verd dans la dissolution du sirop.

4. Je ne parlerai dorénavant que des dissolutions saturées, j' avertirai toutes les fois que cette circonstance aura été altérée, & je les nommerai liqueur.

5. Le tartre vitriolé semble au commencement ne diminuer qu' un peu l' intensité de la couleur bleue, elle se change néanmoins après un certain tems en une couleur verte assez belle. Les fleurs de violette, ni le papier bleu ne souffrent aucun changement.

6. Le foye de Soufre, ou pour parler plus éxactement, du Soufre & de l' Alkali fixe mêlés à cette liqueur au moïen de l' agitation lui font prendre une couleur jaune dorée très-belle (*a*)

7. Le Sel volatil sulphureux se dissout en très-petite quantité dans la liqueur, elle se change cependant en un verd assez clair après quelque-tems.

8.

(*a*) Toutes les fois que je ne parlerai point des fleurs de violette & du papier bleu, c' est parceque je n' y aurai remarqué aucune altération sensible.

8. Le Sel de Glauber ſe diſſout en très-grande quantité dans la liqueur, & lui fait prendre auſſitôt une très-belle couleur verte.

9. L'alun ſe diſſout de même en grande quantité, & produit une couleur violette qui diſparoît enſuite & ſe change en un verd ſale. Les fleurs de violette & le papier bleu changent auſſi en rouge; il ſe fait au reſte un précipité conſidérable dans le commencement qui ſemble cependant diminuer par la ſuite.

10. L'alun de plume artificiel dont j'ai rendu compte dans le mémoire précédent ſe diſſout encore en plus grande quantité, & fait prendre une très-belle couleur de cerise à la liqueur, aux fleurs de violette & au papier bleu.

11. Le vitriol verd communiqua à la liqueur une couleur verd d'olive, parut changer foiblement en rouge les fleurs de violette, & le papier bleu prit une teinte d'un gris-rougeâtre; il y eut auſſi dans ce mélange un précipité conſidérable (*b*)

12. Le vitriol de cuivre paroît produire dans le tems même de la diſſolution un peu de changement, & la liqueur prend à la ſuite une belle couleur verte, de même que les fleurs de violette qui ſe chargent d'une nuance tout-à-fait ſemblable à celle du verdet: le papier bleu au contraire ſemble relever un peu ſa couleur naturelle.

(*b*) Dans le doûte que le vitriol vert que j'avois emploïé n'eut ſouffert une eſpéce de décompoſition, j'y ajoûtai un peu d'acide vitriolique, ce qui produiſit en effet une eſpéce de gonflement qui ne reſſembloit pas mal à un mouvement de fermentation; pour m'aſsûrer néanmoins qu'il ne ſe trouvoit pas une ſurabondance d'acide, je projettai par intervalle des petites quantités de limaille de fer juſqu'à ce qu'il ne parut plus de mouvement; la liqueur en queſtion prit une couleur brûne très-foncée qui étoit à-peu-près la même que celle qu'on obtient en mettant de l'eau avec le charbon qui réſulte de la combinaiſon de l'acide vitriolique & du ſirop §. 2. de même que le papier bleu; les fleurs de violette au contraire devinrent d'un très-beau rouge.

13. L' huile de tartre commence par communiquer une couleur jaune à la liqueur qui ſe change enſuite en verd à meſure que la quantité du ſirop eſt plus grande ; cette couleur cependant ne ſe ſoûtient pas & redevient jaune orangé ; les fleurs de violette développent un bien plus beau verd qui ſe change de même en jaune à meſure que l' humidité s' évapore & qui paroît d'un blanc ſale lorſque les fleurs ſont ſéches.

14. Le Sel de tartre ſe diſſout en très-grande quantité, communique d' abord une belle couleur verte à la liqueur & paroît la partager en deux parties dont la ſupérieure eſt un coagulum blanc, & l' inférieure eſt une eſpéce de précipité vert trés-foncé : après quelque tems cependant cette liqueur prend une couleur jaune orangé.

15. La Chaux-vive change cette liqueur en un verd très-clair après avoir paſſé par le jaune comme celle qui eſt mêlée à l' huile de tartre §. 13., & jaunit de même enſuite.

16. La Chaux lavée change la liqueur dans le moment du mélange en verd-clair qui paſſe enſuite au jaunâtre.

17. Les os calcinés changent la liqueur en verd-clair, & cette couleur s' y ſoûtient.

Je crois devoir faire remarquer que le Sel de tartre, la Chaux-vive, la Chaux lavée, les os calcinés & le Sel volatil de Sel ammoniac produiſent un mouvement dans la liqueur qui reſſemble beaucoup à un mouvement de fermentation.

18. Le Sel volatil fait prendre une couleur verte à la liqueur qui ſe change enſuite en jaune orangé.

19. L' eſprit volatil de Sel ammoniac change auſſitôt en verd un peu jaunâtre cette liqueur qui ne ſe ſoûtient pas & qui paſſe au jaune &c. Et en un très-beau verd les fleurs de violette ; mais ce changement eſt encore plus prompt avec l' eau de luce, cette couleur néanmoins ſe change auſſi en jaune.

20.

20. L'huile de vitriol combinée avec l'huile & étenduë ensuite dans l'eau, procura une très-belle couleur à la liqueur, & changea les fleurs de violette en très-beau rouge.

21. Si l'eau-forte que l'on mêle avec la liqueur en question est en trop grande quantité, elle ne prend pas une belle couleur rouge, encore est-ce plutôt un jaune doré, qu'un véritable rouge qu'on peut lui faire prendre, quelque soit le rapport de ces substances entr'elles; il en est de même en emploïant le sirop tout pur; le papier bleu prend un rouge de brique de même que les fleurs de violette qui en différent cependant de quelques nuances; ce rouge quoiqu'il en soit n'est jamais beau & passe d'abord au jaune citron comme la liqueur reposée qui contient l'Alkali fixe.

22. Le Salpêtre se dissout en grande quantité dans la liqueur & lui fait prendre une couleur verte.

23. L'acide marin fait prendre une très-belle couleur rouge ponçeau à la liqueur qui est d'autant plus foncée, que la quantité de cet acide est moins grande: lorsqu'on en mêle au sirop sans être délayée, il se manifeste une très-belle couleur de rubis qui ressemble parfaitement à du vin.

24. Le Sel marin ne se dissout pas en aussi grande quantité dans cette liqueur que le salpêtre & lui fait prendre une couleur verte foncée.

25. Le Sel ammoniac fait changer en verd brun la liqueur en question.

26. La limaille de fer semble aussi faire prendre une couleur verte foncée à cette liqueur.

27. La pierre à cautere fait prendre dans l'instant du mélange une belle couleur verte à cette liqueur qui se change ensuite en jaune.

28. La ſubſtance ſaline dont j'ai parlé dans le mémoire précédent §. 69. paroît n'avoir produit aucun changement à la couleur du ſirop dans le moment du mélange, mais elle eſt dans la ſuite devenuë de la couleur des eaux croupiſſantes.

29. Le Sel de ſaturne a fait prendre une couleur verte à la liqueur en queſtion, & il s'eſt fait une ſéparation, en forme de précipité, des parties extractives qui n'avoient rien ſouffert dans l'intenſité de la couleur.

30. La crême de tartre n'a auſſi produit aucun changement dans le tems du mélange, mais elle lui a fait prendre une belle couleur de vin.

31. Le précipité blanc a converti la liqueur en bleu pâle & enſuite en verd-clair.

32. Le turbith minéral l'a changée en verd.

Je dois avertir, quoique la choſe ſoit fort naturelle, que ni l'une, ni l'autre de ces ſubſtances ne s'eſt pas diſſoûte dans la liqueur.

33. Un Sel ſéléniteux chargé de beaucoup de matière phlogiſtique & par conſéquent très-diſſoluble dans l'eau, comme je l'ai fait remarquer dans le mémoire précédent, a changé cette liqueur en verd qui ne s'eſt pas ſoûtenu, & qui a changé en jaune orangé avec un précipité très-abondant.

34. La pierre à plâtre qui n'eſt comme l'on ſait qu'une ſélénite calcaire naturelle, n'a point changé cette couleur au moment que je l'y ai miſe, elle parut cependant en avoir altéré la nuance dans la ſuite.

35. Le plâtre cependant m'a paru y avoir occaſionné quelque changement dans l'inſtant du mélange, qui devint d'autant plus ſenſible dans la ſuite; ſa couleur étoit d'un verd jaunâtre.

36. Le colcotar a fait prendre dans le moment du mélange une couleur rouge à la liqueur, & lorſqu'il ſe fut entiè-

entièrement précipité, elle devint d' un très-beau jaune doré.

37. La noix de galle lui a communiqué une couleur brûne olivâtre qui s' eſt ſoûtenuë & qui ne differoit pas de celle qui réſulte d' un mélange de cette diſſolution avec un peu d' huile graſſe & beaucoup d' acide vitriolique ; elle reſſembloit très-bien auſſi à celles dont j'ai rendu compte dans la note du §. 11.

38. La liqueur délayée dans autant d' eau qu' il lui en fallut pour paſſer de la couleur bleüe à la verte eſt repaſſée au bleu par un peu de ſavon que j' y ai fait diſſoudre.

39. Du Sel de Glauber, du ſalpêtre & du Sel marin diſſous ſucceſſivement dans la liqueur en queſtion & mêlés enſuite avec de l' eſprit urineux qui la fit changer tout de ſuite en verd-clair, repaſſa au bleu par l' addition du ſavon diſſout & qui s' eſt coagulé dans ce mélange, comme il étoit aſſez naturel de le préſumer, ſi quelqu'un des Sels n' avoit pas été à baze d'Alkali fixe, ce qui me fait conjecturer que l' eſprit volatil contenoit apparemment encore un peu d' acide marin.

40. Je mêlai une petite quantité de liqueur renduë rouge par l' acide vitriolique avec une grande quantité de celle qui étoit d' un jaune-clair par le mélange de l' huile de tartre, & je vis, qu' au moment du point de ſaturation, le mélange commença à verdir & ſe fonça continuellement ſans jamais perdre de ſa couleur, comme faiſoit l' huile de tartre malgré que je l' en euſſe chargée.

41. Sans entrer dans une récapitulation métodique des faits dont j' ai rendu compte, il me paroît de pouvoir conclurre que la couleur rouge prouve tout au moins une ſurabondance d' acide dans la ſubſtance mêlée à la diſſolution du ſirop ; pour ce qui eſt de la couleur verte je me crois bien fondé à dire d' après le Célébre M. Neu-

MANN qu' elle eſt une preuve très-équivoque de la préſence d'un Alkali, & qu'elle eſt même fauſſe, c'eſt-à-dire qu'elle prouve la préſence d' une ſubſtance neutre très-diſſoluble lorſque cette couleur ſe ſoûtient; car ſi la ſubſtance qu'on a mêlée eſt un Alkali fixe ou (c) volatil, ou enfin ſi ce principe y domine la liqueur doit prendre une couleur jaune qui ſera plus ou moins foncée à meſure que ce principe s' y trouvera en plus ou moins grande quantité.

42. J' ai de même lieu de penſer que la couleur bleüe ne paſſe au verd par l' interpoſition des parties ſalines qui ſe ſont diſſoûtes dans la liqueur que parceque les parties blanches du mucilage ſe trouvent plus diviſées entr' elles (*d*) car du moment que ces parties ſe rapprochent, ou qu' on y en introduit de nouvelles, comme cela arrive par le mélange du ſavon, la couleur bleüe ſe manifeſte &

(*c*) En effet nous avons fait obſerver qu' une diſſolution renduë rouge par l' addition d' un acide, commençoit à ſe changer en verd avant d' avoir atteint le point de ſaturation lorſqu'on la mêloit à une diſſolution du même ſirop rendu jaune par l' action d'un Alkali fixe, & que cette couleur continuoit à ſe foncer à meſure que la quantité de la liqueur jaune étoit plus grande : *il ſuit de-là qu' il n' eſt pas néceſſaire que le Sel ſoit parfaitement neutre, mais je dois faire remarquer que ſi l' excès de ſaturation dépend de l' Alkali fixe, la couleur ne ſe ſoûtient pas & paſſe au jaune.*

(*d*) Je crois que ce n' eſt pas dans d' autres raiſons que dans celle de l'interpoſition produite par la diſſolution des ſubſtances ſalines qu' on doit chercher le changement de la couleur bleüe en verte, puiſque les Sels ou les matières qui ne ſont pas ou qui ſont du moins très-peu diſſolubles dans l' eau & qui d' ailleurs par la fineſſe de leurs parties ne peuvent ſe ſoûtenir dans la liqueur, n' y produiſent aucun changement & qu'au contraire plus les Sels ſont diſſolubles, ou plus les matières ſont réduites en des parties aſſez déliées pour être ſoûtenües, plus le changement eſt prompt & conſidérable. C'eſt auſſi ce qui paroît exactement prouvé par le retour au bleu au moïen du ſavon; car cette ſubſtance comme l' on ſait ne préſente pas une diſſolution parfaite dans l' eau, & elle n' y eſt que miſcible, d' où il ſuit naturellement l' opacité des parties aqueuſes qui ne tenant point du ſirop en diſſolution étoient auparavant diaphanes & faiſoient paroître la couleur verte.
Nous pouvons donc déduire de-là que la denſité du milieu produit ſeule ce changement.

& ſe ſoûtient tant que le nouveau coagulum ſe ſoûtient lui-même par petits floccons dans la liqueur.

43. Si la ſubſtance ſaline outre à l'interpoſition de ſes parties dans celles du ſirop diſſout, a encore de l'action ſur ces parties mêmes, il en réſulte la couleur jaune ou la couleur rouge, ſuivant que cette action eſt plus ou moins vive, de manière que (*e*) la couleur jaune ne ſeroit que la dilatation des parties qui du bleu ont paſſé au verd,

(*e*) L'action des acides & des Alkalis ſur les parties extractives dont eſt composé le ſirop eſt ſi différente, qu'on peut avec fondement avancer que l'une eſt tout-à-fait oppoſée à l'autre ; il me paroît cependant qu'elle ne diffère que par l'activité avec laquelle elle ſe fait, mais ce ſeroit une queſtion qui méneroit trop loin, & je me bornerai à faire obſerver que l'action de l'Alkali fixe conſiſte en ce qu'elle diſpoſe les parties extractives à la fermentation putride: en effet en ſurchargeant une diſſolution de ſirop dans l'eau d'Alkali fixe il ſe développe après quelques heures une puiſſante odeur d'eſprit urineux qui diminuë cependant enſuite par de nouvelles additions d'Alkali fixe & prend alors l'odeur & la couleur même de l'urine qui commence à ſe putréfier: or comme la putréfaction ne fait que déſunir par une eſpéce d'extenſion les parties des ſubſtances qui en ſont capables, je crois d'être bien fondé à penſer que c'eſt de la raréfaction des parties qui conſtituent la couleur verte, qu'on doit répéter le changement de cette couleur en jaune. Les acides au contraire loin de diſpoſer les matières à la fermentation putride, ſont faites pour en empêcher l'effet comme cela eſt connu de tout le monde, & j'ai lieu de croire que c'eſt en racorniſſant les molécules colorantes qu'ils produiſent les changemens des couleurs; de manière que ces parties préſentent de plus grands interſtices entr'elles pendant qu'elles ſont réduites à un plus petit volume pour les nuances de la couleur rouge, & qu'elles le ſont au plus petit poſſible pour le noir le plus foncé

Il me paroît qu'on ne peut mieux comparer cette action des acides & des Alkalis qu'à ce que l'on voit arriver aux ſubſtances animales ou végétales expoſées à l'action immédiate du feu, ou bien à celle de cet agent modifiée par l'intermède de l'eau; car dans le premier cas, ces ſubſtances ſouffrent une contraction plus ou moins grande à méſure que l'action eſt plus ou moins vive, & au contraire dans la ſeconde elles s'étendent & ſe raréfient.

Cette différence cependant ne me paroît produite que parceque dans les acides l'action étant trop vive attaque d'abord la ſurface des ſubſtances, & ſe porte par une ſucceſſion rapide ſur les parties intérieures, au lieu que dans les Alkalis cette action eſt plus uniforme & s'étend en même-tems ſur toutes les parties de la ſubſtance.

& le rouge une plus grande atténuation de ces parties : le noir enfin ne ſauroit être que la deſtruction, ou pour parler plus exactement la diviſion mécanique la plus forte poſſible.

44. Cette diviſion ne me paroît être produite que par l'atténuation qui arrive au phlogiſtique, car je ſuis parvenu à faire du bleu par une ſurabondance de cette matière avec une diſſolution de vitriol vert que j' avois fait longtems boüillir pour en ſéparer la terre férugineuſe, & cela au moïen d' une grande quantité d' une forte décoction de noix de galle dans la diſſolution en queſtion ; ce mélange après avoir paſſé par la couleur noire de différentes nuances & par le violet devint bleu de Roi lorſqu' il eut été parfaitement deſſéché ; je dois cependant avertir que M. ROUELLE avoit déja fait une pareille préparation comme je l' ai vû rapportée depuis par M. l' Abbé MENON dans ſon ſecond mémoire ſur le bleu de Pruſſe inſéré dans les mém. de Math. & de Phyſ. préſentés à l' Ac. Roy. des Sci. par divers Savans Tom. premier pag. 580.

45. Nous déduirons enfin de ce mémoire que pour que la couleur bleüe ſe change en verd il n' eſt pas néceſſaire que la fécule colorante ſoit atténuée, & qu' il ſuffit qu' il ſe faſſe une interpoſition des parties d' une ſubſtance blanche ou jaune qui donnent de l' opacité aux interſtices du milieu interpoſé entre le molécules colorantes.

46. Qu' il n'en eſt cependant pas de même de la couleur jaune ; car elle eſt ſans contredit le réſultat d' une dilatation qui ſe fait dans ces parties, de manière que leur denſité ſe trouve diminuée.

Que le rouge dépend d' une plus grande diviſion des parties de celles-ci, & que la noire n' eſt pour ainſi dire qu' une diviſion ſi intime, qu' on peut la nommer du nom de deſtruction.

47. Tout ce mécanisme cependant ne fait son jeu qu' en vertu de l' action que les substances ont sur le phlogistique.

48. Lors qu' un corps est réduit en charbon, ce n'est pas qu' on en ait enlevé le phlogistique, je croirois plus volontiers qu' on n' a fait qu' en changer la distribution; les corps blancs me paroissent être ceux qui en sont les plus dépourvus, ou dumoins qui n' en retiennent que la quantité qui leur est nécessaire pour avoir les propriétés communes aux corps; d' où il résulte aussi une plus grande difficulté à les en priver. Ce qu' il y a de trés-positif, c' est que la Chaux & le Sel de potasse, de même que le Sel de tartre deviennent bleus étant calcinés, au moins, à vase clos avec des matières qui contiennent beaucoup de phlogistique.

J' aurai occasion de développer plus amplement & plus démonstrativement dans un autre mémoire les vérités que je n' ai fait pour ainsi dire qu' indiquer dans celui-ci: il me suffit en attendant de faire remarquer la conformité de ces expériences & de ces inductions avec ce qu' en pensoit le célébre Chevalier NEWTON: voici ses propres termes „ nec minus eodem facit, quod ex diversorum li-„ quorum permixtione, certæ colorum species permiros „ interdum ac notatu dignissimos ortus atque mutationes „ habeant: quorum quidem caussa nulli rei verisimilius & „ rationi congruentius attribui potest, quam quod corpus-„ cula salina, quæ insunt in uno liquore, agant varie in „ corpuscula colorata alterius, vel coalescant cum illis; „ adeo ut illa inde adaugeantur vel extenuentur, (quo non „ modo magnitudo, verum etiam densitas ipsorum immu-„ tari potest) vel dividantur in corpuscula adhuc minora, „ (quo liquor, qui fuerat coloratus, poterit pellucidus „ evadere) vel consocientur complura inter se, & in gru-„ mulos coalescant, (quo ex binis liquoribus pellucidis, „ confieri poterit liquor coloratus.) NEWT: Opt: L. II. P. 3.ª Prop. V.ª pag. 98.

Fautes qui ſe ſont gliſsées dans le Mémoire ſur la Chaux, & qu'on prie le Lecteur de corriger.

Page	*Ligne*	FAUTES.	LISEZ.
87	24	; - - - - - -	effacés
104	1	$\frac{6}{8}$ - - - - - -	$\frac{6}{gr.}$
105	27	. - - - - - -	,
106	11	graiſſes . . .	goutes de graiſſe
123 (dans le texte)	4	cauſtique ſublimé	cauſtique. Sublimé
143	derniere	il me ne - -	il ne me
144	2	des matras - -	du matras
Ibid.	21	production - -	graduation
Ibid.	22	Raumur - - -	Reaumur
Ibid.	24	il ſe détruit avec	il ne ſe détruit pas avec
Ib. dans la note		je tirai - - -	je dirai
147 dans la note		eſt-il moins vrai	n'eſt-il pas moins vrai.

JOHANNIS-BAPTISTAE GABER

De humoribus animalibus

SPECIMEN TERTIUM.

Quum experimenta de ſpontanea humorum mutatione perſequerer, paullatim eo deductus ſum, ut varias etiam partes explorarem, quibus humores ſecundum naturam efficiuntur, atque adeo productiones varias tum albuminoſae partis, quae ſerum conſtituit, tum lymphaticae, & aqueae ad examen revocarem. Hinc varia de ruyſchiana membrana, de flocculis, quos in calida miſſus ſanguis gignit, de fibroſa baſi cruoris inſulam efformante, de ſale ſanguinis eſſentiali tentamina nata ſunt, quae minus fortaſſe perfecta, & abſoluta, hic nullo alio ordine deſcripſi, quam quo ſe mihi primum obtulerunt.

1. Seri partem concreſcibilem ab aquoſa frigoris ope ſeparabam, partem nempe aqueam, quae primum, & minori frigore concreſcebat a parte reliqua, quae tardius congelabatur, ſejungebam, eaſque in diſtinctis vaſis liqueſcere ſinebam. Prior illa liquorem exhibebat limpidum, penitus in ignem difflabilem, ex acidis mineralibus non coagulabilem, a quo per digeſtionem nihil ſeparabatur; pars altera liquorem praebebat denſiorem, ſero coloratiorem, viſcidulum, igne, & acidis coagulabilem, & digeſtionis ope in clauſis vaſis in puriforme liquamen prorſus abeuntem perpauca omnino aqua ſupernatante.

2. Ex quo confirmatur albuminoſam partem ſeri eam eſſe, quae in pus ſecedat, atque hinc fieri, ut eadem omnino depoſita ſupernatans liquor concreſcibilem naturam amittat (*a*). Ex eo etiam experimento definiri commode

 poteſt,

a) Specim. II. §. 20.

poteſt, qua proportione albuminoſae partes ſe habeant ad aquoſas in ſero contentas: atque inſuper deprehendimus partem ſeri aquoſam concreſcibili parti propemodum aequalem eſſe. Quae porro methodus horum elementorum proportionem definiendi minime fallax, coeteriſque anteponenda videtur (*b*).

3. Diximus corium, quod cruoroſam inſulam pleuriticorum obtegit, alkalicis volatilibus ſolvi, mox eorum evaporatione iterum concreſcere, ita tamen ut priſtinam duritiem, & colorem non recuperet, ſed in tremulae gelatinae ſpeciem tantummodo coëat (*c*). Libuit autem experiri quid eveniret, ſi ejuſmodi ſolutioni, aut aqua, aut acida admiſcerentur. Itaque admixta aqua, ſoluta membrana gelatinae ſpecie ad liquoris ſuperficiem colligebatur; quo fit, ut ipſa ſic ſoluta ſaponaceam indolem non adquirat, quum aqua ſolubilis non efficiatur. Quod ſi vero in eam ſolutionem ſpiritum nitri immitterem, ſoluta cruſta ad fundum praeceps ferebatur, & priſtinam albedinem, & duritiem referebat. Conſtat igitur ſpeciem, quam exhibet, gelatinae aemulam, dum aut alkalini evaporatione, aut aquae admixtione concreſcit, tribuendam eſſe aquae, quam in poris ſuis concreſcendo retinet, indeque fieri, ut acida mineralia, quae aquam non minus, quam alkali abripiunt, priſtinam formam, ac denſitatem eidem reſtituant.

4. Libuit etiam indolem ſabuloſae materiae, in quam temporis progreſſu ſeri ſedimentum puriforme faceſſit per experimenta inveſtigare (*d*). Hujuſmodi itaque materiem in varios liquores immiſi, aquam, vini ſpiritum, acetum diſtillatum, acidum nitri, alkali volatile. Tribus prioribus menſtruis ſoluta nullatenus eſt; duobus poſtremis prompte, & perfecte ſolvebatur. Ex quo adparet ea concrementa ſalina

(*b*) Confer *Ill. Haller* Elementor. Phyſiol. T. II. pag. 124.
(*c*) Specim. II. §. 30.
(*d*) Confer. Specim. II. §. 20.

ſalina non eſſe, quum aqua non ſolvantur, & albuminoſae ſeri parti in eo eſſe ſimilia, quod alkohole ſolvi non poſſint, ſolvantur vero alkalicis volatilibus; in eo autem differre, quod ſolvantur acidis mineralibus, quum ſeri pars gelatinoſa ab iiſdem cogatur.

5. Ex iis etiam conſtat concrementa ea terrea a tophacea podagrorum materia differre; nam haec aceto diſtillato, & ſpiritu ſalis intra viginti-quatuor horas ſolvebatur, contra in ſpiritu ſalis ammoniaci, c. c., urinae integra perſtabat (*e*), ut propterea iis ſolveretur, in quibus terrea materies integra perdurabat, iiſque reſiſteret, a quibus terreum hoc puris concrementum ſolvebatur. Eodem modo a calculis differre conſtabit tum felleis, tum urinariis, quorum aliquos in alkalicis iiſdem integros permanere obſervavimus.

6. Quum porro corium pleuriticum in vaſis clauſis ſponte colliquatum (*f*) diu aſſervaſſem, animadverti turbidum eum liquorem in tophos abire iis omnino ſimiles, quos purulentum ſeri ſedimentum produxerat, quique ſimiliter tentati eamdem naturam oſtendebant (4), ut inde probabile fiat colliquatum corium a purulento ſeri ſedimento minus diſcrepare, quam ſubito aſpectu (*g*) ex aliqua conſiſtentiae, & coloris diverſitate nobis differre viſa fuerint, & confirmatur eorum ſententia, qui cenſent unam eamdemque utriuſque materiem eſſe (*h*), albuminoſam nimirum ſeri partem, quod aliis etiam experimentis conſentaneum eſt, quae hic continenter adnotamus.

7. Inſulam cruoroſam in minima fragmenta comminutam repetita aquae affuſione eluebam, ut cruore per aquam

abrepto

(*e*) *Pinelli*. Saggio delle tranſazioni. T. IV. pag. 157.
(*f*) Specim. II. §. 20.
(*g*) Specim. II. §. 26.
(*h*) *Celeb. Sauvages* de l' inflammation §. 87.
Cl. De-Haen Part. II. Cap. II. pag. 22.
Cl. Queſnay de la ſaignée pag. 419. 420.

abrepto sola ipsius insulae pars fibrosa, albidaque superesset (*i*); tum eam partem fibrosam variis iis experimentis exploravi, quae circa corium pleuriticum alias institueram. Eamdem omnino naturam constanter demonstravit: nempe clausis vasis digesta in liquamen abibat, alkohole, & acidis mineralibus indurabatur, alkalicis volatilibus perfecte solvebatur, eorum tamen evaporatione concretura.

8. Ex quibus demonstratur corium pleuriticum ex eadem materie constare, ex qua fibrata, albidaque insulae cruorosae matrix constituitur, albuminosa nempe seri portione, uti MALPIGHIO (*l*) HALLERO (*m*), aliisque summis Viris visum fuerat. Hinc porro intelligitur cur corium pleuriticum ad superiorem insulae cruorosae faciem constanter adhaereat; cur interdum globulis cruorosis interceptis nonnisi dilutiore colore, majorique duritie id corium a cruorosa insula distinguatur (*n*); cur in scorbuto imminuta cohaesione globulorum sanguineorum ad fibrosam sanguinis partem corium crassius fiat (*o*); cur in inflammationibus prout cruoris quantitas imminuitur corii crassities augeatur (*p*); cur denique corium a nobis observatum fuerit, quod flocculenta corona per serum dispersa cingebatur (*q*); ac postremo cur & tota placenta, & corium pleuriticum aeque parum ferri contineat (*r*).

9. Omnino probabile est educto sanguine, defectuque motus, vel caloris, vel utriusque aqueam seri partem mi-

norem

(*i*) Confer *Malpighium* de polypo pag. 33.
Menghinum Comment. Bononiens. T. II. Part. II. pag. 254.
Cl. Kronaver apud *Hallerum* in addendis Physiolog. T. VIII. Part. II. pag. 139. *Cl. Kronaver* enim opusculo non sine dolore careo.
(*l*) Loc. citat.
(*m*) Tom. II. Physiolog. pag. 126. 127. 128.
(*n*) *Quesnay* loc. citat. flag. 411. 412.
(*o*) *Lind.* Traité du Scorbut.
(*p*) *Quesnay* loc. citat. pag. 415. 416.
(*q*) Specim. II. §. 25. not. d.
(*r*) *Menghini* loc. cit. pag. 255.

norem jam albuminosae partis quantitatem solutam servare posse, hinc excedentem portionem secedere quemadmodum quorumdam salium portio aqua calida solutorum ab eadem frigescente separatur. Portionem hanc albuminis frigore, & quiete coëuntem globulos cruorosos abripere, & insulam constituere, corium vero pleuriticum fieri ab albuminosa parte, quae aut nullos, aut pauciores globulos sanguineos concrescendo abripuit, sive quod frigori magis exposita promptius coierit, sive quod in concretionem magis prona esset, sive quod minorem, quam secundum naturam ad globulos sanguineos adhaesionem haberet, & quidem promptiorem ex frigore congelationem ad corium pleuriticum constituendum conferre, inde erui videtur, quod corium ad superiorem insulae faciem perpetuo adhaereat frigori magis expositam, quamquam corium ipsum sero gravius sit, tum ex eo etiam, quod hyeme corium frequentius occurrat. Majorem albuminosae partis proclivitatem ad cohaesionem ad crustam efformandam conferre ostendunt inflammatorii morbi, in quibus adest frequentissime, ejusque durities seri vim concrescibilem auctam esse testatur. Demum eo etiam spectare imminutam cruoris ad albuminosam partem seri adhaesionem innuere videntur scorbutus, cachexia, hydrops ipse, in quibus morbis aliquando ea alba crusta sanguinem obtegit (*s*).

10. Quum insulae cruorosae non lotae frusta in acido minerali, & alkohole immitterem similiter durescebant, alkalicis vero volatilibus non perinde solvebantur ac si lota fuissent; sed spiritus volatilis cruore tantum inficiebatur, grumus autem nigrior evadebat, ac integer perstabat (*t*). Ex quo constat cruorosos globulos, quibus fibrosa sanguinis

(*s*) Utramque hanc causam conjungit *Ill. Haller* in addendis T. VIII. Physiolog. pag. 142. 143.

(*t*) Eumdem eventum habuit experimentum *Ill. Halleri* T. II. Physiolog. pag. 81.

nis pars obvoluta est, impedire quominus ipsa salibus alkalicis volatilibus dissolvi possit.

11. Quod si sanguis e vena exiliens aqua excipiatur, aqua ipsa globuli sanguinei eluuntur, pars vero albuminosa seri sola fere concrescit in notissimos flocculos, qui tam pauco cruore colorantur, ut fere albidi sint; & quidem eos flocculos eamdem iterum naturam habere, ac corium pleuriticum, aut lotam cruorosam insulam deprehendi, alkohole nimirum indurari, ac in eodem immutatos perstare, spiritu volatili perfecte solvi, digestione in purulentum liquamen abire: perinde nimirum est sive cruorosi globuli per aquam, in quam sanguis e vena exilit, ita diffundantur, ut a concrescente albuminosa seri parte abripi non possint, sive jam abrepti, & cum eadem in insulam coacti repetita aquae affusione deinceps eluantur (7).

12. Ex eadem albuminosa seri parte materies constitui videtur ejus membranae, quae ruyschiana dicta est, quaeque ex concusso sanguine paratur. Sanguinem ab animalis vena intra vitream lagenam excipiebam, exceptum agitata phiala vehementer, ac diu quatiebam, mox fracta phiala, eumdem sanguinem in aliud vas transfundens, observabam totum illum fluidum, spumosum, & admodum coccineum esse, sed in eodem multa coagula dura, albidaque reperiebam, quae corium pleuriticum, & colore, & consistentia referre videbantur. Coagula haec easdem etiam proprietates retinebant, quas modo dictum pleuriticum corium: nam iisdem menstruis solvebantur, iisdem fluidis dura, ac incorrupta persistebant, & intra vas clausum digesta in simile putridum liquamen immutabantur.

13. Igitur ea ruyschiana membrana nihil aliud est nisi albuminosa seri pars, quae sponte concrescens agitatione impeditur, quominus globulos sanguineos secum abripiat; seu potius albuminosa pars, quae interea dum concrescit, intra serum sic eluitur per agitationem, ut globulos sanguineos

neos per ipſum diffundat, quo fit, ut & album colorem praeſeferat, & reliquas albuminoſarum concretionum proprietates poſſideat. Quum vero globuli ſanguinei non cogantur niſi quatenus a coëunte ea albuminoſa parte abripiuntur, inde intelligitur, cur ſanguis a quo ruyſchiana membrana ſeparata eſt, ſolutus maneat (*u*). Quum nonniſi quaedam albuminis portio ſponte a ſero ſecedat, inde intelligitur, cur ſerum, a quo ea determinata albuminis portio jam ſeceſſit, aut quiete in inſulam coëuns, aut agitatione in membranam ruyſchianam abiens, coagulabilem ex acidis mineralibus, alkohole, igne naturam praeſeferat (*v*), etſi nihil ulterius membranae ruyſchianae per agitationem ex illo elici poſſit (*x*). Nempe id ſerum tantam adhuc albuminis quantitatem retinet, quantam ſolutam ſervare poteſt, hinc concreſcibilem naturam ſervat; nec tamen membranam ullam amplius poteſt ſuppeditare, quum ſponte nihil amplius ejus albuminoſae partis dimittere poſſit.

14. Ex his etiam intelligitur cur agitatus ſanguis nullum corium pleuriticum exhibeat, ex eo nempe quod albuminoſa pars, quae in corium fuiſſet coitura, agitatione in Ruyſchii membranam tranſeat. Intelligitur etiam albuminis portionem, quae educto ſanguine ſponte coaleſcit, & inſulam efformat (*y*) non tam defectu motus, quam frigore coire, quum agitato ſanguine ſimiliter ſecedat, & in ruyſchianam membranam immutetur, quod & allatis ſuperius obſervationibus confirmari videtur, & pro demonſtrato haberi poteſt, ſi modo verum ſit ſanguinem in calore animalis aſſervatum diutiſſime fluidum permanere (*z*).

15. Ex his omnibus conſequens erit fibroſam inſulae cruoroſae partem, concrementa, quae ſanguis in aquam emiſ-

(*u*) *Cl. De-Haen* pag. 90. 91. 92.
(*v*) Idem loc. citat.
(*x*) Idem pag. 88. 89. & 93. 94.
(*y*) *Sydenham* de Pleuritide.
(*z*) *Schvvenche* Haematol. pag. 90. 103. 105.

emiſſus facit, ruyſchianam membranam, corium pleuriticum, unam eamdemque naturam praeſeferre, & ex eadem albuminoſa ſeri materie conſtitui: propterea arbitramur Auctores, qui a noſtris diſcrepantia experimenta propoſuerunt, & aut lotam cruoroſam inſulam, aut flocculos ex ſanguine in calidam miſſo procreatos vini ſpiritu ſolvi adfirmarunt, aut eodem aqueo nimis uſos fuiſſe, aut experimenta in apertis vaſis inſtituiſſe, ut ſpirituoſa parte abeunte, haec deinceps orta putredine ſponte ſolverentur, aut aliqua alia ratione in errorem inductos fuiſſe. In variis enim experimentis, in quibus vini ſpiritum communem, nec probe rectificatum adhibuimus, conſtanter tamen varia ea coagula non ſecus ac corium pleuriticum indurari obſervavimus, & ſic indurata a longo jam tempore in eo liquore integra ſervamus.

16. Placuit praeterea alkalinorum fixorum actionem in varias memoratas albuminoſas concretiones per experimenta inveſtigare, quum omnes ſpiritu volatili ſalis ammoniaci calce parato indiſcriminatim ſolvi conſtitiſſet; at contra comperimus perinde omnes oleo tartari per deliquium non ſecus, ac vini ſpiritu induratas fuiſſe, diuque in eodem, quamvis calori digeſtionis expoſitas, immutatas perſtitiſſe, ut cenſeam ſimiliter, ac in vini ſpiritu, in eo liquore ad plures etiam annos integras poſſe ſervari.

17. Ex his ipſis, quae hactenus attulimus experimentis lucem aliquam oriri exiſtimo ad eam quaeſtionem dirimendam inter Viros Cl. acriter noſtris temporibus agitatam, num alkalica ſalia putredinem arceant, vel promoveant. Quae quidem quaeſtio vix poterat ex odore definiri, quum alkalicum fixum ex animalibus humoribus etiam ſanis odorem extricet alkalini volatilis, volatile vero ſal ipſum odore ſuo dubium relinquat, utrum odor corporis, cui admixtum fuit ipſi adſcribendum ſit, an novo volatili ſali ex putredine orto. At cum certum ſit ſerum per

putre-

putredinem liquari, & coagulabilem indolem deponere, inde confirmari poteſt utrumque alkali putredinem impedire. Etenim in allatis experimentis pars ſeri gelatinoſa liquore tartari indureſcebat, & ſic indurata in eodem diutiſſime perſiſtebat, & licet in ſpiritu ſalis ammoniaci calce parato ſoluta ſatis diu ſervaretur, concreſcibilem tamen indolem conſtanter ſervabat, quam diſſipato per evaporationem alkali ſponte concreſcens oſtendebat, ut propterea utrumque alkali inter antiſeptica, & quidem actuoſiora referri debeat.

18. Demum etiam aquae calcis actionem in cruſtam phlogiſticam, aliaſque albuminoſas concretiones experimentis inveſtigans comperi haud minus prompte ab hac, quam ſpiritu alkalino ſalis ammoniaci calce parato in tremulae gelatinae ſpeciem primum converſas, mox perfecte diſſolutas fuiſſe, adjecta aqua forti in priſtinam albi coaguli ſpeciem ad liquoris fundum iterum dejectas fuiſſe.

19. Cupiebam etiam ſalem ſanguinis eſſentialem in aquea ſeri portione invenire. Quare aqueam eam portionem, tum congelatione (1) ab albuminoſa ſeparavi, tum a coagulato per ignem ſero ſponte extillantem excepi. Sed aut parciorem obtinui aquam, aut craſſiorem, & turbidam, ut nihil inde ad propoſitum mihi finem exoriretur. Itaque alio rem eamdem tentamine adgreſſus ſum. Noveram ex Haenio (z′) ſerum in fervidam immiſſum lacteam ipſam reddere, nec ullum coagulum exhibere, quantumvis aqua ebulliat; conjectabam igitur futurum, ut ſi albuminoſas ſeri partes per aquam ſic diſperſas ab eadem ſecernerem, mox aquoſam partem debito modo evaporare ſinerem, ſalinae partis in eadem contentae cryſtallos obtinerem. At quum magnam aquae quantitatem, immiſſo in ipſam ſero, per ebullitionem reddidiſſem lacteam, philtratione ſtatim per

(z′) Loc. citat. pag. 86. 87.

chartam adeptus equidem ſum limpidam, ac aqueam ſeri partem a concreſcibili ita ſegregatam, ut in igne evaporando concentrari poſſet; ſed quamvis ſic evaporata ſalſum admodum ſaporem adquireret, tamen frigido loco ſervata cryſtallos nunquam dimiſit; ex quo conjicere eſt ſalem ſanguinis nativum hujuſmodi eſſe, ut nunquam, aut aegre in cryſtallos concreſcat. Sed de hac re alias fortaſſe.

20. Duo reliqua mihi ſunt experimenta, quae breviter indicabo, alterum in animalibus ex nimio calore ſuffocatis, alterum in iis, quae inedia conficiuntur. Quum enim ex his duobus cauſis Cl. Scriptores humorum putredinem induci, indeque ea animalia enecari tradiderint, idcirco opportunum cenſui eamdem rem experimento etiam meo explorare.

21. Duo cuniculi in hypocauſto ad 35° thermom. reaumuriani calefacto ex dyſpnaea, & virium proſtratione interierunt. Primus quidem ſpatio horarum XIII., alter horarum XVIII. Pulmones inflammati inventi ſunt, odor nullus foetidus, nec ſanguis, nec bilis cum acidis efferbuit. Feles robuſta in hypocauſto inter 38. & 40. ejuſdem therm. calefacto horis ſex interiit. Cuniculus alter, quum in eodem calore duabus horis permanſiſſet, vivus adhuc ex eodem eductus eſt, & brevi poſtea interiit: utrumque animal pulmones inflammatos oſtendit, neutrum vel foetuit, vel quodpiam aliud putredinis indicium praebuit. Conjectamus igitur Viros Cl., qui alium ſimilium experimentorum eventum ſortiti ſunt, forte animalia ad aliquod tempus in calente loco reliquiſſe poſtquam extincta eſſent, ubi mortuae carnes in corruptionem vergere citiſſime debuerunt: nec dubitamus calorem ex interna cauſa, auctoque motu natum, longe diverſum in animalium humores effectum gignere poſſe.

22. Illud exquirere volui, utrum animalia, quae inedia pereunt, orta humorum putredine extinguerentur. Quod

etſi,

etsi pro certo a multis proponatur, dubia tamen de ea re Cl. Virorum me ad experimentum iterandum excitarunt (ζ''). Cuniculum itaque, quem fames intra dies 21. confecerat ex convulsionibus diligenter explorabam. In eo pinguedineam telam adipe destitutam, & exsuccam observavi; ventriculum, & intestina vacua, nisi quod in intestinis identidem flavae bilis ramenta occurrerent, viscera coetera sana erant. Odor nihil putredinosi emittebat, neque humores aut foetebant, aut cum acidis effervescebant; quare credibile est, aut in carnivoris animalibus alium futurum experimenti eventum, aut alias praeter inediam putredinis causas adjunctas fuisse, ut corrupta, & prava alimenta, quibus observata a Cl. Viris, quorum fides minime suspecta est, putredinis signa tribui possint.

(ζ'') *Morgagni* de caus. & sed. epist. 24. §. 6.

CAROLI

CAROLI ALLIONII

Stirpium aliquot descriptiones cum duorum novorum generum constitutione.

DESCRIPTIO PRIMA.

Ortegia *dichotoma, axillis ramorum unifloris* Tab. IV. f. 1.

EX radice perenni, longa, tereti, fibrosa cespes nascitur caulium procumbentium, qui ad cubitalem usque longitudinem sese extendunt. Caules continuo dichotomi, quandoque in primis ramis trichotomi, quadrangulares, striati, subasperi, virides, articulati, supra nodosi nodo aliquantum albescente.

Folia primum elliptica, deinde linearia, crassula, acuminata, sessilia, opposita, ad geniculos tantum nascuntur, subaspera, supra canaliculata, subtus longitudinali prominente nervulo donata.

Flos in alis dichotomiae ubique sedet, raro pedunculatus, cujus calyx noctu connivet, diu sole praesertim percussus aperitur, calycinis foliis erectis. Postremi rami duobus floribus finiuntur, uno sessili in ala una foliorum, altero pedunculato, sive ramum finiente, qui paullo infra calycem duas bracteas habet, foliolis ramorum divisionibus oppositis similes.

Calyx ex quinque foliolis concavis, elliptico-lanceolatis, viridibus, margine membranaceo albicantibus componitur. Calycis foliolorum tria interiora florem proprie continent, & longiora sunt; folia duo exteriora aliquantum breviora.

Germen trigonum est instructum stylo viridi, simplici embryonis longitudinem habente, cum stigmate rotundo.

Antherae

Antherae luteae, trigonae, trisulcatae in gremio interiorum foliorum brevibus filamentis insident, calyce breviores, stylo parum altiores.

Capsula calyce persistente comprehensa, & ex ovato conica, apice trigona, tribus valvis aperitur, unilocularis, semina minuta continens oblonga coloris spadicei.

In saxosis prope *Javenium* nascitur nova haec *Ortegiae* species, cujus nullam mentionem apud rei herbariae Scriptores reperire licuit. Differt porro ab *Ortegia* LINNAEI spec. *plant. pag.* 49. sive *Juncaria Salmantica* CLUS. *hist. pag. CLXXIV.* radice perenni, habitu dichotomo, floribus in foliorum alis sessilibus, & caulibus quadrangularibus, qui in *Juncaria Salmaticensi* Juncorum ad instar teretes esse videntur, quemadmodum ex Clusiana Icone conjicere licet.

DESCRIPTIO II.

BASSIA *Tab. IV. f.* 2.

NOvum hoc plantae genus, cui *Bassiae* nomen instituo, radicem teretem, ramosam, fibrosam, perennem habet, caulem autem rotundum, parum firmum, continuo, & sine ordine ramosum, ramis iterum similiter ramosis. Primi caulis rami fere decumbunt. Tota planta villo hirsuta est. Ejus altitudo spithamam unam aut alteram ad summum aequat.

Folia lanceolato-linearia sunt, crassula, compressa, sessilia, alterne, seu potius inordinatim dense posita. Duo autem simul nasci solent, quorum unum duplo longius est, in cujus ala duo flores sessiles adsunt; alterum brevius cum flore uno sessili, & foliorum fasciculo novum ramum facturo.

Flores omnes sessiles sunt in foliorum alis. Flos apetalus; calyx monophyllus, quinquefidus segmentis acutis.

Sta-

Stamina quinque antheras luteas, didymas ſupra calycem exerunt.

Styli duo filiformes ex albo purpurei ex embryone naſcuntur.

Floreſcentia autem abſoluta calycis ſegmenta complanata & coaleſcentia florem claudunt, atque calyx capſula evadit, quae matura ſemen orbiculatum continet obſcuri coloris, non cochleatum, ſed in ſuperiori facie circularem ſulcum inſculptum habens. Ea proportione, qua embryo majorem magnitudinem acquirit, receptaculum in majorem amplitudinem extenditur, & ad baſim calycis quinque apparent flaveſcentes ſpinulae aequali diſtantia inter ſe poſitae. Calycis & receptaculi ſubſtantia firma & coriacea reddita fructum rotundum efficit complanatum, quinque firmulas ſpinas ex ambitu ſtellae in modum radiatas habentem.

Stirpis hujuſce genus inter *chenopodium* & *ſalſolam* ambigit. Ab utroque autem differt ſingulari praeſertim calycis in capſulam mutatione. Quamobrem cum ſui proprii generis conſtitutionem mereri videretur, *Baſſiam* appellandam cenſui in perpetuum amicitiae, gratitudinis, & exiſtimationis monumentum erga doctiſſimum Ferdinandum Bassium Bononienſem, Virum de univerſali naturali Hiſtoria maxime meritum, qui hujuſce plantae ſemina a praeclariſſimo Viro Vitaliano Donati in Aegypto collecta, & in Italiam miſſa benevole communicavit.

DESCRIPTIO III.

Lindernia *Tab. V. fig.* 1.

Plantae quam *Linderniae* nomine voco, radix annua eſt, & ex capillitio teretium albarum fibrarum, modo ſimplicium, modo ramoſarum conſtituitur, ex quo nunc unus, nunc plures caules naſcuntur, qui ſpithamae altitudinem raro

ro attingunt. Ad caulis initium duo oppoſiti rami ſaepe proveniunt; reliquo deinde caule & ramis ſaepius ſimplicibus. Caules tetragoni ſunt, tenuiter ſtriati, angulis acutis, intus cavi, ſexdecim circiter membranas habentes, quae ex axe caulis radiatim naſcuntur. Planta tota, tenera, ſuccoſa, glabra, & viridis eſt.

Folia oppoſita, integerrima, erecto-patentia, oblongo ovata, ſemi-amplexicaulia, ſeſſilia, tribus aut quinque nervis in inferiori facie extantibus exarata, quae non male *Centaurii minoris* foliis comparari poſſunt; ſed longe tenerioris ſubſtantiae ſunt. Ex ſingulis alis foliorum pedunculus erigitur quadrangularis, foliorum circiter longitudine, florem ſuſtinens.

Calyx ex quinque erectis linearibus foliolis fit, ex viridi purpuraſcentibus, acutis, & a tubo floris vix ſecedentibus.

Flos dilute purpureus, bilabiatus, tubo floris pene cylindrico: hiatus floris parvus. Labium ſuperius admodum breve, parum concavum, bifidum ſegmentis ſubrotundis. Ab eo modice diſcedit labium inferius, quod recte fere protenditur, magnum, profunde trifidum ſegmentis rotundis, medio aliquantum majori.

Stamina quatuor ex tubo floris prope orificium orta: duo ſuperiora ſimplicia, atque ſub labio ſuperiori inflexa, duo inferiora, ſive infra ſuperiora prope orificium floris nata ex nervo evidentiori, qui ex imo tubo floris naſcitur, qui originem dat filamento uno antherifero, qui nempe inflectitur ſub labio ſuperiori, dum nervi producti extremitas recta procedens, & a tubo libera facta cornu ſimplex exhibet ſterile, anthera omni deſtitutum, coloris dilute luteſcentis.

Antherae ſunt didymae, tranſverſim poſitae, ex cinereo purpureae.

Stylus filiformis antheris immediate tectus, ſimplex, apice obſcure bifido.

Embryo

Embryo in capſulam evadit viridem, ovalem, oblongam, calyce comprehenſam, unilocularem commiſſurae loco ſulco & linea aliquantum rubente ſignato, ſemina minima numeroſa ſordida albida continentem, cylindricae placentae affixa.

Pluribus locis collecta eſt rariſſima haec planta in *Pedemontio*; incolit vero loca ſpongioſa & paluſtria, & quae aquis inundata fuerunt. Secus *Seſiam* non longe ab urbe *Vercellarum* naſcitur. Legi etiam circa *Froſaſcum* in paluſtribus, uti etiam circa *la Marſaja.* Stirpem hanc collegerunt optimi mei diſcipuli & ſtrenui Botanicas cultores, nunc Medicorum Collegio adſcripti, Petrus Dana, & Ludovicus Belardi, quorum prior circa *Envie*, & in finibus *Bargiarum*, alter autem circa lacum di *Majon*, & inter *Gajanì* & *Candeil* plantam hanc copioſe naſci obſervarunt. Solet autem ſaepe oriri iiſdem locis, quibus *Iſnardia* provenit. In America quoque hanc ſtirpem creſcere in literis poſtremo ad me datis ſignificavit Celeb. Linnaeus, ad quem olim hujuſce plantae ſpecimen miſi, & ſuſpicatur hujuſce plantae ſemina cum oryza in Europa veniſſe.

Nova haec planta non eſt, ſed a Lindernio breviter etiam cum icone deſcripta. In *Tournefortii alſatici* editione pro novo genere oblata primum eſt *pyxidariae* nomine, deinde in Horto alſatico dicta eſt *Alſinoides paludoſa foliis anagallidi ſimilibus floſculis monopetalis rubeſcentibus capſula oblonga*. Una cum Cl. Lindern circa Argentoratum anno 1727. legit elegantem hanc ſtirpem indefeſſus ſtirpium indagator D. Gagnebin, cujus ſpecimen etiam benevole ad me miſit aliquot ab hinc annis una cum ſchedula continente ea, quae habet Lindernius, & brevem illam deſcriptionem, quam in *flora Ienenſi pag.* 237. adjecit Doctiſſimus Hallerus. Ipſe quidem Gagnebin *antirrhinum* etiam *paluſtre minus centaurii minoris foliis* appellavit; ſed animadvertit ſui generis plantam eſſe, eamque *Linderniam*

poſſe

posse vocari. In honorem itaque Cl. LINDERN *Linderniam* appello, sublato *pyxidariae* nomine, quo filicinum plantae genus recentiores Botanici designarunt.

Erit itaque *Lindernia* plantae genus flore bilabiato labio superiore brevi, concavo; inferiori magno trifido, staminibus quatuor instructum, quorum inferiora bifurcata sunt, unum stylum habens, & fructum ferens uniloculare, polyspermum.

Quod attinet ad vires medicas nihil certi statuere licet. Loci natalis conditio, & totius plantae habitus, ejusdemque sapor cum *gratiola* conveniens similes purgantes vires suadet, quod instituenda experimenta decernent.

DESCRIPTIO IV.

VIOLA, *acaulis fol. palmato multifidis, & lacinniatis. Tab. V. fig. 2.*

RAra haec Violae species, atque a paucis Botanicis visa, quae apud nos reperta est in jugo *assiette*, ex radice tereti, longa, ramosa, alba, perenni, folia atque flores protrudit instar violae martiae. Foliorum petioli unciales fere sunt, semiteretes, intus sulcati, atque extus extante nervo praediti, qui deinde per omnes foliorum lacinias porrigitur.

Folia subrotunda sunt laevia, ultra medium quinquefida, substantiae firmulae, superius obscure & nitide, subtus pallide virentia. Foliorum lobi posteriores profunde & inaequaliter trifidi, medii simplices & tantum in exteriore facie dentati, medius & extremus lobus omnium maximus, in tria subaequalia segmenta profunda trifidus, lateralibus laciniis saepe exterius dentatis. Laciniae omnes lineares fere sunt obtuso fine reflexae, patentes, & divergentes. Haec est frequentior forma foliorum, sed eadem vario ludunt mo-

 do,

do; nempe lobi posteriores bifidi interdum sunt, modo medii & majoris lobi segmenta iterum magis aut minus profunde resecta sunt. Deficit quandoque etiam unus ex mediis lobis. Alias loborum posteriorum segmenta profunde ita secta sunt, ut ex novem lobis folia composita videantur.

Scapi florales inter folia eriguntur petiolis breviores, & a foliis ipsis saepius tecti duas oppositas squamas, sive bracteas supra sui medium habentes; purpuro virent, teretes, leviter striati, prope florem aliquantum complanati.

Flos nutat. Calyx viridis, conicus, ex quinque foliolis onniventibus compositus, gibbis, ovatis, acutiusculis.

Petala quinque in perfectis exemplaribus, sed saepius tria aut bina, inter calycis & germinis basim nascuntur, unguibus linearibus, pellucidis, germini appressis, quae, ubi in bracteas expanduntur, quinque antheras albidas, bifidas habent, quae supra germen coronae instar tubam circundant. Bractea ovato acutiuscula est concava, & cochleari formis apice reflexo & emarginato ex flavo purpurascente colore tincta, margine albo. Petala supra germen elata, conniventia, ipsum obtegunt.

Stylus simplex brevis cylindricus, cum stigmate barbato, crasso, arcuato, albido, albo staminum pulvere saepe conspersus.

Embryo in magnam capsulam excrescit propendentem, & versus terram incurvato scapulo reflexam de more reliquarum violarum, quae trigona est, obtusa, trivalvis, cordata, semina laevia ovata obscure purpurea quindecim & ultra continens.

Haec violae species fortasse eadem erit cum *Viola montana folio multifido* CLUS. *hist.* *pag.* 301. & BAUH. *hist. III. pag.* 545. sive *Viola acauli foliis pinnatifidis* LINN. *spec. pl.* 1323., quam nuperrime cum brevi descriptione recensuit inter helveticas stirpes Celeb. HALLERUS *emend. VI. n.* 61. Nonnulla quidem sunt huic Violae ab Auctoribus tributa,

tributa, quae cum noſtra Viola non conſentiunt; numquam enim folia habet in decem anguſta ſegmenta ad pediculum diſciſſa, ut refert J. BAUHINUS, & icone exhibet. Praecl. HALLERUS ſuae Violae folia, ex tribus paribus pinnarum componi affirmat, & flores ad Violam martiam accedere. Non auſim tamen ſeparare, cum ſciam hujuſmodi folia lobata, & multifida pro ratione locorum diſſimilem faciem exhibere, atque minima noſtrae Violae petala poſſe aliis in locis majorem fortaſſe amplitudinem obtinere. Cum itaque unice extet Bauhiniana icon, quae rudis & imperfecta eſt, opportunum viſum eſt raram hanc ſtirpem & accurate deſcribere, & ejuſdem iconem exhibere.

Explicatio Tabularum ad has deſcriptiones pertinentium.

Tab. IV. fig. 1. ORTEGIA

- *a* Flos per microſcopium auctus, ut ſtamina magis pateant.
- *b* Filamentum cum anthera.
- *c* Flos naturalis magnitudinis.
- *d* Embryo cum ſtylo in magnitudine auctus.
- *e* Capſula naturalis magnitudinis.

Tab. IV. fig. 2. BASSIA

- *a* Flos per microſcopium auctus, ut ſtamina videantur.
- *b* Stamen ſeparatum.
- *c* Calyx in naturali ſua magnitudine.
- *d* Semen in ſua magnitudine per microſcopium auctum.
- *e* Semen a folliculo ſuo ſeparatum.

Tab. V.

Tab. V. fig. 1. LINDERNIA

a Floris labium inferius cum portione tubi, ut appareant ſtamina inferiora bifurcata.

b Fructus ſive capſula.

c Fructus apertus cum ſeminibus placentae affixis.

Tab. V. fig. 2. VIOLA acaulis, foliis palmato-multifidis, & laciniatis.

a Embryo jam grandior factus cum petalis: omnia in ſua magnitudine per microſcopium aucta.

b Petalum cum anthera microſcopio auctum.

c Folium ſeparatim exhibitum, ſicuti ſolet frequentius eſſe.

Plantae omnes praeter floris partes in naturali ſua magnitudine pictae ſunt.

MANIPULUS
INSECTORUM TAURINENSIUM
A CAROLO ALLIONIO
EDITUS.

Manipulus hic insectorum pertinet ad Cl. Virum Ottonem Fridericum Müller, Danum, Acad. Imp. Nat. Cur., Societ. Scient. Boicae, & Helveticae Sodalem. Cl. hic Vir per Italiam litterarium iter facturus cum in hanc Urbem venisset, rerum hujusce regionis ad historiam naturalem pertinentium feracitate excitatus, insectorum, atque etiam novorum non exiguam copiam in nostra patria adesse ratus, me quammaxime hortatus est, ut vellem hanc etiam naturalis historiae partem excolere, atque insecta colligere, quod per optimorum discipulorum naturalis historiae studio deditorum operam fieri curabo. Ipse autem per loca quaedam a me ipsi indicata, uti per colliculum Cappucinorum, & secus fl. Duriam aliquot ambulationes proxime elapsi Julii postremis diebus suscepit, excursionum comite Petro Dana meo discipulo, & diligenti naturalis historiae cultore, cum optimum virum, quod gratissimum certo fuisset, sequi non possem clinicis curis impeditus. Paucae vero ambulationes cum summa Cl. Viri oblectatione obtulere non pauca insecta, & ipse gavisus plurimum est se reperiisse in nostra regione Fridrichsdalina, Lapponica, Aegyptia, imo etiam Americana; tum etiam quaedam, quae minus nota, ac nova sunt. Manipulum itaque sollicite conscripsit, quem Commentariis nostris adjicio, ut rem gratam, utilemque naturalis historiae amatoribus faciam. In hoc autem manipulo ita recensentur collecta insecta, ut quae jam definita sunt, nominibus tantum tri-

vialibus erutis ex Perillustris LINNAEI *Sist. natur. ed.* 10. Ejusdem *Fauna Suecica*, & *Fauna sua Fridrichsdalina* indicentur; quae autem nova, aut minus nota sunt, ad sua genera cum brevi descriptione referantur.

COLEOPTERA.

SCARABAEUS *auratus*
variabilis.
cervus.
virens, muticus capite thoraceque glabris, aeneis: elytris rugoso-testaceis: pedibus nigris.
Totus glaber, sed pectus villosum. Color capitis, thoracisque punctis minimis excavati ex aeneo viridis, uti quoque scutellum, & sutura elytrorum. Abdomen lateribus maculis pallidis, subtus glaberrimum.
DERMESTES *mollis.*
stercoreus.
SILPHA *atrata.*
CASSIDA *viridis.*
COCCINELLA 2. *punctata.*
5. *punctata.*
7. *punctata.*
9. *punctata.*
13. *punctata.*
22. *punctata.*
2. *pustulata.*
CHRYSOMELA *graminis*
alni.
nympheae.
staphyleae.

CHRY-

CHRYSOMELA *populi.*

merdigera.

4. *punctata.*

Taurinensis, cylindrica, atra: elytris luteis, punctis sex nigris.

Elytra marginata flava, versus basim cujusvis punctum unicum nigrum, in medio duo.

luteola, oblonga, lutea: thorace bipunctato: elytris fascia longitudinali nigra.

Caput, thorax, elytra, pedes lutei; in fronte duo puncta, in thorace utrinque unum, in quovis elytro fascia lata, nigra. Oculi & antennae fusca. Abdomen nigrum, puncta duo obsoleta basim elytrorum versus.

CURCULIO *scrophulariae.*

crassus, brevirostris, niger: elytris convexis striatis.

Totus niger: Thorax globosus punctis elevatis; in cujusvis elytrorum striae cavitate series una punctorum distinctorum.

centaureae, brevirostris, oblongus, griseus: elytrorum fasciis duabus obliquis fuscis.

Inter majores est. Totus griseus, punctis elevatis, nigris, inaequalibus sparsus. Puncta haec faciunt, ubi pilis minimis obsita, colorem griseum, ubi glabra, subfuscum; hinc fasciae duae obliquae fuscae in quovis elytro formam duplicis V. mentientes.

ATTELABUS *coryli.*

apiarius.

CE-

CERAMBYX *cerdo*

textor.

moschatus.

linearis.

sartor, niger, thorace mutico subgloboso: elytris fuscis, lineolis, punctoque albis.

Minor: nigra sunt caput, thorax, oculi, antennae, pedes; elytra fusca; apice, lineaque media obliqua curva, ac basi puncto, lineolisque duabus albis, minimis.

LEPTURA *attenuata.*

melanura.

necydalea.

Thorax subglobosus punctis quatuor nitidis; margo elytrorum non purpureus; femora antica elevata nigra, reliqua ferruginea.

marginata, nigra thorace subgloboso: elytris subulatis utrinque marginatis lutescentibus.

Animalculum totum nigrum, elytris exceptis, quæ flava, abdomineque breviora.

varia, thorace globoso, elytrisque flavo-virentibus: fasciis nigris.

Caput, thorax, abdomen, elytra flavo-virentia, in quibusdam individuis cinerea; in thorace fascia transversa nigra; ad basim elytri figura C, medioque duae fasciae nigrae. Pedes nigricantes. Antennae nigrae.

CANTHARIS *melanura.*

sanguinea.

viridissima.

In quibusdam femora postica valde crassa.

CAN-

CANTHARIS *tomentosa*, nigra, thorace, teretiusculo: elytris tomentosis fuscis.

Tota nigra. Elytra sola luteofusca subpilosa, ad lentem striata.

ELATER *aterrimus.*

ferrugineus.

badius.

CICINDELA *campestris.*

BUPRESTIS *nitidula.*

octo-maculata nigra: elytris maculis octo aureis.

Thorax glaberrimus, nitidus, niger; antennae, pedesque primi lutei. Elytra striato-punctata, basi macula curvata, medio subquadratae duae, quarum infima basim versus extenditur; apice macula reniformis fulva.

MORDELLA *aculeata.*

paradoxa, antennis pectinatis: capite, thorace, elytrisque luteis.

Thorax haud postice trilobus, nec elytra apice nigra. Abdomen truncatum segmentis omnibus margine, & dorso nigris. Pedes nigri, femora posteriorum uti & articuli plantarum basi lutea; varietatem tamen ejus, quae in Fauna Svec. desscribitur, credo.

STAPHYLINUS *niger.*

FORFICULA *auricularia.*

BLATTA *Lapponica.*

GRILLUS *viridissimus.*

verrucivorus.

rufus.

viridulus.

GRILLUS *bifasciatus* thorace subcarinato, rugosus: elytris griseis: fasciis duabus fuscis.

Color ex rufo-griseus. Caput & thorax rugosa. Pectus & abdomen subtus punctis sparsis fuscis. Antennae fuscae thorace paullo longiores. Elytra albidiora fascia altera in medio, altera media inter hanc & thoracem fuscis. Alae caerulescentes fascia nigra, apice albae.

caeruleus, thorace subquadrato: maculis, & punctis ubique caerulescentibus.

Color griseus, capite, thorace, basi elytrorum, pedibus, & dorso abdominis, ut Lucius elixus, caerulaeus. Alae hyalinae basi caeruleae. Antennae griseo, & caeruleo annulatae, thorace paullo longiores.

HEMIPTERA.

CIMEX *annulatus.*
marginatus.
haemorrhoidalis.
pabulinus.
laevigatus.
hyoscyami.
equestris.
griseus.
baccarum.
Italicus, sanguineus, scutello longitudine abdominis; subtus maculis, supra fasciis longitudinalibus nigris.

Ruber, in thorace sex fasciae longitudinales, in scutello quatuor nigrae, abdomi-

dominiſque margo & inferior pagina nigro, & rubro variegata. Alae ſuperiores apice nigrae, inferiores nigricantes.

4. *punctatus*, oblongus, lamina thoracis elyſtriſque luteo-teſtaceis: maculis quatuor nigris.

Caput, thorax, abdomen, ſcutellum ſubcaerulea; puncta duo nigra in thorace, huic adjacet lamina utrinque macula nigra. Elytra luteſcentia, margine lineola, apice macula alba, cui nigra contigua eſt. Apice elytri membranaceo punctum quoque album. Pedes flaveſcentes; femorum apex niger.

Seguſinus, antennis apice capillaribus: corpore oblongo nigro: elytrorum apicibus coccineis.

Totus niger, glaber; apice elytri macula coccinea, extremo apicis nigro. Pedes flaveſcentes, baſis femorum nigra.

APHIS *jaceae.*

LEPIDOPTERA.

PAPILIO *Jo.*
Ajax.
Machaon.
Atalanta.
Antiopa.
Maera.
Galathea.
Cardui.
Rhamni.
Braſſicae.

PAPI-

PAPILIO *Jurtina.*
Janira.
C album.
Hyale.
Aegeria.
Prorſa.
Urticae.
Lucina.
Cinxia.
Lathonia.
Arion.
Argiolus.
Idas.
Comma.
Malvae.
Tages.
Linea, alis integerrimis divaricatis fulvis immaculatis: primoribus ſupra lineola nigra.

Similis Pap. Comma, *at prorſus immaculatus.*

SPHINX *Populi.*
Stellatarum.
Porcellus.
Filipendulae.
Virginea, alis ſuperioribus cyaneis: maculis quinque, punctiſque totidem rubris albo marginatis.

Similis Filipendulae. *Alae inferiores coccineae, margine exteriori caeruleo, inferiori teſtaceo; differt tamen thorace virenti, margine collarique duplici albo, maculis punctiſque rubris peripheria alba cinctis. Puncta haec numero quinque occupant*

cupant locum ſextae maculae Filipendulae *verſus apicem alae.*

SPHINX *ligata*, alis omnibus nigris albo maculatis: abdominis faſcia duplici aurea.

Antennae apice albido. Abdomen ceruleum baſim, & medium verſus faſcia aurea. Macula aurea in claviculis 4. poſticorum pedum.

variegata abdomine barbato: alis hyalinis, margine ferrugineis.

Segmentum abdominis primum, & ſecundum viridia, quartum, & quintum ferruginea, quintum, & ſextum lutea, barba laterali horum alba, terminali nigra. Abdomen ſubtus ferrugineum. Thorax, & caput viridia. Pectus album. Antennae nigrae. Alae albae, pellucidae, margine ferrugineo.

PHALAENA *Caja.*
ſalicis.
plantaginis.
ypſilon.
pacta.
groſſulariata.
glaucinalis.
verticalis.
purpuralis.
atomaria.
viridana.
trigonella.
Swamerdamella.
pentadactyla.

NEU-

NEUROPTERA.

LIBELLULA *quadrifaſciata.*

Fridrichſdalenſis.

ſanguinea.

frumenti.

triedra, ε alis omnibus baſi luteſcentibus: puncto marginali albido: abdomine triangulari.

Pedemontana, alis hyalinis macula fuſca: puncto marginali corporeque ſanguineo.

β alis hyalinis macula fuſca: puncto marginali luteo: abdomine fulvo.

In ε frons, pectus, abdomen punctumque marginale rubra. Thorax & macula alarum, quae puncto marginali approximatur, fuſca. In β frons, pectus, punctum marginale lutea. Thorax abdomenque fulva. Pedes utriuſque nigri.

virgo β, & ε.

puella α, β, δ.

EPHEMERA *bioculata.*

HEMEROBIUS *perla.*

Chryſops.

PANORPA *communis.*

Italica, lutea alis aequalibus, puncto marginali: abdomine falcato.

Facies omnino Tipulae, *at alae quatuor, roſtrumque* Panorpae, *licet minus* communis. *Tota luteſcens. Antennae ſetaceae, oculi ocelli, & apex roſtri fuſca. Abdomen falcatum, ſupra luteum, ſubtus ſubvirens apice fuſco. Pedes longiſſimi, apice tibiae ſpina duplex. Alae aequales luteſcentes puncto marginali concolori.*

HYME-

HYMENOPTERA.

TENTHREDO *pratenſis.*
viridis.
padi.
uſtulata.
ſaltuum.
ſeptentrionalis.
quadrimaculata, antennis clavatis, nigra piloſa: fronte, ſcutello, abdominiſque maculis quatuor flavis.

Maxima. Tota nigra. Frons, ſcutellum, abdominis ſegmentum ſecundum, & tertium ſuperne faſcia lata flava; haec in ſecundo utrinque inciſa, in tertio omnino interrupta maculas quatuor conſtituit. Thorax & ſegmenta ſuperne, & inferne glabra, marginibus piloſa. Antennae clavatae; maxillae fortes. Pedes piloſi. Tarſi ſetis rubris. Alae fulvae.

bifaſciata, antennis ſeptemnodiis nigra: abdominis faſciis duabus, tibiiſque poſticis albis.

Tota atra. Segmentum abdominis ſecundum, & tertium ſupra album; tibiaeque poſticorum. Quibuſdam individuis duo puncta alba in quarto ſegmento.

ICHNEUMON *extenſorius.*
compunctor.
manifeſtator.
glaucopterus.
appendigaſter.
deſertor.
luteus.

ICHNEUMON *comitator.*

punctator, niger, abdomine ſubtus albido bifariam punctato: pedibus ſubflavis.

Niger immaculatus. Abdomen ſubtus albidum punctis utrinque quatuor nigris. Pedes luteſcentes.

SPHEX *ſabuloſa.*

Aegyptia.

VESPA *coarctata.*

quinquefaſciata, nigra, thorace lineis punctiſque, abdomine faſciis quinque, punctiſque quatuor luteis.

Apex antennarum, & pedes fulvi; femora baſi nigra; in baſi thoracis, alaſque verſus lineolae. Dorſo puncta quatuor, lateribus utrinque unum; verſus juncturam abdominis loco ſcutelli tres lineae, quarum ſuperior tranſverſa in quibuſdam interrupta, flava; in ipſa junctura abdominis maculae duae flavae. Abdominis faſciae quinque inciſae, quarum prima remota dorſum tantum occupat; quatuorque puncta lutea, duo majora inter primam, & ſecundam faſciam; minora in baſi abdominis. Apex quoque luteus. Datur varietas duplo minor.

horticola, nigra thorace lineola, punctiſque duobus: abdomine faſciis quinque interruptis, pedibuſque luteis.

Antennae fulvae; lineola interrupta baſi thoracis; integra inter alas.

6. *maculata*, nigra, thorace immaculato: abdomine maculis 6. albis: alis baſi fulvis.

Tota

Tota atra, punctis excavatis hirta, parum hirsuta. Ocelli nulli. Addominis segmenti 2.i & 3.i dorso maculae 4, magnae aequales, 4.i duae minores albidae. Alae umbraticae, a basi ad medium aureae.

APIS *manicata.*
succincta.
truncorum.
hortorum.
pratorum.
terrestris.
lapidaria.
acervorum.
muscorum.
insubrica, nigra nitida: alis caeruleis nitentibus.

Maxima. Tota nigra glabra. Margo thoracis, pectus, abdomen subtus, ac pedes parum hirsuta; tarsi posticorum hirsutissimi. Alae pulcherrimae Iridis colore caeruleo nitentes, lumini obversae saturate fuscae.

fulva, hirsuta nigra: thorace abdomineque fulvis.
paludosa, hirsuta nigra: thorace antice, ac postice, abdomine antice flavis: ano albido.

Tota hirsuta atra; Thorax margine antico, & postico, abdomen antico luteo. Segmentum penultimum, ac antepenultimum abdominis lutescentia; apex niger.

FORMICA *Herculeana.*
fusca.

DIPTERA.

TIPULA	*crocata.*
MUSCA	*arbustorum.*
	menthastri.
	noctiluca.
	carnaria.
	domestica.
	cadaverina.
	scolopacea.
	mellina.

valentina, antennis plumatis glabra: thorace ferrugineo : abdomine flavo cingulis duobus nigris.

Magna. Frons cornea flava. Oculi fusci. Thorax, & scutellum ferruginea, nitida setis nigris cincta. Pedes obscurius ferruginei. Abdomen flavum marginibus primi, & secundi segmenti nigris; subtus fasciae nigrae. Alae fulvescentes.

cincta, antennis setariis pilosa, thorace caerulescente : abdomine ferrugineo : linea dorsali nigra.

Os argenteum. Thorax niger, glaber lineis tribus lacteis. Abdomen ovatum setosum, ferrugineum, dorso linea longitudinali interrupta nigra, medio cinctum lineola alba certo situ visibili. Pedes nigri femora flavescentia.

CULEX	*pipiens.*
ASILUS	*forcipatus.*
	tipuloides.

APTERA.

TERMES	*fatidicum.*
ACARUS	*gymnopterorum.*

JOH.

JOH. PETRI MARIAE DANA

De Hirudinis nova specie, noxa, remediisque adhibendis.

Hirudo *alpina, nigruans, ventre, ad medium bilineato, explanato, corpore ab ore, & cauda nulla depressione distincto* Tab. VI. fig. 1. ad 6.

ANimalculum est vulgarem Hirudinem habitu quadantenus referens, sed multo eadem constantissime minus, duarum linearum longitudinem in summo incremento non excedens, latitudinem linearem raro superans, crassitie lineam non attingens; quod non exiguam mutationem in motu progressivo subit. Primo enim brevius factum veluti in hemisphaerium parumper oblongum intumescit; postea porrectum, & extensum valde oblongam formam acquirit.

Faciem ejusdem superiorem convexam *dorsum* appellabimus: inferiorem complanatam *ventrem* dicemus: attenuatum extremum, quod in motu progressivo anterius reperiri solet *oris*; quod vero posterius *caudæ* nomine, licet improprio, designabimus. Motum illum quo decurtatur, *contractionis*, quo autem extenditur, & porrigitur, *distensionis* seu *extensionis* nomine vocabimus. *In Tab. VI. fig. I.* animalis non contracti dorsum, *fig.* 2. ejusdem venter, *fig.* 3. ejusdem contracti dorsum, sed omnia naturali magnitudine exhibentur. Similia ostendunt *fig.* 4., 5., & 6., sed magnitudine per microscopium adaucta.

Animaculi non contracti (*Vid. fig.* 1., & 4.) dorsum universum primo aspectu lucido-nigrescens apparet. At, si attente observetur in media, elatiorique parte intensius nigrescit, quam versus margines, ubi sensim sensimque niger color in griseum obscuriorem transit. Quod si oculorum acies lentis vitreae adjumento intendatur, e fundo, ut ajunt, gri-

griſeo-albeſcente nigri quidam villi elevari videbuntur, qui denſiores ſunt in ſummo dorſo, & paullatim rariores fiunt ad margines, atque ea propter magis apparentem prope hos griſeum colorem relinquunt.

Inferior corporis ſuperficies complanata eſt, (*Vid. fig.* 2. *&* 5.), & univerſe magis quam dorſum ad griſeum colorem accedit. Naſcitur ab ore linea prae caeteris animalis partibus albeſcens, quae ad duos longitudinis trientes recta extenditur: & in albam veſiculam *b* deſinit, quae in contractione animalis magis prominula, & quaſi tumeſcens, quam in extenſione obſervatur.

Hujuſmodi albeſcentem lineam utrinque ſequitur linea nigri obſcuri coloris (*Vid. fig.* 5.), quae veſiculam cingit, & ultra veſiculam nigrum quoddam punctum, ſive maculam nigram imprimit; linea nempe, quam albam diximus, area eſt duabus nigris lineis comprehenſa.

Extremum anterius *O* fit a corpore ſenſim, ad longitudinem ſemilineae attenuato, & producto in ſemiconum apice exacte truncatum, & in illius elongatione extantibus angulis quaſi cornutum. Hoc proprie nomen oris tantummodo meretur, cum in parte ſui inferiore explanata etiam levis emarginatura per lentem conſpicua fiat, quae angulis eſt interpoſita, & ſemilunata videtur; cujus veſtigium apparet ad *O* (*fig.* 5.)

Poſterior animalculi extremitas *C* rotunda fere eſt, neque ullo notatur diviſionis veſtigio, quo a corpore ſeparetur, neque ita attenuatur, ut caudae nomen proprie mereatur.

Margines planam inferiorem, a convexa ſuperiori Hirudinis ſuperficie diſtinguentes concolores fere ubique apparent, & quemadmodum reliquae partes, vix ulla niſi per microſcopium conſpicua ruga in quolibet ejuſdem motu exaſperantur; quod in vulgari Hirudine ad oculum obſervatur.

Con-

Contractione, & elongatione alternata, ut diximus, motus suos progressivos absolvit Hirudinis ista species. Dum decurtatur anteriorem partem figit, & ad illam sui posteriorem extremitatem adducit. In hoc motu ita contrahitur, ut ad oblongum hemisphaerium aliquomodo accedat; dimensio verticalis, & transversa adaugentur, ad os usque totum corpus crascescit; tuncque magis nigrum, & lucens dorsum observatur (*Vid. fig.* 3., & 6.). Dum elongatur, & magis proprie progredi dici potest, caudam firmatam servat, & anteriorem partem cum ore elongando producit; verticalis, & transversa dimensio imminuitur, longitudo eousque saepius adaugetur, ut duplo major quam in priori contractione fiat. Nullo horum motuum tempore animalis os in orbiculum dilatatur, sed prope illud gracilescit, & extenuatur ita uniformiter, ut nulla depressio collum a reliquo corpore distinguat, & designet. Quae etiam de Cauda patentius vera sunt. Haec autem omnia constanter observavi ita se habere in triginta, & ultra individuis, quae ad examen revocavi.

Experimenta quaedam nunc addam suscepta, ut in hujus Hirudinis naturam inquirerem. Digito fonti immerso superscandere, aut morsu adhaerere constanter recusabat.

Cum aquae nativae parva portione simul educta haec Hirudo, quamdiu illa frigebat, alacriter vivere, & moveri pergebat: quoquomodo autem aqua incalesceret ex manus, Solis, aut atmospherae calore male se habere incipiebat; agitabatur primum, deinde languescebat, &, nisi frigida aqua renovaretur, brevi moriebatur. In arido autem relicta citius peribat. Tentatum est vivas Hirudines aqua immersas in planitiem transferre, ea adhibita diligentia, ut aquam neque Solis, neque manus calor calefaceret; sed, anteaquam ex montibus descensum esset, semper interierunt.

De industria resupinatum hoc animalculum extra aquam progredi non poterat, sed varie inflectebatur, donec caudam

dam, vel os figere posset. Tunc facile in pronum, naturalemque situm restituebatur, unde facile motus suos progressivos libere absolvebat.

Multiplici ratione hujus hirudinis corpus dissecui, omnibus partibus diligenter examinatis microscropii octies multiplicantis auxilio. Nihil aliud autem in ipso detegere potui praeter tubum tenuissimum, pellucidum, & intestinulorum more per interiora, innumeris circumvolutionibus factis, serpentem, qui resectus pellucidum humorem plorabat. Post quatuor aut quinque horae minuta hujusmodi tubulus motus aliquos contractiles adhuc servabat. Viginti minutorum spatio Hirudo omnis arefacta nihil organici praeseferebat. Imo Hirudulae aliae integrae super calentem a Sole lapidem per semihoram expositae, ita exsiccatae sunt, ut ad nihilum fere redactae viderentur, in sui vestigium exsuccam tenuem pelliculam supra lapidem relinquentes. Manibus quoque paullo diutius contrectatae, aut asservatae cito exsiccabantur. Caeterum fere gelatinosa valdeque tenera animalculi interior substantia membrana tenui, & debili obtegitur, quae separata pellucescit, sed, dum contentis referta est, opaca apparet, & obscurior.

Inter Hirudines recenseo licet cum notis a Celeb. LINNAEO generi Hirudinis assignatis non plane consentiat. Neutiquam enim habet os, aut caudam in orbiculum expandendam, sed habitus omnis, formaque Hirudinis speciem esse declarat.

Augusto mense habitantem vidi in fundo alpinorum fontium, quotquot fere editiores, & Soli minus expositos secus viam invenimus, qua a R. P. Cistercienfium Monasterio per alpes, & sylvas ad Garexium itur. Neque infrequens etiam invenitur in vicinis, editisque alpibus ad Garexii Commune proprie pertinentibus versus *le Caranque*, & *Batifol.* Supra adversas quoque alpes *Bric d' Mindin* dictas non raro occurrere notatum est. In reliquis vero ejusdem loci

mon-

montibus, & alpibus, in conterminis Ulmetanis, in Apenninis Ligurum proximis, nec non in caeteris Ulmetae, Tendae, Brigaeque ad Carlinum; & Viosennam fertilissimis, quas deinde, plantarum exquirendarum caussa, conscendimus, alpibus, nullibi harum Hirudinum aliquam reperire potuimus; quamquam acquisitae notitiae non immemores fontes singulos, quos offendimus, ideo diligenter inspexerimus.

Vernacula lingua apud eos alpicolas hae Hirudines dicuntur *le Sioure*, aut *Soûre*. Notissimae autem cuique ibi sunt, atque ab iis quam maxime cavent, cum vetusta, & malis eventibus nimium confirmata apud ipsos, observatione constet, tum pecoribus, tum hominibus adeo infensa haec animalcula esse, ut certam necem afferant, si incaute cum aqua deglutiantur, nisi prompte auxilium afferatur. Quamobrem solent non sine cautela horum fontium aquam bibere; aut enim prius accuratissime ab his animalculis mundant; aut, ut omne periculum tutius effugiant, cum eadem in sabuloso fundo vivant, profundius fontem excavant, & aquarum commotionem avertentes ex summo fonte hauriunt. Eadem adhibita cautela pecora ad fontes adducuntur.

Singulari harum Hirudinum specie, earumque noxa perculsus, diligentissime ab alpicolis sum sciscitatus ea omnia, quae longa observatio eosdem docuerat, atque animadverti fuisse singulos hac in re consentientes. Symptomata itaque, quae ex eorum communicatis notionibus collegi, haec sunt. AEgri hujusmodi primum conqueruntur post ingestionem animalculi de quodam sensu rosionis, terebrationis in ventriculo. Ventris totius tormina adeo acerba cum vomendi conatibus accedunt, ut, manibus ventri continuo appressis, & inflexo trunco, ipsum adsidue comprimere cogantur ad doloris atrocitatem aliquomodo diminuendam. Aliqui vehementer adeo memoratis doloribus torquentur, ut neque stare, neque se erigere, multoque minus domum redire

queant.

queant, ſed in terram ſaepe concidant: aeſtus dolorifici ſenſum in ventre percipiunt; dentibus ſaepe ſtrident; exagitantur; concutiuntur; frigeſcunt; cum furore per intervalla delirant; ſingultiunt; vomunt; vultu livent. Alii protinus toto corpore poſt refrigerationem convelluntur vehementiſſime, & incaleſcunt. Omnes ſudore, ac frigore demum ſuperveniente, moriuntur, ſaepiuſque ne integro quidem elapſo die miſerrime pereunt. Aliqui, licet rarius, diem alteram attingunt.

Atque haec ita quidem contingere viſa ſunt, ſi abſque remediis aegri perierunt. At ubi paullo ſerius remedia opportuna exhibita ſunt, pleraque morbi ſymptomata mitiora quidem fieri, alia vero plane tolli obſervatum eſt; difficile tamen, & tarde ſanitas perfecta, & priſtina reddita eſt.

Caeterum e mortis faucibus fere omnes ereptos generatim aſſerunt, quibus ſal, vel oleum, & agarium prompte dari potuerint; quae ideo tamquam antidota ab ipſis reputantur, ut maximum vitae periculum in mora poſitum declinetur. Pauciſſimos enim abſque remediis, vel ob loci diſtantiam, vel ob ſociorum defectum id fuerit, ſervatos fuiſſe norunt; eoſque nonniſi poſt convulſiones, & mentis alienationes, iiſdem poſtridie remittentibus, domum redire potuiſſe, & difficile convaluiſſe retulerunt.

Agarium quod pertinet apud ipſos remedium eſt prae vicinorum laricum copia vulgatiſſimum. Ideo exſiccatum domi ſervare, & in pulmento cum pipere mixtum in omnibus fere morbis indiſcriminatim adhibere ſolent. Non infrequenter ut perpurgentur, & vomant, cum oleo, rarius vero cum lacte miſcent. Nihil exinde mirum, ſi contra Hirudinis deſcriptae noxas ſimiliter adhibuerint; ſi ejuſdem vim, tamquam omnium efficaciſſimi antidoti, experimentis dudum probatam unanimes extollant.

Salis communis in ſimilibus caſibus utilitates eximias aliqui retulerunt, & Chirurgus ipſe confirmavit; rarius tamen

nec

nec nisi agarici, & aliorum defectu in hominibus usu venisse intellexi.

Sola aqua tepida, lactis sero, vel lacte copiose, & prompte ingestis propter reliquorum defectum tanta illa symptomata plerumque mitescere observarunt; non tamen cuncta, quemadmodum ab agarico, tolli deprehenderunt; imo saepius exinde nonnisi post menses aegros sanitati restitui ajunt, quo tempore cum ciborum inappetentia, & languore, ventris tumore, & levi dolore, inertes, & excolores vitam degunt.

Haec praecipua sunt, quae ex veridicorum hominum consentientibus responsionibus collegi, atque publici juris facienda esse putavi, tum ut iter per eas regiones facientes ab iisdem caveant, opemque, si opus fuerit, necessariam noscant; tum quod existimaverim hujusce Hirudinis Historiam omnibus rerum naturalium studii cultoribus acceptam esse futuram.

Huic commentariolo aliud adjungam, quod agit de aliquot animalibus, quæ vulgo *Urticae marinae* dicuntur. Has porro omnes observationes institui in postremo botanico itinere, quod, favente Excellentissimo, & Amplissimo Marchione CAISSOTTI Supremo rei literariae universae Moderatore, per extremas apenninas alpes suscepi, & in Comitatum Niceensem descendens ad usque maritimas oras produxi. Cum vero comitem itineris habuerim Franciscum PEYROLERIUM botanicum Regium Pictorem, idcirco horum animalium icones eo meliores subnectere possum, quod saepius viventia animalia vivis coloribus statim ab eodem accurate pingi curaverim.

EJUSDEM

De quibusdam Urticæ marinae vulgo dictae differentiis.

I.

ARMENISTARI.

GENUS. *Animal corpore sub-cartilagineo, tenui, complanato; basi ab erecto velo divisa, arcubus lineata, margine tentaculato.*

SPECIES. *Armenistari tentaculis in membranam perfecte coalitis.* Tab. VI. fig. 7. & 8.

EMinus visum hoc animal totum laete caeruleum apparet; sed propius, & diligenter inspectum una cum caeruleo argenteum colorem præsefert. Duabus planis, tenuibus cartilagineo-membranaceis partibus, componitur, quarum una *p q r s* (*fig.* 7. & 8.) amplior, & oblonga est; &, eo quod inferius in animali aquae imposito reperiri soleat, *basis* dicetur: altera vero *q z r* (*fig.* 8.) inaequaliter triangula, majorique suo latere D C A perpendiculariter priori affixa est; &, quoniam velum erectum representat, *veli* nomine distinguetur, eoque libentius, quod ab hac voce generis hujus altera vera species *Velellae* nomen jamdudum habuerit.

Basis animalis *p q r s* ovali-oblonga est, valdeque obtusa. Summa illius longitudo *p* C *r* ad duas fere uncias extenditur; latitudo vero unciam vix aequat. Superior illius superficies leviter convexa, est, & in duas aequales partes a velo distinguitur, quod ita super ipsam oblique cadit, ut inde facta sectio A C D angulum acutum faciat cum linea *p* C *r* majorem longitudinem ipsius baseos repraesentante.

Inferior

Inferior ejusdem basis facies (quæ tota apparet in *fig.* 7.) leviter concava est, potissimum versus centrum C: longe ellipticam ruffescentis coloris maculam habet ab eodem centro ad tres lineas utrinque productam juxta ipsius longitudinem, quae in sui medio ultra lineam lata est. Hujus maculae centralis portio communicare videtur superius cum sinuosa cavitate superposita C X, quæ ad velum pertinet.

Utraque baseos superficies tota tegitur a membrana, sive pellicula tenui, firmula, talcoso, & argenteo fere nitore splendente. Utraque tenuissimam cartilagineae indolis substantiam intercipit, necnon plures caeruleos arcus, sive potius canales caeruleum humorem continentes. Ex horum canalium, & cartilagineae substantiae arcta cum membranis unione, firmitudo, & elasticitas vere cartilaginea baseos pendere videtur, quamvis humores ipsi ad id etiam conferant. Exsiccati enim Armenistari basis fragilis fit; atque tunc tenuissima cartilaginea substantia membranis, & canalibus interposita difficillime ab iisdem separatur, & potius sub specie squammarum, quam integrae cartilaginis oculis subjici potest.

Componi videtur velum *q z r* (*fig.* 8.) non modo ex productione membranarum baseos, sed etiam ex tenuissima cartilaginea lamina iisdem inclusa. Quamvis enim per sectionem oculis illa non subjiciatur; digitus tamen cartilagineas proprietates, & praecipue rigiditatem distinguit, quae a simplici membranarum unione vix produci posset. Nulli autem rei aptius comparari potest recens velum, quam tenui laminae talci supra basin erectae, sive pelluciditas, sive tenuitas cum rigida flexilitate conjuncta attendantur. Margo rigidus veli superior inaequaliter crenatus, aut irregulariter undulatus est, neque ultra eumdem cartilaginea substantia extenditur. Ipsius vero membranae sub tenuissimae pelliculae specie conjunctim ultra illum ad lineam extenduntur, & prae summa pelluciditate, & tenuitate in animali ab aqua educto

oculos

oculos pene fugiunt, & ſupra rigidam veli partem concidunt; ſed facillime rurſus velo aquae immerſo conſpiciendae ſunt ſub ſpecie fluctuantis, & mobiliſſimae pelliculae. In recenti velo *q z r* lineae quaedam verſus baſim adnotantur, quae ſenſim, ſenſimque adſcendendo verſus ſuperiora diſparent, & evaneſcunt. Nullas vero, ut in Velella, lineas juxta veli longitudinem arcuatas, & ipſius limbo ſubparallelas videre potuimus.

Exſiccatum velum omnino pellucidum, baſi multo tenuius, valdeque fragile fit; nullumque amplius in ipſo linearum veſtigium conſpici poteſt.

Ubi inferius veli latus incipit a convexa baſeos facie ſinus caeruleſcens D A ex fuſco notatur, qui verſus medium, major eſt; ſenſim vero verſus utramque extremitatem juxta D, & A evaneſcit. Producitur iſte ſinus a ſuperiori baſeos membrana, quae, dum ex utraque parte continuatur, ut in velum *q z r* faceſcat, hoc cavum ſpatium intercipit eo majus, quo centro C propius. Verticaliter quoque earumdem membranarum receſſus per medium velum a centro ſuperius continuatur. Et inde producta verticalis cavitas C X (*Tab. VI. fig.* 8.) verſus ſummitatem *z* dirigitur, & in apicem ſenſim extenuata paullo infra mediam veli ejuſdem altitudinem inconſpicua fit.

In recenti animali caeruleo-rufeſcens humor in memoratis cavis continetur, qui, quo baſi proprior, eo coloratior eſt. In majori etiam copia verſus centrum C reperitur. Ibi correſpondet ſuperiori portioni memoratae maculae, cum qua communicare quidem videtur, licet rufeſcens, & gelatinoſa materia maculam efformans per ſinum ex arte apertum ſuperius ad X, debitamque deinde compreſſionem digito factam vix educi patiatur.

Sexdecim, & ultra conici canales ſub ſpecie totidem arcuum caeruleorum utrumque baſeos ſegmentum pinguunt; horum ſubduplum numerum tantummodo exhibuimus in

fig.

fig. 7. & 8., ut diſtinctius earumdem decurſus conſpici poſſit. Major canalium inter ſe diſtantia, & amplitudo eſt in majore utriuſque ſegmenti portione, minor in minore reperitur. Ultra baſeos diametrum *p* C *r* a veli origine DCA majores prodeunt, deinde in arcus margini ſubparallelos flectuntur, poſtea ſenſim minuuntur, & ſibi viciniores facti, rectioreſque in oppoſitam, ſeu acutiorem ſegmenti ejuſdem partem inviſibili fine terminantur. Canalium propterea unius ſegmenti diſtincta, & major extremitas proxima quidem eſt juxta ACD tenuiſſimis extremis canaliculorum ſegmenti alterius; at per interpoſitum velum ita ſeparatur, ut nulla immediata cum alterius medietatis canalibus ejuſdem communicatio conſpiciatur. Neque etiam ſatis diſtincte utrum ibi extrema canalium baſeos deſinant, aut continuentur in veli canales cernere potui; etiamſi armato oculo tum recens, tum ſiccatum animal examinaretur. Certum tamen eſt in eamdem velo & baſi communem portionem, venire arcus baſeos attenuatos, a qua tenuiſſimae ceruleſcentes lineae per velum diſtributae diſcedunt. Baſeos canales in majori extremo digitis ipſis diſtinguuntur; quemadmodum etiam major ejuſdem partis inde facta craſſities ipſis percipitur. Spatium canalibus memoratis interpoſitum eſt plus, minuſve amplum, prout major eſt, vel minor eorumdem inter ſe diſtantia. Maximum propterea in majori cujuſque ſegmenti baſeos extremo, minimum in extremo minori, ubi canaliculorum diſtinctio ne armatis quidem oculis diſcerni poteſt. In exſiccato animali non difficile canales iidem ab ejuſdem membranis poſſunt ſeparari, & albidi apparent, minores, ſibique magis proximi, licet ſatis adhuc diſtincti.

A baſis macula ante deſcripta ſub inferiori membrana molles, & caeruleae quaedam lineae, quaſi radii verſus peripheriam, undique dimittuntur arcus modo deſcriptos frequenter interſecantes.

Eaedem

Eaedem baſeos membranae ultra ipſum cartilagineum baſeos marginem circumquaque ad duas fere lineas conjunctim extenduntur, & in membranam laete caeruleo humore madentem, & mobilem continuantur. Haec membrana ex utriuſque, ſuperioris nempe, & inferioris membranae baſeos unione facta, mobilis eſt, libere in aqua fluctuans; vere tentacularis, integro margine, leviter tantum repando, & quaſi a plicis undulato praedita. Per ipſam intenſe caeruleae quaedam rectae lineae notantur, quae directionem ſequuntur radiatarum baſeos linearum, & plicas memoratas ferè diſtinguunt. Valde tenera, & lubrica eſt iſta membrana, & plurimo caeruleo ſmegmate infecta; neque exſiccari facile patitur, ſed chartis tota adhaereſcit, eaſque caeruleo colore pingit; quod ſi recens contrectetur in caeruleum mucum, quo maxime abundat, fere tota faceſcit. Dum ſubter baſim reflexa eſt eandem caeruleam uniformiter reddit.

Totum animal valde lubrico mucoſo humore madet. Nullam autem omnino oris, aut alterius partis apertionem, etiamſi microſcopium adhibuerimus, in externis ejus partibus obſervare potuimus.

Appulit hæc Armeniſtari ſpecies ad extimam meridionalem Collis S. Albani Niceaenſis ripam maritimam poſt procellam flantibus Auſtris addacta. Illius novitate perculſus obtuli Piſcatoribus, ut intelligerem num alias illud adnotaſſent. Ignotam ſibi illius nomen eſſe, remque raro viſam reſponderunt; ſed cognoſcere ſimilem aliam edulem, quam vernali tempore copioſe poſt procellas expiſcantur, venientem, ut ipſi ajunt, ex Africae litoribus, atque ex eorum indicationibus comprehendi eos probabiliter intelligere Velellam Auctorum.

Non inquiram modo in oeconomiam, qua elegantiſſimum animal vitam, & ſpeciem conſervat. Commentitia enim plurima forent afferenda, cum vera ignorentur. Num per aptae ſubſtantiae abſoptionem ab inconſpicuis poris factam,

aut

aut per totam membranarum extenſionem, aut per tentacularem ſolam membranam diſtributis nutricatum ſumat; num ita abſorptus humor per canales, & ſinus memoratos peculiari diſpoſitione ſitos ad animalis centrum adducatur, tamquam ad praecipuam ejus partem oblonga illa macula inferius apparente notatam, ardua eſt inveſtigatio; quoniam nullum os conſpicere, nulla etiam viſcera detegere licuit; multoque minus penetrare, quonam artificio hujuſce animalis multiplicatio fiat.

Ad nullum cognitorum generum novam hanc ſpeciem reduci poſſe, & ideo peculiarem generis conſtitutionem ſibi promereri intelliget quicumque cum allata deſcriptione ea comparabit, quae Zoologi, & ſpeciatim Celeberrimus LINNAEUS ad hanc rem proximius ſpectantia tradiderunt. Animal, cum quo noſtrum magis convenit, eſt *Velella* auctorum, quod a Celeberrimo *Viro* ad Meduſae genus refertur, ſed utrumque reapſe a Meduſis videtur ſeparandum, & ideo fortaſſe idem perſpicaciſſimus LINNAEUS Meduſae ſpeciebus ultimo adjecit, quod minus, quam reliquas ſpecies cum Meduſae genere convenire intelligeret. Si enim tributum a Veteribus Urticae nomen ab urticationis ſenſu, quem cuti imprimit, & commeſtibilitas excipiantur, quae reliquis Urticis marinis ad Meduſam pertinentibus communia ſunt, vix alia ſufficiens ratio datur, qua ad eaſdem jure amandari queat. Neque enim reliquis Meduſis ſimilis partium ſtructura competit, neque natura cartilaginea, aut ſaltem ad cartilagineam proxime accedens conſiſtentia per totum corpus diffuſa in illis conſpicitur: tandem nullum os inferius centrale, aut in Velella deſcripſerunt Auctores, aut in noſtris obſervare potuimus. Quod tamen neceſſario conſpici deberet, & demonſtrari, ut, immutato Linnaeani generis caractere, ad Meduſas illae reduci poſſent.

Et ſane novi generis conſtruendi neceſſitatem minime praetervifit, aut ſiluit ſed aperte propoſuit Cl. C. Marcus CAR-

BURIUS

RIUS (*a*) peculiarem Velellae fabricam admiratus. Nihilo tamen minus post ipsum multiplici scientia Clarus Johan. Baptista BOHADSCHIUS (*b*) solum urticationis sensum notis a structura petitis anteposuisse, & tanquam argumentum sufficiens assumsisse videtur, propter quod aliis Urticis adjungi queat; quamquam Medusis reliquis similem structuram, siquidem de eadem revera loquitur, Velellae tribuat. Verum neque Linnaeanis caracteribus, ut ostendimus, illa aptatur, neque communissima illa figura cylindrica, vel orbiculata, quam in omnibus Medusae speciebus inesse dicit (*c*), neque demum interna fabrica ibidem adducta a Cl. VIRO in nostra specie, aut in Velella observantur: hinc dubitandi fortasse locus aliquis superest utrum VIR doctissimus idem animalis genus prae oculis habuerit, quod laudatus CARBURIUS descripsit, an potius aliud. Eo vel magis, quod dicat a se visi animalis corpus adeo tenerum fuisse, ut in auram avolaverit, & in spiritu vini diffluxerit. Nostrum vero, & Carburianum Armenistari praecipue vero ejusdem basis facile exsiccari, atque exsiccata conservari potest. Praeterea ab ipso praesertim velo nota certa characteristica novi generis desumi posse nobis videtur, quae duas allatas species fabrica in multis non valde dissimiles, licet specifica differentia satis distinctas complectetur. Prima igitur erit Velella a FERN. IMPERATO (*d*), FAB. COLUMNA (*e*), novissimque a citato CARBURIO eleganter descripta, & delineata. Altera vero tentaculorum integritate praecipue distinguenda species ista erit, quam hic posuimus.

Tandem quod pertinet ad nominis rationem non plane incongruum duxi *Armenistari* nomen retinere: quia primum

(*a*) Lettera sopra un Insetto marino &c. Nuova raccolta d'Opuscoli scientifici, e filosofici Tom. 3. *Venezia MDCCLVII.*

(*b*) De quibusdam animalibus marinis, eorumque proprietatibus &c. liber. *Dresdae* 1751. *pag.* 136. (*c*) Pag. 135.

(*d*) Hist. natur. pag. 679. descr., & pag. 688. *delineatur tentaculis ex parte integris.*

(*e*) Aquatil. & terrestr. observ. pag. XX. descr. & pag. XXII. delin. ed. Rom. MDCXVI.

mum cognita hujuſce generis vera ſpecies *Velella* dicta, *Armeniſtari* graeco nomine a laudato Cephaleno Auctore probe deſcripta fuerit. Poterit idcirco *Velellae* vocabulum pro primae ſpeciei triviali nomine inſervire; dum triviale aliud huic noſtrae adponendum relinquimus.

I I.

M E D U S A E

S P E C I E S P R I M A.

MEDUSA *per contractionem hemiſphaerica, levis, tentaculis plurimis, membranae interius 24-punctatae revolutione detegendis* Tab. VII. fig. 1, 2, 3, 4, & 5.

IN loco natali adhuc ſitum hoc animal ſi inſpiciatur hemiſphaerium coccineum magis, vel minus perfectum exhibet; quod per planam ſui inferiorem partem ſaxo arcte appreſſum, per convexam vero libere mobile eſt. Quacumque de cauſa illud contrahatur, perfecte hemiſphaericam formam induit (*Vid. Tab. VII. fig.* 1, 2, & 3). Quod ſi dilatatum, ſeu expanſum conſpiciatur, compreſſum fit, ſimulque incluſas quaſdam ſui partes videndas exponit. Priorem ſtatum *contractionis*, vel *coarctationis*, alterum *dilatationis*, ſeu *expanſionis* (*Vid. fig.* 4.) nomine vocabimus. Sub diverſis propterea iſtis, aliiſque etiam apparitionibus, quas ipſius motus, & anatome oſtendunt, ſigillatim hoc animal deſcribemus, atque multiplici icone, quantum fieri poterit, ejuſdem ſtructuram explicare conabimur.

Ut inferior hujus Meduſae ſuperficies integra in conſpectum veniat, a ſcopuli portione, cui firmiter adhaerens repetitur, (quemadmodum videre eſt in *fig.* 1.) accurate eſt ſeparanda. Vivente animali id facere non potui abſque

laceratione. Sed, cum illud integrum, saxoque adhaerens in aqua dulci moriendum reliquerim, & subinde disrupti saxi fragmenta paullatim separaverim, tunc inferior superficies nitide conspici potuit; quae levis est, & laete rubens diametri circiter uncialis, prout sistit *fig.* 3. *Tab. VII.* Plana quidem illa est, & uniformis; sed per quasdam saturatius rubentes, radiatas lineas divisa, seu distincta apparet in plura fere triangularia segmenta apice suo ad centrum conniventia in punctum, ceu in apertionem communem ipsis interpositam.

In convexa contracti (*fig.* 1. & 2.) animalis facie per memoratam mediam ipsius apertionem introspici possunt innumeri rubri dentes, seu tentaculorum, de quibus deinde dicemus, apices circumquaque in orbem positi, indeque latera efformantes interius in foramen productae apertionis ejusdem. Prout adaugetur interdum, vel imminuitur apertio, magis vel minus distincta, & extantia tentaculorum extrema conspici possunt. Reliquum hemisphaericae convexitatis leve est, & vivide-rubro colore nitet; videturque fere cruoris coccinei coagulum hemisphaericum levi membrana tectum repraesentare, quam liceat *cuticulae* nomine imposterum designare.

Communis est utrique superficiei haec cuticula, sed ubi ad memoratum foramen pervenit, interius reflectitur, ut supra interiores omnes partes producatur, & quamdam tegminis mobilis, ac retractilis speciem per interpositam tenuem gelatinosam substantiam efformat, quod trahitur, & retrahitur supra partes contentas, sicuti praeputium supra glandem humanam; hinc eadem praeputii voce non male posset appellari. In contracto animali (*fig.* 1. & 2.) hemisphaericae convexitatis apparentem, & maximam partem constituit hoc praeputium, & continuatur inferius cum residua parte convexitatis ipsius: revolvitur in expanso animali,

mali, ſicque ipſius concava, & interna facies convexa fit, & internam ſui originem oſtendit (*fig.* 4.), quae eſt paullo infra mediam totius hemiſphaerii altitudinem.

Interna haec praeputii ſuperficies (*fig.* 4.) lucide rubens, & levis eſt, ſi vigintiquatuor griſea puncta excipias, quae parum, ſed aequaliter inter ſe, & ſemilineam ab ejuſdem circulari margine diſtant. Eadem cuticula laxe teguntur haec puncta, & ſi immiſſa acu eleventur tubulum caecum, brevem, griſeum fere exhibent.

Aliae quoque partes, revoluto praeputio, conſpicuae fiunt, quas ideo (*fig.* 4.) ſimul repraeſentari curavimus. Detegitur inde hemiſphaerium aliud parvum (*fig.* 4. *lit. ii*) priori concentricum, aeque leve, & rubellum, nuclei adinſtar priori incluſum, cujus convexitas ſuperius poſita ſimili, & juxtam eamdem directionem correſpondente foramine (*f*) previa eſt. Foramen iſtud conſtringi quidem ab animali, & dilatari poteſt, non autem, revolutis partibus ipſum conſtituentibus, evaneſcere; quemadmodum de foramine illo externo praeputii hemiſphaerii majoris ſuperius contingere innuimus.

Circumponitur ad hujus parvi hemiſphaerii baſim, coronae, ſeu zonae cujuſdam ſpecies (*zzzz fig.* 4.), ſaturatius rubro colore diſtincta, ultra duodecimam pollicis partem, inter allati hemiſphaerii baſim, & internam praeputii originem extenſa. Fit autem ex duplicis denſa ſerie binatarum concolorum mammillarium prominentiarum, ſive ex parviis fimbriis compreſſo-conicis, inter ſe ſe diſtinctis, liberis, ultra lineam cum ſemiſſe longis, vix ſemilineam in ſua baſim ſeu exortu latis, ſenſim exinde in acutiuſculum, mobiliſſimum, & libere fluctuantem apicem extenuatis. Tentaculorum apices in contractione animalis verſus interiora reſpiciunt; at in illius expanſione ad exteriora divergentes zonam radiatam exhibent.

Praeter

Praeter haec, quae ex viventis animalis variis motibus conſpicua fiunt, ut parvi hemiſphaerii (*ii*) partes internae luſtrentur, ſectio juxta ejuſdem convexitatem caute duci debet donec ſectae partes, ſimilem cum praeputio hemiſphaerii majoris ſubſtantiam habentes, attolli queant. His revolutis (*Vid. fig.* 5., in qua parvum hemiſphaerium ſectione apertum eſt, ut partes internae conſpiciantur), idem ruber color per totam ipſarum internam ſuperficiem extenſus obſervabitur; ſi albeſcentem, & fere tendineoſam lineam (*o t Tab. VII. fig.* 5.) excipias, quae a baſi interna ſectarum partium oritur, verſus rotundam illarum apertionem (*o*) dirigitur, atque deſinit ad ejuſdem apertionis viciniam.

Detegitur inſuper convexitas quaedam inaequalis, (*Vid. fig. ejuſdem mediam partem*) in ſui medio pervia, quae hujuſce parvi hemiſphaerii peculiarem nucleum conſtituebat. E variis plicis haec convexitas componitur, quarum quinque ſuo limbo obtuſo, marginato, & circulari ad ſe ſe mutuo in centro illius approximatae ſtellatum quoddam ſpatium relinquunt, quod allatam foraminis ſpeciem efformat. Haec apertio ſtellata binis ſupra deſcriptis foraminibus in eadem directione ſubſternitur, & major, minorve fieri poteſt, prout eaedem plicae ſibi plus, minuſve arcte appreſſae ſunt, deſinitque in amplum cavum ab ipſis plicis, quaſi a valvulis, aut labiis obtectum, ad tres fere lineas extenſum, facta plicarum diductione, vel elevatione facile conſpiciendum. In hoc cavo cinerea quaedam, ac fere mucoſa ſubſtantia aquae mixta reperiebatur, quae animalculorum loco proximo vagantium contritam ſubſtantiam fere repraeſentabat.

Quamvis hanc Meduſae ſpeciem ſcopulis perpetuo affixam, numquam ſolutam invenerim, neque facile ab illis manu ſeparari potuerit; attenta tamen ejuſdem ſtructura, non plane negaverim a loco ad locum tranſire poſſe, & fortaſſe etiam aliquando ſolutam vagari. In peculiari tamen contractionis motu, quem firmata baſi, praeſertim ſi irritetur,

violente

violente perficit, ad dimenſionem fere tertia parte minorem coarctatur, & tunc praeputii apertio vix conſpicua, aut valde exigua fit, & per ipſam lenta mucoſa ſubſtantia, quam diximus in profundo ipſius cavo reperiri, veluti ſpuma quaedam ſaepius exit.

Feli porrectum animal avide deglutiebatur, neque ullum eidem damnum attulit. Ipſum vero, aliaſque varias Urticas marinas piſcatores vulgari nomine *reſtegets* appellant.

Habitantem reperiebam Auguſto menſe in perruptorum ſcopulorum excavationibus, foraminum, quae copioſe aderant, amplis lateribus a Sole tutis adhaerentem. Supra aquae marinae libellam extantia quidem erant illa foramina, attamen per intervalla a refluis majoribus undis allui, aut ſaltem inſpergi ſolebant.

Quae huic Meduſae plane conveniant ſynonima, & icones non invenio, niſi forte quis velit huc pertinere Urticas rubras, quas habent RONDELETIUS (*f*), & Petrus BELLONIUS (*g*), quae colore quidem conveniunt, magnitudine vero, ſitu tentaculorum, & partium ſtructura ſatis diverſae ſunt, ut conferenti patebit. Nullius vero cognitarum Meduſae ſpecierum icon proximius accedit ad noſtram in ſtatu ſuo contractionis repraeſentandam, quam exhibita a Cl. Theodoro GRONOVIO in Tom. IV. Act. Helveticorum; quamvis attenta ejuſdem deſcriptione plurimum hae ſpecies inter ſe, & ab aliis jam notis differant. Etenim in illa adnotat Vir Doctiſſimus admodum pellucidam, & tenerrimam totius corporis ſubſtantiam; quatuor tranſverſales coſtas, tentacula marginalia plurima minima, *magnitudine*, ut ait Auctor, *aequalia*, earumque *ope celerrime oblique per aquas ſaltabat animal, manente corporis parte ſemper antrorſum directa.* In noſtra ſpecie coccineus color eſt, ſubſtantia autem corporis non adeo tenera, ſed firmior, & forti cuticula obducta,

(*f*) De piſcibus *lib.* 7. *cap.* 17. *pag.* 530.
(*g*) Aquatil. *lib.* 20. *pag.* 340. 341.
(*h*) *Pag.* 38. *Tab. IV. fig.* 7.

cta. Tandem noſtrum animal locali motu fere deſtitutum, neque per aquas ſaltare poſſe videtur. Primo quidem quod aquis innatans numquam videri potuerit, ſed ſemper ſaxo poſt mortem tenaciter adhaerens; deinde quod quatuor coſtis a Cl. GRONOVIO memoratis plane careat.

Denique monere juvat nullam ſpecierum, quas Cl. JANUS PLANCUS in egregio ſuo libro de *minus notis &c.* habet, ad hanc noſtram pertinere. Cum enim dubitarem utrum pro hujus ſynonimo ſumi poſſet globoſior Urticae ſpecies, quam Vir doctiſſimus ibidem (*i*) memorat; dubii ſolutionem ab Auctore petii per epiſtolam a Cl. ſui Amico, meique Praeceptore amantiſſimo D. ALLIONIO ipſi datam. Vir autem praeſtantiſſimus, cui cum deſcriptione pictura transmiſſa fuit, reſpondit novam ſibi ſpeciem videri, aut ſaltem minus notam, & deſcriptam, atque ab iis, quas ipſe in laudato libro deſcripſit, revera diſtinguendam.

SPECIES ALTERA.

Si in ulla Urticae marinae ſpecie certe in ea, quae cinerea dicitur ab Auctoribus, multiplices varietates occurrunt. Aliae enim ex cinereo ad album, aliae ad griſeum, aliae ad caeruleum, purpureumque vergunt; nonnullae etiam ex griſeo, purpureo, vel etiam viridi colore diverſimode variegatae reperiuntur. Quae tamen ſingulae, cum ſola colorum inconſtantia ludant, diſtinctam ſpeciem non videntur conſtituere, niſi peculiaris alia nota ex partium diverſa ſtructura petita accedat, qua diſtingui mereantur. Reliquis propterea miſſis hujus generis ſpeciebus, quae in Niceenſi mari copioſe reperiuntur, nonnulla de rariori una ſpecie memorem, quam exhibet *fig.* 6. & 7. *Tab. VII.* eritque.

Medu-

(*i*) *Pag.* 43.

Medusa orbiculata, utrinque compressa; tentaculis marginalibus plurimis, perpetuo nudis.

Hujus Medusae corpus complanatum orbem repraesentat, cujus ad centrum media crassities, seu altitudo est duarum linearum, ad periphaeriam vero lineam parumper superat. Diameter autem, sive latitudo ad unciam circiter extenditur.

In una ejusdem facie quinque sunt arcuatae plicae (*zzzz fig.* 6.) convexitatibus suis versus centrum mutuo se se contingentes, & quinque-labiatum ideo Medusae os repraesentantes. Circumvolvitur exinde arcuatae plicae utraque extremitas, & post varios anfractuosos recessus versus periphaeriam simili extremitati proximae plicae occurrit, & cum ipsa continuatur. Fit inde ut omnes plicae simul sumptae totam superficiem efforment, & veluti intestinulum unicum proprio mesenterio alligatum, & in se demum redeuntem exhibeant.

Cavum quoddam spatium quinque illis plicis os constituentibus subjacet, quod ad duas circiter lineas amplum conspicitur.

Altera animalis superficies (*ooo fig.* 7.) magis complanata, & fere plana est; albida etiam membrana minutissimis lineis a centro divergentibus radiata obtegitur, ex cujus disruptione fusco-flavescens gelatinosa, & ad lentem quasi stupea materies erumpere observatur.

Ad margines superficiebus descriptis comprehensos paullo magis versus primam illam duplex oritur series griseo-caerulescentium tentaculorum (*ssss Tab. VII. fig.* 6. & 7.), quae pollicarem longitudinem habent; sensim sensimque versus extremum extenuantur, & ibi minus colorata fiunt. Hujusmodi autem tentacula nulla agitatione commota radiatim divergunt instar nectariorum Passiflorae incarnatae, aut si velis radiatum florem belle repraesentant, cujus discus albidus, & radius cinereus sit.

Hanc Medusae speciem cum praecedente in aqua salsa quinque mensium spatio maceratam microscopio pluries subjeci. In utraque autem per microscopium observari cuticulam, quae totum corpus obtegit, satis firmam se se conservasse, & rugas tantummodo contraxisse, quae a periphaeria ad centrum dirigebantur, satisque conspicuae erant in magis plana utriusque superficie; in facie vero, ubi Medusae os in utraque locatur, in praeputio prioris speciei, in plicis, & in tentaculis utriusque transversim circulariter eaedem rugae dirigebantur, & minutissimae erant.

De hujus Medusae motibus nihil addam, nisi quod per undas solutam vagari scripserit praeclarissimus Amicus VERANI, Medicus, & Historiae maritimorum amantissimus cultor, qui circa Villafrancam Niceaensem reperit, & hanc cum maritimis aliis in aqua maris probe servatam humanissime communicavit.

Synonima, & icones non habeo; nisi huc forte pertineat urtica cinerea RONDELETII, (*k*) quae tamen, si ex manca descriptione, & icone, quam dedit, neglecto colore, liceat judicare, est vivendi modo, tentaculorum longitudine, ac dispositione, aliisque valde diversa.

(*k*) De piscibus *lib. XVII. pag.* 529.

Imprimatur. PISELLI Vic. Gen. S. Officii Taurini.

Se ne permette la Stampa.

GALLI per la Gran Cancelleria.

ÉCLAIRCISSEMENS
SUR LE MOUVEMENT DES CORDES VIBRANTES
PAR M. EULER.

I. TOus ceux qui ont entrepris de déterminer le mouvement des cordes vibrantes ont borné leurs recherches à ces trois conditions:

1° Ils ont confidéré la corde comme fixée en fes deux extrémités *A* & *B* (*fig.* 1.), & tendue par une force quelconque, en forte que dans fon état naturel fa figure foit repréfentée par la ligne droite *AB*: ce n'eft que dans cet état que la corde peut demeurer en repos ou en équilibre.

2° Ils n'ont confidéré que les mouvemens extrêmement petits d'une telle corde, en forte que fi la ligne *AYB* repréfente la figure que la corde prend pendant fon mouvement à un inftant quelconque, on puiffe toujours regarder les appliquées *XY* de cette ligne comme infiniment petites.

3° Ils ont fuppofé que le mouvement de chaque élément de la corde *Y* fe faffe toujours fuivant la direction de l'appliquée *YX* ou qu'il ne s'en écarte qu'infiniment peu. On pourroit bien traiter plus généralement cette queftion, mais alors la Théorie conduit à un calcul fi embarraffé qu'on n'en fauroit rien conclure.

II. La dernière condition fe réduit à celle-ci, que l'inclinaifon de chaque élément de la corde *Yy* à l'axe *AB* foit infiniment petite, ou bien que la tangente tirée à chaque point *Y* faffe avec l'axe *AB* un angle infiniment petit. Ce n'eft que dans ce cas qu'on peut regarder chaque élément de la courbe *Yy* comme égal à l'élément répondant de l'axe *Xx*: or cette condition eft abfolument néceffai-

re, pour que le mouvement de chaque point Y ſe faſſe dans la direction de l'appliquée YX. Delà on comprend auſſi réciproquement que toutes les fois, que cette condition convient à la figure AYB, le mouvement de chaque point Y ne ſauroit s'écarter de la direction de l'appliquée YX.

III. Donc quand on demande le mouvement de la corde après qu'elle aura reçu une impulſion quelconque, il faut abſolument que la figure qui lui a été imprimée d'abord ſoit telle, que non ſeulement toutes les appliquées XY ſoient quaſi infiniment petites, mais que l'inclinaiſon de tous les élémens de la courbe AYB ſoit auſſi infiniment petite. On pourroit encore ajouter cette condition, qu'on ait imprimé en même tems à chaque élément de la corde un certain mouvement ſelon la direction de l'appliquée, & ce mouvement initial doit auſſi être tel, qu'il n'en réſulte aucun ſaut dans la ſuite; ou bien que la figure de la corde demeure toujours conforme aux loix preſcrites. Cela remarqué, examinons plus ſoigneuſement tant la queſtion en elle même, que la ſolution que la Théorie fournit.

QUESTION.

IV. *Aiant réduit la corde tendue à une figure quelconque, ſi au moment qu'on la relache, on imprime encore à chaque élément de la corde un mouvement quelconque: on demande, pour chaque moment du tems ſuivant, tant la figure, que le mouvement que la corde aura alors, ſuppoſant que tant la figure initiale que le mouvement qui lui aura été imprimé ſoient d'acord avec les loix preſcrites.*

EXPLICATIONS.

V. Soit *A B* (*fig.* 2.) la corde fixée dans ſes deux extrémités *A* & *B*, & tendue par une force quelconque, à laquelle on ait imprimé au commencement la figure *A S B*, & d' abord cette courbe doit être telle, que 1° toutes ſes appliquées ſoient quaſi infinimens petites, & 2° que toutes ſe tangentes ne s' écartent qu'infiniment peu de l' axe *A B*. Ces deux conditions ſont ſi naturellement liées avec la tenſion, qu'il ſeroit preſque impoſſible de réduire la corde à une telle figure, où ces deux conditions n'euſſent pas lieu. De là il eſt clair, que la figure initiale peut être variée à l' infini, & qu'elle dépend entiérement de notre volonté. Il eſt donc poſſible de donner à la corde une telle figure, qui ne ſauroit être exprimée par aucune équation analitique, comme ſi on la tiroit par un mouvement libre de la main, ſans qu'aucune loi de continuité y ait lieu.

VI. Il n'y a certainement aucun doute, qu'on ne puiſſe imprimer à la corde une telle figure, & où pourtant les deux conditions preſcrites aient lieu. Pour s' en aſſurer mieux, on n'a qu'à tirer de *A* à *B* une ligne courbe quelconque *A M B* en obſervant cette ſeule condition, qu'il n'y ait nulle part une tangente perpendiculaire à l'axe : alors en diminuant toutes les appliquées *X M* quaſi à l' infini ſelon un même rapport, de ſorte que $XS = \alpha\, XM$, prenant α pour une fraction extrémement petite, non ſeulement toutes les appliquées *X S* deviendront infiniment petites, mais auſſi les tangentes dans tous les points *S* ſeront infiniment peu inclinées à l'axe *A B*, tout comme les deux conditions preſcrites l'exigent.

VII. On ne ſauroit douter non plus qu'après avoir imprimé à la corde une telle figure diſcontinue ou irreductible à aucune équation analitique, la corde étant ſubitement relachée, ſoit qu'on lui imprime encore quelque mouvement

ou non, n' en reçoive un certain mouvement de vibration. Mais on trouve ici bien des raiſons de douter ſi dans ces cas la Théorie eſt ſuffiſante de nous conduire à une ſolution, puiſqu'il ſemble que l'analiſe, comme elle a été traitée juſqu'ici, ne ſauroit être appliquée qu'à des courbes, dont la nature peut être renfermée dans une équation analitique. Mais il n' eſt pas encore tems de décider cette queſtion: ſi l'analiſe eſt incapable de nous fournir une ſolution pour ces cas, nous ne nous en appercevrons que trop tôt: & partant il n'eſt pas néceſſaire de reſtraindre d'abord la queſtion aux ſeules courbes continues, dont la nature eſt exprimée par quelque équation.

VIII. Mais ſi la Théorie nous conduit à une ſolution ſi générale, qu'elle s'étend auſſi bien à toutes les figures diſcontinues que continues il faudra avouer, que cette recherche nous ouvre une nouvelle carrière dans l' analiſe, en nous mettant en état d' appliquer le calcul à des courbes qui ne ſont aſſujetties à aucune loi de continuité, & ſi cela a paru impoſſible juſqu'ici, la découverte ſera d'autant plus importante. Or en effet j' ai remarqué à cette occaſion, que la partie de l'analiſe des infinis, à laquelle cette queſtion appartient, renferme eſſentiellement ce caractère, qu'elle reçoit des fonctions abſolumens arbitraires, pendant que de telles fonctions ſont entiérement bannies de l'analiſe ordinaire qu'on a cultivée juſqu'ici, & qui roule principalement ſur des fonctions d' une ſeule variable. Mais l' analiſe dont nous avons beſoin ici, s'occupe des fonctions de deux ou pluſieurs variables: où cela arrive de bien remarquable, que chaque intégration introduit dans le calcul une fonction abſolument arbitraire au lieu d' une ſimple quantité conſtante.

IX. Après avoir réduit la corde à une figure quelconque ASB, on ſuppoſe communement qu'on la relache ſubitement, ſans lui imprimer aucun mouvement, de ſorte

que dans ce premier instant tous les élémens de la corde sont en repos, ou leur vitesse nulle. Mais il est possible que dans le moment même, où l'on relache la corde, on imprime à chacun de ses élémens un certain mouvement, dont la direction doit toujours être perpendiculaire à l'axe. Pour tenir compte de cette circonstance on peut décrire sur l'axe *AB* l'échelle des vitesses initiales *AVB* dont chaque appliquée *XV* marque la vitesse, qui aura été imprimée au point de la corde *S* selon la direction *SX*. Puisque les extrémités de la corde *A* & *B* demeurent toujours immobiles, il est évident que cette courbe *AVB* doit passer par les deux termes *A* & *B*, de même que la figure initiale *ASB*.

SOLUTION DINAMIQUE DE LA QUESTION.

X. Posons maintenant la longueur de la corde $AB = a$ (*fig.* 2.) son poids $= P$, & la force dont elle est tendue $= T$; or prenant une partie quelconque $AX = x$, soit le poids de cette partie $= p$, qui marque une fonction quelconque de x, afin que la solution s'étende à des cordes dont l'épaisseur est variable. Ensuite pour l'état forcé auquel la corde a été réduite au commencement, soit l'appliquée $XS = s$, & la vitesse qui aura été imprimée au point *S* dans la direction *SV* soit $XV = u$, ensorte que u marque l'espace parcouru par cette vitesse dans une seconde. Cela posé on demande quelle figure, & quel mouvement la corde aura, après un tems quelconque écoulé depuis cet état initial.

XI. Soit donc écoulé depuis ce commencement un tems $= t$ *secondes*, & supposons que la corde ait à présent la figure *AYB* (*fig.* 3.), pour laquelle posons l'appliquée

$XY = y$, qui répond à la même abſciſſe $AX = x$, où au commencement l'appliquée étoit $XS = s$, & il eſt clair que y ſera une certaine fonction tant de l'abſciſſe x que du tems t, dont la nature doit être déterminée par l'état initial, auquel nous ſuppoſons que la corde a été réduite. Tout revient donc à trouver cette fonction y, dont la valeur elle même nous découvre la figure AYB, & la formule différentielle $(\frac{dy}{dt})$ la viteſſe du point Y dans le ſens XY, de ſorte que ſi le point Y ſe meut vers X, ſa viteſſe ſera $= -(\frac{dy}{dt})$.

XII. Delà il eſt évident, que la fonction y que nous cherchons doit avoir les propriétés ſuivantes :

1° Poſant le tems $t = 0$, il faut qu'il devienne $y = s$, puiſqu'au commencement la corde eſt ſuppoſée avoir eu la figure donnée ASB (*fig.* 2.) dont l'appliquée répondante à la même abſciſſe $AX = x$ vient d'être nommée $XS = s$.

2° Poſant encore $t = 0$, il faut que la formule différentielle $-(\frac{dy}{dt})$ devienne $= u$, puiſque u marque la viteſſe initiale, dont le point S aura été pouſſé ſelon la direction SX. Donc ſi la corde n'avoit reçu aucun mouvement au commencement, mais qu'elle eut été ſimplement relachée, il faudroit qu'il fut $-(\frac{dy}{dt}) = 0$, en ſuppoſant le tems $t = 0$.

3° Enſuite puiſque les deux extrémités A & B de la corde demeurent immobiles, l'appliquée y doit auſſi être une telle fonction des deux variables x & t, que poſant ou $x = 0$, ou $x = a$ elle s'évanouiſſe toujours dans l'un & l'autre cas ; par la même raiſon il faudra que dans ces deux cas la formule de la viteſſe $(\frac{dy}{dt})$ s'évanouiſſe auſſi.

XIII. Maintenant pour découvrir les forces, dont l'élément de la corde en Y eſt pouſſé à préſent, tirons en Y la tangente YT, & poſons l' angle qu'elle fait avec l'axe $XYT = \omega$, que nous ſuppoſons être infiniment petit, & puiſque en vertu de la tenſion T l' élément Y eſt tiré ſuivant la direction YT par cette même force T, il en réſulte ſuivant la direction YX la force T ſin. $\omega = T\omega$, & ſuivant la direction de l' axe XA la force T coſ. $\omega = T$, qui eſt détruite par la tenſion de l' autre coté, d' où l' on voit que la tenſion eſt par tout la même. Mais de l' autre côté, dans l'élément ſuivant, l'angle ω devient $\omega + d\omega$, & partant l' élément Y ſera pouſſé par la force $T\ (\omega + d\omega)$ ſuivant la direction contraire XY. Donc puiſque l' élément Y eſt ſollicité par ces deux forces enſemble, il ſera pouſſé ſuivant la direction XY par la force $= T\,d\omega$.

XIV. Tant que nous enviſageons la courbe AYB, le tems t demeure le même: donc puiſque l' angle $XTY = \omega$ eſt infiniment petit, nous aurons $\omega = (\frac{dy}{dx})$, & partant $d\omega = dx\ (\frac{ddy}{dx^2})$, de ſorte que l' élément en Y eſt ſollicité dans le ſens XY par la force motrice $T\,dx\ (\frac{ddy}{dx^2})$. Or le poids de la partie de la corde AX ou AY a été ſuppoſé $= p$, d' où le poids de l'élement en queſtion ſera $= dp$, qui exprime en même tems ſa maſſe; donc la force accélératrice dans le ſens XY ſera $= \frac{Tdx}{dp}\ (\frac{ddy}{dx^2})$, où puiſque p eſt une fonction de x connue par l' épaiſſeur variable de la corde; la formule $\frac{Tdx}{dp}$ aura auſſi une valeur connue. Si la corde avoit partout la même épaiſſeur, le poids de toute la longueur $AB = a$

aiant été posé $= P$, nous aurions $a : P = x : p$, & partant $\frac{dx}{dp} = \frac{a}{p}$, ou bien la force accélératrice seroit $= \frac{Ta}{P} (\frac{ddy}{dx^2})$.

XV. Aiant trouvé la force accélératrice de l'élèment Y dans le sens $YY = \frac{T\,dx}{dp} (\frac{ddy}{dx^2})$. Nous n'avons qu'à considérer le mouvement de ce même élément. Or aiant déja remarqué (XI.) que la vitesse de cet élément dans le sens XY est $= (\frac{dy}{dt})$ son accélération dans le même sens sera $= (\frac{ddy}{dt^2})$, qui doit donc être proportionelle à la force accélératrice. Mais pour obtenir une équation déterminée puisque nous exprimons le tems t en secondes, & la vitesse par l'espace parcouru dans une seconde, nous n'avons qu'à introduire la hauteur, d'où la gravité fait tomber les corps dans une seconde. Soit donc cette hauteur $= g$, & la comparaison de la force accélératrice avec l'accélération nous fournit cette équation :

$$\frac{2Tg\,dx}{dp} (\frac{ddy}{dx^2}) = (\frac{ddy}{dt^2}).$$

XVI. Voilà donc une équation differentielle du second dégré de la résolution de laquelle dépend la détermination du mouvement de la corde, & tout revient maintenant à chercher, quelle fonction des deux variables x & t doit être l'appliquée y, afin qu'elle satisfasse non seulement à cette équation, mais qu'elle renferme aussi les conditions marquées ci-dessus (XII.). Or j'observe ici que $\frac{2Tg\,dx}{dp}$ est une certaine fonction de la seule variable x, sans que le tems t y soit compris, & que cette fonction dépend de l'épaisseur de la corde. Mais il encore impossible de

de résoudre cette équation en général, quelle que soit la variabilité de l'épaisseur de la corde, puisqu'ici je n'ai pu découvrir que certains cas, dont le nombre est bien infini, où la résolution réussit, mais à présent je me bornerai uniquement aux cordes, dont l'épaisseur est par tout la même, parceque c'est le cas, auquel presque tous ceux qui ont traité cette question se sont attachés.

Résolution analitique de la question pour le cas, où la corde a partout la même épaisseur.

XVII. Puisque la corde a partout la même épaisseur, à cause de $dx : dp = a : P$, nôtre équation sera

$$\frac{2Tga}{P}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right),$$

où a marque la longueur de la corde, P son poids, & T la force dont elle est tendue, la valeur de g étant $15\frac{5}{8}$ pieds de Rhin; la quantité $\frac{2Tga}{P}$ est donc constante, & exprime une certaine surface, & partant pour abreger je poserai $\frac{2Tga}{P} = cc$, pour avoir à résoudre cette équation

$$cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right).$$

Il est aisé de trouver une infinité des fonctions des deux variables x & t, qui étant substituées au lieu de y satisfont à cette équation, & qui remplissent en même tems la condition qu'il devienne $y = 0$, soit qu'on pose $= 0$, ou $x = a$.

XVIII. Pour en donner un exemple supposons $y = \alpha$ sin. mx cos. nt, & puisque

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \alpha m \operatorname{cof.} mx \operatorname{cof.} nt, \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = -\alpha mm \operatorname{fin.} mx \operatorname{cof.} nt$

$\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\alpha n \operatorname{fin.} mx \operatorname{fin.} nt, \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\alpha nn \operatorname{fin.} mx \operatorname{cof.} nt$

l'équation trouvée exige qu'il ſoit $mmcc = nn$, ou $n = mc$; de ſorte que $y = \alpha \operatorname{fin.} mx \operatorname{cof.} mct$; laquelle valeur évanouit déja au cas où $x = 0$; mais pour qu'elle évanouiſſe auſſi au cas où $x = a$, il faut prendre $ma = i\pi$, où π marque la périphérie d'un cercle, dont le diamètre $= 1$, & i un nombre entier quelconque. Voilà donc une ſolution particulière de notre queſtion renfermée dans cette équation :

$$y = \alpha \operatorname{fin} \frac{i\pi x}{a} \cdot \operatorname{cof.} \frac{i\pi ct}{a}.$$

XIX. Puiſqu'on peut prendre pour i un nombre entier quelconque, cette formule fournit une infinité de formules dont non ſeulement chacune donne une valeur convenable à y, mais auſſi deux ou pluſieurs jointes enſemble. D'où l'on tire une ſolution beaucoup plus générale renfermée dans cette expreſſion qu'on peut continuer à l'infini:

$$y = \alpha \operatorname{fin.} \frac{\pi x}{a} \operatorname{cof.} \frac{\pi ct}{a} + \beta \operatorname{fin.} \frac{2\pi x}{a} \operatorname{cof.} \frac{2\pi ct}{a} + \&c.$$

& puiſqu'en écrivant $\operatorname{fin.} \frac{i\pi ct}{a}$ au lieu de $\operatorname{cof.} \frac{i\pi ct}{a}$ on ſatisfait également aux conditions préſcrites, on peut donner cette ſolution encore plus générale:

$$y = \alpha \operatorname{fin.} \frac{\pi x}{a} \operatorname{cof.} \frac{\pi ct}{a} + \beta \operatorname{fin.} \frac{2\pi x}{a} \operatorname{cof.} \frac{2\pi ct}{a} + \&c.$$

$$+ \alpha' \operatorname{fin.} \frac{\pi x}{a} \operatorname{fin.} \frac{\pi ct}{a} + \beta' \operatorname{fin.} \frac{2\pi x}{a} \operatorname{cof.} \frac{2\pi ct}{a} + \&c.$$

XX. Voyons maintenant, quel devroit être l'état initial de la corde, pour que cette formule exprimât le mouvement dont la corde ſera agitée dans la ſuite. Pour cet effet nous n'avons qu'à poſer $t = 0$, & puiſque alors

y devient égale à l'appliquée s dans la figure initiale ASB (*fig.* 2.) nous aurons pour cette courbe l'équation qui suit :

$$s = \alpha \text{ fin. } \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ fin. } \frac{2\pi x}{a} + \gamma \text{ fin. } \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

Or pour les viteſſes u qui doivent être imprimées à tous les élémens de la corde, puiſque $u = -(\frac{dy}{dt})$, en poſant $t = 0$; nous aurons

$$u = -\frac{\pi c}{a}\alpha' \text{ fin. } \frac{\pi x}{a} - \frac{2\pi c}{a}\beta' \text{ fin. } \frac{2\pi x}{a} - \frac{3\pi x}{a}\gamma' \text{ fin. } \frac{3\pi x}{a} - \&c.$$

Donc réciproquement toutes les fois qu'on aura imprimé à la corde une telle figure & un tel mouvement, la valeur de y donnée ci-deſſus nous découvrira pour tout tems ſuivant tant la figure, que le mouvement de la corde.

XXI. Comme les valeurs de s & de u contiennent une infinité de termes, il ſemble qu'elles renferment tous les cas poſſibles, de ſorte que quelque figure & quelque mouvement, qu'on ait imprimé à la corde au commencement, ces deux valeurs y puiſſent être ajuſtées. Car en effet on peut toujours déterminer enſorte les coéficiens α, β, γ &c. & α', β', γ' &c. que l'une & l'autre des courbes ASB & AVB paſſe par une infinité de points donnés. Cependant quelque convainquant que paroiſſe cet argument, je ne ſaurois enviſager cette ſolution, que comme très-particulière ; & cela par la même raiſon, qu'on régarderoit fort-mal à propos toutes les courbes poſſibles comme renfermées dans cette équation parabolique $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. quoi qu'on puiſſe faire paſſer cette courbe par une infinité de points donnés.

XXII. Je ſoutiens donc que cette ſolution quelque générale qu'elle paroiſſe, n'eſt que très-particulière ; & qu'elle n'épuiſe point l'étenduë de l'équation différentielle du

ſecond dégré $cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ qui renferme la ſolution complète de notre queſtion. Pour nous aſſurer entièrement de cette inſuffiſance, on n'a qu'à conſidérer le cas où l'on n'auroit ébranlé au commencement qu'une partie de la corde comme AX, le reſte BX aiant demeuré dans un repos parfait. Car poſant cette partie ébranlée $= b$, il faudroit déterminer en ſorte les expreſſions trouvées pour s & u, que prenant $x > b$ elles devinſent $= 0$, & cela pour toutes les valeurs poſſibles entre b & a, ce qui eſt manifeſtement impoſſible. Ainſi le mouvement, que la corde recevra dans ce cas, ne ſauroit jamais être repréſentée par l'expreſſion donnée ci-deſſus pour l'appliqué y.

Intégration complète de l'équation.

$$cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right).$$

XXIII. Mais pourquoi vodroit-on s'arrêter à une ſolution particulière & exiger la détermination d'une infinité de coéficiens, tandis qu'on eſt en état d'aſſigner l'intégrale complète de cette équation, qui doit néceſſairement renfermer tous les cas poſſibles, & qu'on peut même aiſément appliquer à toutes les figures & à tous les mouvemens qu'on aura imprimés au commencement à la corde. Je me tiendrai donc uniquement à l'intégrale complète de cette équation différentio-différentielle qu'on trouve exprimée de cette manière

$$y = \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x - ct),$$

où $\Gamma : (x - ct)$ marque une fonction quelconque de la quantité $x + ct$, & $\Delta : (x - ct)$ une fonction auſſi quelconque de la quantité $x - ct$. Donc puiſque cette ex-

pression renferme deux fonctions absolument arbitraires, c'est une marque certaine qu'elle est l'intégrale compléte de notre équation différentio-différentielle.

XXIV. Pour faire voir comment cette expression satisfait à la question, on n'a qu'à en faire la substitution; pour cet effet je marquerai le différentiel d'une telle fonction générale $\Gamma : u$ par $du\,\Gamma' : u$; donc si nous posons $z = \Gamma : (x + ct)$ nous aurons $dz = (dx + c\,dt)\,\Gamma' : (x + ct)$, & partant $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma' : (x + ct)$, & $\left(\frac{dz}{dt}\right) = c\Gamma' : (x + ct)$. De là notre expression fournira par la différentiation:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \Gamma' : (x + ct) + \Delta' : (x - ct),\ \left(\frac{dy}{dt}\right) = c\Gamma' : (x + ct) - c\Delta' : (x - ct)$$

$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \Gamma'' : (x + ct) + \Delta'' : (x - ct),\ \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\Gamma'' : (x + ct) + cc\Delta'' : (x - ct)$$

d'où il est évident, que $cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ devient égal à $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, tout comme la nature de notre question exige.

XXV. Puisque cette intégrale contient deux fonctions absolument arbitraires, il n'y a aucun doute qu'on ne les puisse prendre ensorte, qu'elles conviennent à l'état initial auquel la corde aura été réduite au commencement. On n'a qu'à remarquer que la fonction $\Gamma : (x + ct)$ représente l'appliquée d'une courbe quelconque, prenant l'abscisse $= x + ct$, & que l'autre fonction $\Delta : (x - ct)$, représente l'appliquée d'une autre courbe quelconque, qui répond à l'abscisse $x - ct$. Donc au lieu de ces deux fonctions arbitraires on peut substituer deux courbes quelconques soit régulières, ou comprises dans quelques équations, soit irrégulières ou tracées à volonté sans qu'elles soient attachées à quelque loi de continuité.

XXVI. Comme la queſtion elle même renferme déja deux courbes abſolument arbitraires, l'une *ASB* (*fig.* 2.) qui eſt la figure qu'on a donnée au commencement à la corde, & l'autre *AVB*, qui eſt l'échelle des viteſſes imprimées à la corde au premier inſtant du relâchement; aucune ſolution ne ſauroit être compléte, à moins qu'elle ne fût applicable à ces deux courbes abſolument arbitraires. Donc puiſque ces deux courbes ne ſont ſujettes à aucune loi de continuité, il faut bien que la ſolution ne ſoit ſujette à aucune limitation à cet égard. Ainſi la nature de la queſtion elle même nous donne déja à connoitre que la ſolution, pour qu'elle ſoit compléte, doit néceſſairement renfermer deux fonctions abſolument arbitraires pour qu'on en puiſſe faire l'application à toutes les circonſtances de la queſtion.

XXVII. Cette reflexion eſt d'autant plus importante, que de telles ſolutions ont été tout-à-fait inconnues juſqu'ici dans l'Analiſe, & qu'on a cru même, que le calcul n'étoit applicable qu'à des quantités ſoumiſes à la loi de continuité, ou compriſes dans quelque expreſſion analitique. Ce préjugé, s'il eſt permis de le nommer ainſi, a été ſans doute la cauſe que ma ſolution générale des cordes vibrantes a paru fort ſuſpecte même à des Géomêtres du premier ordre; mais à préſent j'eſpère que quand ils voudront bien peſer la nature de la queſtion, ils conviendront avec moi, que la ſolution ne ſauroit être moins générale, que celle que j'ai donnée, & tous les prétendus inconvéniens, dont on a chargé ma ſolution, ne tombent que ſur les premiéres limitations, auxquelles on eſt obligé de reſtraindre la queſtion.

XXVIII. Mais rien ne ſauroit mieux lever tous les doutes, que l'application de ma ſolution générale au mouvement déterminé d'une corde, après qu'on l'aura réduite au commencement dans un état déterminé quelconque. Car il faut

bien considérer, qu'il ne s'agit pas ici de déterminer d'une manière vague les mouvemens dont une corde tendue est susceptible, mais je suppose expressément, qu'on ait forcé au commencement la corde à une certaine figure donnée, & qu'on lui ait imprimé en même tems un certain mouvement pareillement donné. Cet état initial de la corde étant donc entièrement déterminé, il faut bien que le mouvement suivant le soit aussi, & qu'il dépende nécessairement de toutes les conditions de l'état initial. Je m'en vais donc examiner de quelle manière les deux fonctions arbitraires de ma solution doivent être déterminées, pour qu'elles répondent à l'état initial, auquelle la corde a été réduite au commencement.

Application de la solution générale à l'état initial de la corde.

XXIX. Aiant trouvé pour l'état de la corde après un tems quelconque de *t secondes* écoulé depuis le commencement, cette équation intégrale compléte.

$$y = \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x + ct)$$

qui exprime la figure que la corde aura alors, on en déduit aisément la vitesse, que le point Y aura dans la direction YX (*fig.* 3.); car puisqu'elle est $= -\left(\frac{dy}{dt}\right)$ nous aurons

$$-\left(\frac{dy}{dt}\right) = -c\Gamma' : (x + ct) + c\Delta' : (x - ct).$$

Maintenant nous n'avons qu'à poser $t = o$ pour avoir l'état initial de la corde auquel nous avons vû, qu'il doit devenir $y = s$, & $-\left(\frac{dy}{dt}\right) = u$, où s & u sont des fonctions données de x; nous aurons donc

$$s = \Gamma : x + \Delta : x \;\&\; u = -c\Gamma' : x + c\Delta' : x,$$

& de ces deux équations il faut déterminer la nature des deux fonctions indiquées par les signes Γ & Δ, ou bien des deux courbes dont les appliquées représentent ces fonctions.

XXX. Pour cet effet multiplions la dernière équation par dx, & en prenant l' intégrale nous aurons

$$\frac{\int u\,dx}{c} = -\Gamma: x + \Delta: x,$$

cette équation jointe à la première nous fournit

$$\Gamma: x = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2c}\int u\,dx \;\&\; \Delta: x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2c}\int u\,dx,$$

où il faut remarquer que s marque l' appliquée XS de la courbe donnée ASB, qui répond à l' abscisse x, & que $\int u\,dx$ exprime l' aire AXV de l' autre courbe aussi donnée AVB, qui convient à la même abscisse x. D'où l' on comprend, que pour avoir les fonctions $\Gamma: (x + ct)$ & $\Delta: (x - ct)$ on n' a qu'à prendre au lieu de l' abscisse x, dans les deux courbes données, ou $x + ct$ pour la première, ou $x - ct$ pour l' autre fonction.

XXXI. De là on tire d'abord la construction suivante de notre question. Soit ASB (*fig.* 4.) la figure à laquelle a été réduite la corde au commencement, AVB l'échelle des vitesses, dont les appliquées XV représentent les vitesses que tous les points de la corde S ont reçues au commencement dans le sens SX. Cela posé après le tems écoulé $= t$, le point de la corde S sera parvenu en Y, de sorte que l'intervalle XY soit $= \Gamma: (x + ct) + \Delta: (x - ct)$; or nous venons de voir que $\Gamma: x = \frac{1}{2}XS - \frac{1}{2c}AXV$ & $\Delta: x = \frac{1}{2}XS + \frac{1}{2c}AXV$. Donc prenant de part & d'autre du point X les intervalles $XT = Xt = ct$ pour avoir les abscisses $AT = x + ct$ & $At = x - ct$, nous aurons pour le lieu cherché

Y l'ap-

Y l'appliquée $XY = \frac{1}{2} TN - \frac{1}{2c} . ATU + \frac{1}{2} tn + \frac{1}{2c} . Atu$ ou bien $XY = \frac{1}{2c} (TN + tn) - \frac{1}{2c} . tTUu.$

XXXII. Voici donc une conſtruction bien ſimple pour déterminer le lieu de chaque point de la corde après un tems quelconque de *t ſecondes* écoulé depuis le commencement, & cette conſtruction eſt uniquement fondée ſur les deux courbes données ASB & AVB, par leſquelles l'état initial de la corde eſt déterminé. On voit auſſi que cette conſtruction réuſſit également bien, ſoit que ces deux courbes données ſoient renfermées dans quelque équation analitique, ou qu'elles ſoient tirées d'une manière quelconque ſans qu'aucune loi de continuité y ait lieu. Il n'y a ici abſolument rien, qui demande une expreſſion analitique pour la nature de ces deux courbes, & dès qu'elles ſont tracées leur route ſuffit toute ſeule pour déterminer le mouvement tout entier de la corde, puiſque ſachant pour tout tems les lieux de tous les points de la corde, on ne ſauroit plus rien déſirer pour une parfaite connoiſſance du mouvement. Je ne reconnois ici d'autres limitations, que celles que j'ai raportées au commencement, ſans leſquelles notre ſolution ne ſauroit avoir lieu.

XXXIII. Cette conſtruction n'eſt aſſujettie à aucun inconvénient, tant que les points T & t tombent entre les termes de la corde A & B, mais quand ils tombent au delà, où ni l'une, ni l'autre courbe donnée ne fournit plus des appliquées, on voit bien qu'il faut continuer l'une & l'autre de ces courbes pour que cette conſtruction puiſſe être miſe en pratique. D'où réſulte cette queſtion bien importante, ſelon quelle loi il faut continuer les deux courbes données ASB & AVB au delà des termes de la corde A & B, afin que notre conſtruction nous découvre le vrai mouvement de la corde; comme cette loi doit être

commune à toutes les courbes données par l'état initial, soit qu'elles soient continues ou discontinues, je remarque d'abord que cette loi ne sauroit être attachée à l'équation analitique qui exprimeroit peut-être la nature d'une telle courbe. Ainsi par exemple, si l'une de ces courbes étoit un arc de cercle, il seroit fort-mal à propos, si l'on vouloit continuer cet arc jusques à remplir un cercle tout entier.

XXXIV. Dans cette incertitude il faut s'en tenir uniquement à la Théorie, qui nous a conduit si bien jusqu'ici sans que nous aions besoin de nous livrer à des conjectures. En effet n'aiant pas encore tenu compte de toutes les circonstances qui concourent à déterminer le mouvement de la corde, il ne faut pas être surpris que la continuation de ces courbes ne soit pas encore décidée. Or nous n'avons pas encore introduit dans le calcul cette circonstance fort-essentielle à la question, que la corde est fixée par ces deux bouts *A* & *B*, de sorte que l'un & l'autre de ces points demeure toujours en repos. Sans cette condition la continuation de nos courbes seroit effectivement indéterminée, & partant c'est de là qu'il faut tirer la véritable loi que nous devons suivre dans cette opération. Je m'en vais donc rechercher cette loi dans les Articles suivans.

Continuation des deux courbes données pour achever notre construction.

XXXV. Puisque notre question renferme essentiellement cette condition, que les deux points *A* & *B* demeurent toujours immobiles, la continuation des deux courbes *ASB* & *AVT* doit être telle, que si nous en déterminons pour un tems quelconque les éloignemens de ces deux points à l'axe, ils se trouvent constamment = o; donc si nous concevons le point *X* transporté ou en *A*, ou en *B*, il faut que dans l'un & l'autre cas on ait toujours

$$\frac{1}{2}(TN + tn) - \frac{1}{2c}\,tTUu = 0$$

quelque grands ou petits qu'on prenne de part & d'autre les intervalles égaux $XT = Xt$, qui ſont proportionels au tems. C' eſt donc cette circonſtance ſi eſſentielle à notre queſtion, qui nous montrera de quelle manière il faut continuer les deux courbes données ASB & AVB au delà de l' étendue de la corde AB.

XXXVI. Comme cette expreſſion qu'on doit égaler à zero dépend des deux courbes données à la fois, j' obſervé d'abord, que chaque partie doit évanoüir ſéparément. Car ſi au commencement la corde aiant été réduite à la figure ASB avoit été relachée ſans lui imprimer du mouvement, la courbe AVB évanoüiroit ou ſeroit confondue avec l' axe même AB, & alors il s' agiroit de continuer la ſeule courbe ASB, d'où l'on tireroit $TN + tn = 0$. De la même manière, ſi au commencement la corde avoit été laiſſée dans ſon état naturel, & qu'on eut imprimé à chacun de ſes points un certain mouvement repréſenté par la courbe AVB, de ſorte que l' autre courbe ASB fût confonduë avec l' axe AB: on n' auroit qu'à continuer la ſeule courbe AVB, dont la continuation devroit être telle, qu'il fut $tLUu = 0$, en prenant le point X ou en A, ou en B.

XXXVII. Cependant il n' eſt pas abſolument néceſſaire, qu'on poſe ſéparément $TN + tn = 0$, & l'aire $tTUu = 0$, car on verra facilement que tout revient au même, pourvû qu'on faſſe enſorte que $TN + tn - \frac{1}{c}\,tTUu$ évanoüiſſe, ſans que chaque partie ſéparément ſe réduiſe à rien. Ainſi quoique la continuation de nos deux courbes ſoit indéterminée en elle même, l' uſage que nous en ferons eſt néanſmoins déterminé, & partant rien n' empêche que nous ne continuïons chacune à part, ſans avoir égard à l' autre,

& de là nous tirerons la méthode la plus ſimple pour la pratique. Donc puiſque nous avons à remplir ces deux conditions,

$$1° \; TN + tn = 0 \quad \& \quad 2° \; tTUu = 0$$

la première détermine la continuation de la courbe *ASB* au delà du terme *A*, & nous fait voir, que l' appliquée *tn* doit être égale à *TN*, mais poſée dans une ſituation contraire par rapport à l' axe *AB* continué. Or la même continuation doit auſſi avoir lieu dans l'autre courbe *AUB* afin que l' aire *tTUu* ſoit réduite à rien.

XXXVIII. Soit donc *AB* (*fig.* 5.) la corde dans ſon état naturel, que nous ſuppoſons de la même épaiſſeur par tout, & nommant comme ci-deſſus ſa longueur $AB = a$, ſon poids $= P$, & ſa tenſion $= T$, poſons pour abreger $c = \sqrt{\frac{2Tga}{P}}$, où g marque la hauteur d'où un corps tombe dans une ſeconde. Cela poſé ſoit *ASB* la figure, à laquelle la corde a été réduite au commencement, & *AVB* l'échelle des viteſſes qui lui ont été imprimées au moment du rélachement, & pour déterminer le mouvement que la corde aura dans la ſuite, il faut continuer les deux courbes au delà de *A* enſorte, que prenant les intervalles *AX* & *Ax* égaux entr'eux, il ſoit $xs = XS$ & $xu = XV$. D'où l'on voit que les courbes continuées AsB' & AuB' ſeront égales & ſemblables aux données *ASB* & *AVB*. Par la même raiſon au delà du terme *B* il faut décrire les courbes $Bs'A'$ & $Bu'A'$ égales & ſemblables aux courbes *BSA* & *BVA*, mais dans une ſituation contraire à l' égard de l' axe continué *AB*.

XXXIX. Par cette opération on pouſſera la continuation de nos courbes par les eſpaces AB' & BA' égaux à la longueur de la corde *AB*. Aiant maintenant à droite du point *A* les courbes $ASBs'A'$ & $AVBu'A'$, il faut qu'on ait à gauche des courbes ſemblables & égales $AsB'S''A''$

& $A\,u\,B'\,V''\,A''$ décrites de l' autre côté de l' axe : & il en est encor de même au delà du terme B. D'où il est évident comment la continuation doit se faire de part & d' autre à l' infini; on n' a qu'à prendre sur la continuation de l' axe les intervalles $A\,B'$, $B'\,A''$, $A''\,B'''$ &c. & $B\,A'$, $A'\,B''$, $B''\,A'''$ &c. égaux à la longueur de la corde $A\,B$, & décrire sur chacun de ces intervalles les deux courbes données $A\,S\,B$ & $A\,V\,B$ alternativement au dessus & au dessous de l' axe, comme l'ordre des lettres A & B le marque plus clairement qu'on ne le sauroit expliquer par une longue description. Voilà donc nos deux courbes continuées à l' infini, & cela conformément à la Théorie du mouvement.

Détermination de l' état de la corde pour chaque tems proposé.

XL. Pour déterminer l'état de la corde à un tems quelconque de t *secondes* (*fig.* 5.) depuis le commencement, tout revient à déterminer le lieu où se trouvera alors chaque point de la corde, c'est-à-dire sa distance de l'axe ou de l'état naturel de la corde $A\,B$. Considérons donc un point quelconque de la corde X, qui au commencement a été en S, & soit y la distance à laquelle il se trouvera à présent au dessus de l' axe selon la figure. Pour cet effet qu'on prenne sur l' axe de part & d' autre du point X les intervalles $XT = X\,t = c\,t$, & puisque l' appliquée dans ces deux points ont une situation contraire à celle que nous avons supposées ci-dessus, nous aurons en vertu du §. XXXI.

$$y = -\frac{1}{2}\,(T\,N + t\,n) - \frac{1}{2\,c}\cdot \text{aire } t\,T\,U\,u$$

en tant que cette aire tombe au dessous de l' axe.

XLI. Or pour avoir cette aire de l' échelle des vitesses $A\,V\,B$ continuée, qui est comprise entre les appliquées

tu & TU, on voit qu'elle eſt compoſée de l'aire AVB au deſſous de l'axe, & des deux aires Atu & BTU au deſſus de l' axe: d' où nous aurons

$$y = -\frac{1}{2}(TN + tn) - \frac{1}{2}(AVB - Atu - BTU)$$

pour l' éloignement du point X au deſſus de l' axe, d' où l'on comprend que ſi la valeur de cette expreſſion eſt négative, le point X ſe trouve alors au deſſous ou de l'autre côté de l' axe. Comme ces deux courbes ſe trouvent alternativement au deſſus & au deſſous de l' axe, il eſt clair qu'avec le tems le point X paſſera tantôt au deſſus & tantôt au deſſous de l' axe, d' où réſultera un mouvement d' oſcillation ſemblable à celui d' un pendule que je m' en vais examiner plus ſoigneuſement, puiſque c'eſt à cet article auquel preſque tous ceux qui ont traité cette matière, ſe ſont attaché principalement.

Conſidérations ſur le mouvement de vibration des cordes également épaiſſes.

XLII. Cherchons d' abord l' état de la corde après le tems t, qui donne $XT = Xt = AB = a$, de ſorte que ce tems ſoit $t = \frac{a}{c} = a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ exprimé en *ſecondes*. Donc puiſque $XT = AB$ & $Xt = AB$, nous aurons $BT = AX$ & $At = BX$. Prenons ſur la corde AB le point ξ enſorte que $B\xi = AX$, pour avoir $BT = B\xi$ & $At = A\xi$, & par la loi de continuation nous aurons les appliquées $TN = \xi\sigma$, $TU = \xi\upsilon$, & $tn = \xi\sigma$, $tu = \xi\upsilon$, & de là les aires $BTU = B\xi\upsilon$ & $Atu = A\xi\upsilon$; de ſorte que $AVB - Atu - BTU = \sigma$. Par conſéquent le point X de la corde ſe trouvera alors à la diſtance de l' axe $y = -\frac{1}{2}(TN + tn) = -\xi\sigma$

ou bien au dessous de l'axe en y de sorte que $Xy = \xi \tau$, d'où l'on voit qu'après le tems $t = a\sqrt{\frac{P}{2Tga}} = \sqrt{\frac{Pa}{2Tg}}$, toute la corde aura la figure $Ay\zeta B$ semblable à la figure initiale, mais doublement renversée, savoir de haut en bas, & de droite à gauche. Il y aura donc aussi $\xi\zeta = XS$.

XLIII. De là on comprend déja qu'après le tems double $t = 2a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ la corde doit reprendre la première figure ASB, qui lui a été imprimé au commencement. Car supposant $t = \frac{2a}{c}$ les points T, t parviendront en X' & X'', de sorte que $XX' = XX'' = 2AB$, & les appliquées en X' & X'' les mêmes qu'en X, aussi l'aire de l'échelle des vitesses comprise entre les appliquées $X'V'$ & $X''V''$ devient $= 0$. Alors donc l'éloignement du point X à l'axe AB en haut sera $y = \frac{1}{2}(X'S' + X''S'') = XS$, ou bien la corde se trouvera parfaitement rétablie dans sa première situation ASB, & aura aussi par conséquent le même mouvement, qui lui a été imprimé au commencement. Il n'est pas besoin d'avertir ici, que je fais abstraction de tous les empêchemens & autres causes, qui affoiblissent peu à peu le mouvement de la corde, & l'éteignent enfin tout-à-fait. Cette circonstance ne touche pas plus la solution générale que je donne ici, que toutes les solutions particulières qui ont été publiées par d'autres.

XLIV. Puisque nous venons de voir qu'après le tems $t = 2a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ la corde parvient dans son premier état, & qu'au milieu de ce tems elle s'est trouvée dans une situation renversée, en comparant ce mouvement avec celui d'un pendule, on a raison de dire, que pendant le tems

$t = 2a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ la corde a achevé deux oscillations ou deux vibrations, de sorte que le tems de chaque vibration est censé d'être $= a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ *secondes*, & partant le nombre des vibrations, que la corde achevera pendant une *seconde* sera $= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2Tga}{P}} = \sqrt{\frac{2Tg}{Pa}}$. C'est ce nombre qu'on regarde comme la mesure du son que la corde rend par son mouvement de vibration. Pour mieux comprendre cette mesure absoluë, supposons la tension T équivalente au poids qu'auroit une corde de la même grosseur dont la longueur seroit $= k$, de sorte qu'on ait $T : P = k : a$, & alors nous aurons pour la mesure du son ce nombre $\frac{\sqrt{2gk}}{a}$, d'où l'on voit que le son est réciproquement proportionel à la longueur de la corde, la tension k demeurant la même.

XLV. Quoiqu'il soit certain que la corde revient toujours après le tems $t = 2a\sqrt{\frac{P}{2Tga}} = \frac{2a}{\sqrt{2gk}}$ dans le même état; il ne s'ensuit pas nécessairement que la corde n'acheve dans ce tems que deux vibrations, & il seroit bien possible qu'elle en fit cependant ou quatre, ou 6, ou 8, ou plusieurs selon un nombre pair quelconque, & alors le nombre des vibrations rendues dans une *seconde* deviendroit deux, ou 3, ou 4, ou plusieurs fois plus grand que je l'ai supposé. Cela dépend d'une certaine disposition de l'état initial, comme je l'ai remarqué autres fois, & d'où M. Bernoulli sur tout a dérivé l'explication de tous les sons qu'une corde peut rendre tant séparément qu'à la fois. Je remarque ici seulement que toutes les belles propriétés que ce profond Géomêtre a déduites de la nature des lignes courbes comprises dans les équations des *sinus* raportées ci-dessus §. XIX. convien-

nent

nent également à toutes les autres courbes qui ont à peu ptès la méme figure, quand même leur nature ne pourroit pas être exprimée par aucune équation analitique; ou bien les mêmes phénomènes résulteroient, si les plusieurs ventres, que M. Bernoulli considère dans les cordes, étoient des arcs circulaires, ou des portions de toute autre courbe, égales entr'elles.

XLVI. Ainsi si les deux courbes *ASB* & *AVB* qui déterminent l'état initial de la corde, étoient semblables à nos deux courbes représentées dans notre figure sur l'espace ou double *AA'* ou triple *AB''* &c. de la longueur de la corde *AB*, de sorte que ces courbes fussent réduites dans l'espace *AB*, alors la corde rendroit ou deux ou trois fois plus de vibrations, que je viens de marquer, tout comme si ces courbes étoient des lignes de *sinus*. Je remarque encore, que si les deux courbes *ASB* & *AVB* avoient deux moitiès semblables entr'elles, ou que la ligne droite tirée perpendiculairement par le milieu de la corde *AB*, fût un diamêtre de ces deux courbes, alors toute la corde parviendroit au même instant dans l'état naturel *AB*, de sorte que ce n'est pas non plus une propriété, qui ne convienne qu'aux seules lignes des *sinus*.

Du mouvement d'une corde qui n'est ébranlée que dans une partie.

XLVII. De là il est clair, que tant s'en faut que ma solution soit contraire à celles que M.rs Bernoulli & D'Alembert ont données de cette question, qu'elle les comprend plutôt parfaitement avec cette seule circonstance, qu'elle me paroit beaucoup plus générale. Si l'on me vouloit objecter, que l'équation générale pour les lignes des *sinus* donnée ci-dessus §. XIX. renferme en soi toutes les cour-

bes poſſibles, je crois que le cas que je m'en vais développer détruira ce ſentiment. Qu'on n'ébranle d'abord que la partie AD de la corde AB, en la réduiſant à la figure AnD, & qu'on la relâche ſubitement ſans lui imprimer du mouvement, de ſorte que l'échelle des viteſſes ſe confonde par tout avec l'axe pendant que l'autre ligne eſt compoſée de la courbe AnD, & de la droite DB, dont la continuation formera au delà de A la courbe Ad, & de part & d'autre du point A' les courbes $A'D'$, & $A'd'$ égales à AnD, & ainſi de ſuite.

XLVIII. Dans ce cas il ne s'agit point proprement d'un mouvement de vibration, mais on demande comment cette agitation initiale, eſt ſucceſſivement répandue par toute la corde. Soit comme auparavant la longueur $AB = a$, le poids $= P$, la tenſion $= T$, & pour abreger $c = \sqrt{\frac{2Tga}{P}}$: conſidérons un point quelconque de la corde X, qui depuis l'ébranlement reſtera en repos pendant le tems $= \frac{XD}{c}$ & alors il commencera à être agité pendant un tems $= \frac{2\,AD}{c}$ après quoi il ſera encore en repos juſqu'à ce que le tems t multiplié par c atteigne la courbe $d'A'D'$, & ainſi de ſuite; de ſorte que chaque partie de la corde ſera miſe alternativement en mouvement & en repos. Dès le commencement on verra avancer l'agitation AnD juſqu'à B, d'où elle retournera juſqu'en A, & ainſi de ſuite, en faiſant chaque tour en même tems, que la corde acheveroit une oſcillation. Maintenant on m'accordera aiſément que ce mouvement ne ſauroit en aucune manière être repréſenté par les lignes des *ſinus*.

RECHERCHES
Sur le mouvement des cordes inégalement grosses.
PAR M. EULER.

I. AIANT examiné dans le Mémoire précédent le mouvement des cordes également grosses, j'y ai donné l'équation générale pour le mouvement des cordes, dont la grosseur est variable selon une loi quelconque, où il faut toujours sous-entendre que les agitations de la corde sont quasi infiniment petites. Soit donc IK (*fig.* 1.) une telle corde quelconque tendue par la force $= T$, & prenant d'un point fixe I une portion indéfinie $IX = x$, posons l'épaisseur en $X = qq$, ensorte que $qq\,dx$ exprime la masse & le poids de l'élément $Xx = dx$, & partant $\int qq\,dx$ la masse & le poids de la portion $IX = x$, que j'avois nommé $= p$. Cela posé si à un tems quelconque de t *secondes* depuis une époque fixe le point de la corde X se trouve en Y, nommant l'intervalle $XY = y$, le mouvement de la corde sera exprimé par cette équation

$$\frac{2Tg}{qq}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right),$$

où g marque la hauteur, d'où la gravité fait tomber les corps dans une *seconde*.

II. Puisque la tension T est mesurée par un poids, en le prenant de la même matière dont est faite la corde, nous pouvons substituer sa masse, ou son volume à sa place, de sorte que T sera une grandeur de trois dimensions, & partant $\frac{2Tg}{qq}$ une de deux, que je nommerai $\frac{2Tg}{qq} = rr$, d'où l'on voit que r sera une certaine fonction de x don-

née par la groſſeur & la tenſion de la corde. Tout revient donc à réſoudre cette équation $rr\,(\frac{ddy}{dx^2}) = (\frac{ddy}{dt^2})$, ou à trouver quelle fonction ſera l' appliquée y des deux variables x & t. Il faut donc chercher l' intégrale, & même l' intégrale compléte de cette équation, qui exigeant une double intégration, l' intégrale ne ſauroit être compléte à moins qu'elle ne renferme deux fonctions arbitraires.

III. Or ſur ce ſujet je dois d'abord cette facheuſe remarque, que tous mes efforts ont été juſqu'ici inutiles pour trouver en général l' intégrale compléte de notre équation, quelque fonction que ſoit la quantité rr de x, cependant j' ai trouvé une infinité de cas, où l' intégration réuſſit, & partant où l' on peut déterminer le mouvement de la corde. Il faut donc abſolument borner nos recherches à de certaines eſpèces de cordes, dont la groſſeur $qq = \frac{2Tg}{rr}$ eſt exprimée par de certaines fonctions de x. Car il arrive à notre équation $rr\,(\frac{ddy}{dx^2}) = (\frac{ddy}{dt^2})$ à peu près la même choſe qu'à l'équation $dy + yy\,dx = X\,dx$ propoſée autrefois par le Comte Riccati, qu'elle n' eſt intégrable qu'en de certains cas, & ces cas ſuivent dans l'une & l' autre preſque la méme loi. Il eſt donc bien important de chercher ces cas ou les loix de la groſſeur variable, où l'on eſt en état de déterminer le mouvement de la corde.

IV. Comme dans le cas des cordes également groſſes, où rr étoit une quantité conſtante $= cc$ l' intégrale compléte a été trouvée $y = \Gamma: (x + ct) + \Delta: (x - ct)$; On comprend qu'en général toutes les fois que l'intégration réuſſit, la forme de l' intégrale doit être ſemblable, & après quelques eſſais j'ai trouvé que dans ces cas l'intégrale peut être repréſentée ſous cette forme: $y =$

$P\Gamma : (\int u dx + t) + Q\Gamma' : (\int u dx + t) + R\Gamma'' (\int u dx + t) +$ &c. où P, Q, R &c. de même que u ſont de certaines fonctions de la ſeule variable x. Enſuite puiſque la quantité t ſe peut prendre auſſi bien négativement que poſitivement, pour compléter l'intégrale on y doit enſuite ajouter encore ces termes :
$P\Delta : (\int u dx - t) + Q\Delta' : (\int u dx - t) + R\Delta'' (\int u dx - t) +$ &c. qui n'exigent donc point une recherche particuliére. De là il eſt clair que pour trouver des cas intégrables, on n'a qu'à pouſſer ſucceſſivement plus loin les termes de cette expreſſion générale, ce qui me fournit le ſujet des problemes ſuivans.

PROBLEME 1.

V. Trouver les conditions de la fonction rr, pour que l'intégrale de notre équation $rr\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ ait cette forme $y = P\Gamma : (\int u dx + t)$.

SOLUTION.

Puiſque P & u ſont des fonctions de la ſeule variable x, prenons de cette forme les différentiels du premier dégré $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dP}{dx}\Gamma : (\int u dx + t) + Pu\Gamma' : (\int u dx + t)$ & $\left(\frac{dy}{dt}\right) = P\Gamma' : (\int u dx + t)$, & de là paſſons aux différentiels du ſecond dégré : $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{ddP}{dx^2}\Gamma : (\int u dx + t)$ $+ \frac{2udP + Pdu}{dx}\Gamma' : (\int u dx + t) + Puu\Gamma'' : (\int u dx + t)$ & $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = P\Gamma'' : (\int u dx + t)$. Maintenant faiſons

$(\frac{ddy}{dx^2}) = \frac{1}{rr}(\frac{ddy}{dt^2})$, enforte que chaque efpace de fonctions foit féparément réduite à zero, & nous aurons ces trois égalités

$$\frac{ddP}{dx^2} = o, \quad \frac{2udP + Pdu}{dx} = o, \quad \& \quad Puu = \frac{P}{rr},$$

dont la premiére donne $P = \alpha x + \beta$, la feconde $PPu = A$ ou $u = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^2}$, & la troifiéme $uu = \frac{1}{rr}$ ou $rr = \frac{(\alpha x + \beta)^4}{AA}$. Ainfi notre équation eft intégrable dans le cas $rr = \frac{(\alpha x + \beta)^4}{AA}$ où la groffeur de la corde devient $qq = \frac{2Tg \cdot AA}{(\alpha x + \beta)^4}$, & alors on aura $P = \alpha x + \beta$ & $u = \frac{1}{r} = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^2}$.

COROLL. 1.

VI. Pofant $\alpha = o$ & $\beta = 1$ nous aurons le cas des cordes également groffes ou $qq = 2Tg \cdot AA$, donc pofant la groffeur $= ff$, à caufe de $AA = \frac{ff}{2Tg}$, il en réfulte $rr = \frac{2Tg}{ff}$, $P = 1$, & $u = \frac{f}{\sqrt{2Tg}}$; de forte que l'intégrale compléte de cette équation $\frac{2Tg}{ff}(\frac{ddy}{dx^2}) = (\frac{ddy}{dt^2})$ fera $y = \Gamma : (\frac{fx}{\sqrt{2Tg}} + t) + \Delta : (\frac{fx}{\sqrt{2Tg}} - t)$.

COROLL. 2.

VII. Si α n'eft pas zero il eft permis de pofer $\beta = o$ & $\alpha = 1$, puifqu'on peut prendre le point I où l'on

veut indépendamment des points A & B, où l'on veut enſuite fixer la corde. Soit donc la groſſeur de la corde en $X = \frac{c^6}{x^4} = qq$, & nous aurons $2Tg \cdot AA = c^6$, donc $A = \frac{c^3}{\sqrt{2Tg}}$, $P = x$, & $u = \frac{c^3}{xx\sqrt{2Tg}}$, par conſéquent $\int u\,dx = \frac{-c^3}{x\sqrt{2Tg}}$.

C O R O L L. 3.

VIII. Donc ſi l'épaiſſeur de la corde en X eſt $qq = \frac{c^6}{x^4}$, la tenſion étant $= T$, le mouvement de la corde ſera contenu dans cette équation:

$$y = x\Gamma:\left(\frac{c^3}{x\sqrt{2Tg}} - t\right) + x\Delta:\left(\frac{c^3}{x\sqrt{2Tg}} + t\right),$$

& on peut maintenant fixer la corde en tels deux points A & B que l'on veut.

S C H O L I E.

IX. Voilà donc déja une certaine eſpèce de cordes, dont on peut déterminer le mouvement; une telle corde eſt formée par la révolution d'une hyperbole Fab (*fig.* 2.) autour de ſon aſymtote IB, la nature de cette hyperbole étant exprimée par cette équation $XQ = \frac{h^3}{gX^2} = \frac{h^3}{xx}$ car alors la ſection de la corde au point X devient $= \frac{\pi h^6}{x^4}$ qui étant égale à $qq = \frac{c^6}{x^4}$, on aura $c^6 = \pi h^6$ & $c^3 = h^3\sqrt{\pi}$. Donc ſi nous exprimons la tenſion T par le poids d'un cylindre fait de la même matière, dont le demi diamêtre de la baſe eſt $= h$ & la hauteur $= k$,

on aura $T = \pi hhk$, & partant $\frac{c^3}{x\sqrt{2Tg}} = \frac{hh}{x\sqrt{2gk}}$. Puiſque l'épaiſſeur de cette corde au point I devient infiniment grande, on comprend aiſément, que la partie de la corde qu'on veut ébranler, AB, doit être aſsès éloignée du point I, afin que la corde ne ſoit pas trop groſſe.

PROBLEME 2.

X. Trouver les conditions de la fonction rr, ou bien de la groſſeur qq, pour que l'intégrale de notre équation $(\frac{ddy}{dx^2}) = \frac{qq}{2Tg}(\frac{ddy}{dt^2})$ ait cette forme:

$$y = P\Gamma: (\int u\,dx + t) + Q\Gamma': (\int u\,dx + t).$$

SOLUTION.

Puiſque P, Q & u ſont des fonctions de la ſeule variable x, en prenant les différentiels du ſecond dégré comme dans le Problème précédent, & en omettant pour abréger la quantité $\int u\,dx + t$ après les ſignes de fonctions Γ, Γ', Γ'', &c. nous aurons:

$$(\frac{ddy}{dx^2}) = \frac{ddP}{dx^2}\Gamma: + \frac{2u\,dP + P\,du}{dx}\Gamma': + Puu\Gamma'':$$

$$+ \frac{ddQ}{dx^2}\Gamma': + \frac{2udQ + Qdu}{dx}\Gamma'': + Quu\Gamma''':$$

qu'il faut égaler à

$$\frac{qq}{2Tg}(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{qqP}{2Tg}\Gamma'': + \frac{qqQ}{2Tg}\Gamma''':$$

d'où nous tirons d'abord $\frac{qq}{2Tg} = uu$, & enſuite

$$\frac{2udQ + Qdu}{dx} = 0;\ \frac{2u\,dP + P\,du}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0,\ \&\ \frac{ddP}{dx^2} = 0$$

dont l'intégration fournit:

QQu.

$QQu = A$; $PPu + \int \frac{PddQ}{dt} = B$ & $P = \alpha x + \beta$.
Or $\int \frac{PddQ}{dx} = \frac{PdQ}{dx} - \int \frac{dP}{dx} dQ$, & puisque $\frac{dP}{dx} = \alpha$, nous aurons $\int \frac{PddQ}{dx} = \frac{(\alpha x + \beta) dQ}{dx} - \alpha Q$, de sorte que notre seconde équation sera : $(\alpha x + \beta)^2 u + \frac{(\alpha x + \beta) dQ}{dx} - \alpha Q = B$, ou bien à cause de $u = \frac{A}{QQ}$ par la première :

$$\frac{A(\alpha x + \beta)^2 dx}{QQ} + (\alpha x + \beta) dQ - \alpha Q dx = B dx.$$

Posons maintenant $Q = (\alpha x + \beta) z$, pour avoir

$$\frac{Adx}{zz} + (\alpha x + \beta)^2 dz = B dx,$$

d' où nous tirons

$$\frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2} = \frac{zzdz}{Bzz - A}, \text{ \& } C - \frac{1}{\alpha(\alpha x + \beta)} = \int \frac{zzdz}{Bzz - A}$$

& de là nous aurons z déterminé par x; ensuite aiant $Q = (\alpha x + \beta) z$, $u = \frac{A}{QQ}$, $P = \alpha x + \beta$, & $qq = 2Tguu$, on verra sous quelle loi de la grosseur notre équation admet l' intégration.

Coroll. 1.

XI. Afin que z puisse aisément se déterminer par x, limitons les cas ensorte que $B = 0$, & $\int \frac{zzdz}{Bzz - A} = \frac{-z^3}{3A}$. Or alors il convient de distinguer deux cas selon que $\alpha = 0$ ou non. Soit premièrement $\alpha = 0$ & $\beta = 1$, pour avoir $x = e - \frac{z^3}{3A}$, donc $z = \sqrt[3]{3A(e - x)}$

$= Q$, $u = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{9(c-x)^2}}$, $P = 1$, & $qq = \frac{2Tg\sqrt[3]{AA}}{\sqrt[3]{81(c-x)^4}}$.

COROLL. 2.

XII. Posons pour ce cas $e = 0$, & soit la grosseur $qq = cc\sqrt[3]{\frac{c^4}{x^4}}$; nous aurons donc $\sqrt[3]{AA} = \frac{cc\sqrt[3]{81c^4}}{2Tg}$, & $\sqrt[3]{A} = \frac{c\sqrt[3]{9cc}}{\sqrt{2Tg}}$; donc $u = \frac{c}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{cc}{xx}}$, & $\int u\,dx = \frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}$, & $Q = -\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}$, de sorte que pour ce cas l' équation intégrale sera

$$y = \Gamma:\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} + t\right) - \frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}\Gamma':\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} + t\right)$$
$$+ \Delta:\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} - t\right) - \frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}\Delta':\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} - t\right).$$

COROLL. 3.

XIII. Pour l'autre cas posons $\beta = 0$ & $\alpha = 1$ pour avoir $\frac{1}{x} + \frac{1}{c} = \frac{z^3}{3A} = \frac{c+x}{cx}$, donc $z = \sqrt[3]{\frac{3A(c+x)}{cx}}$, & ensuite $Q = \sqrt[3]{\frac{3A}{c}\,xx\,(c+x)}$, $u = \frac{\sqrt[3]{Acc}}{\sqrt[3]{9x^4(c+x)^2}}$; $P = x$, & $qq = \frac{2Tg\sqrt[3]{AAc^4}}{\sqrt[3]{81x^8(c+x)^4}}$. Soit donc la grosseur $qq = ff\sqrt[3]{\frac{f^8c^4}{x^8(c+x)^4}}$ pour avoir $\sqrt[3]{A} = \frac{f\sqrt[3]{9f^4}}{\sqrt{2Tg}}$, donc $Q = \frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{fxx(c+x)}{c}}$, & $u = \frac{ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{ccf}{x^4(c+x)^2}}$.

COROLL. 4.

XIV. Dans ce même cas posons $c = \infty$, de sorte que la grosseur de la corde soit $qq = ff \sqrt[3]{\frac{f^8}{x^8}}$, & puisque $P = x$, $Q = \frac{3ff\sqrt[3]{fxx}}{\sqrt{2Tg}}$, & $u = \frac{ff}{\sqrt{2Tg}} \sqrt[3]{\frac{f}{x^4}}$, donc $\int u\,dx = \frac{-3ff}{\sqrt{2Tg}} \sqrt[3]{\frac{f}{x}}$, & l' équation intégrale sera

$$y = x\Gamma:\left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} - t\right) + \frac{3ff\sqrt[3]{fxx}}{\sqrt{2Tg}}\Gamma':\left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} - t\right)$$
$$+ x\Delta:\left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} + t\right) + \frac{3ff\sqrt[3]{fxx}}{\sqrt{2Tg}}\Delta':\left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} + t\right).$$

SCHOLIE.

XV. Prenant pour la grosseur de la corde cette forme $qq = \frac{f^{2+n}}{x^n}$ nous avons déja decouvert quatre cas, qui admettent la résolution, qui sont $n = 0$, $n = 4$, $n = \frac{4}{3}$, $n = \frac{8}{3}$, & c' est aussi dans ces mêmes cas que l' équation Riccatienne $dy + yy\,dx = \frac{A\,dx}{x^n}$ est intégrable : d' où l' on peut conclure, que les cas suivans $n = \frac{8}{5}$, $n = \frac{12}{5}$, $n = \frac{12}{7}$, $n = \frac{16}{7}$ &c. auront aussi la même propriété, que le mouvement de la corde pourra alors être déterminé. Mais le cas du Coroll. 3. n'est pas moins remarquable, où la grosseur de la corde est $qq = ff\sqrt[3]{\frac{f^8 c^4}{x^8(c+x)^4}}$; pour la résolution duquel j'observe que $\int u\,dx = \frac{-3ff\sqrt[3]{f}}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{c+x}{cx}} = \frac{-3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f(c+x)}{cx}}$ d' où

l' on formera aiſément l'équation intégrale compléte. Mais notre réſolution s'étend beaucoup plus loin; d'abord aiant trouvé le raport entre x & z par cette équation $\frac{dx}{(\alpha x+\beta)^2} = \frac{zzdz}{Bzz-A}$, on aura $P = \alpha x + \beta$, $Q = (\alpha x + \beta)z$ & $u = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^2 zz}$, d' où nous tirons

$$\int u\, dx = \int \frac{A\, dx}{(\alpha x + \beta)^2 zz} = \int \frac{A\, dz}{Bzz - A},$$

de ſorte que toutes nos quantités peuvent être déterminées aſsés ſimplement par la nouvelle variable z, aiant $\frac{1}{\alpha x + \beta} = -\alpha \int \frac{zzdz}{Bzz - A}$. Ainſi ce Probleme nous fournit une infinité d' eſpèces de cordes dont le mouvement peut être déterminé.

Probleme 3.

XVI. Trouver les conditions de la groſſeur de la corde qq, pour que l' intégrale de notre équation $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{qq}{2Tg}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ ait cette forme:

$$y = P\Gamma : (\int udx + t) + Q\Gamma' : (\int udx + t) + R\Gamma'' : (\int udx + t).$$

Solution.

Faiſant le calcul comme dans le Probleme précédent, on trouve d' abord $qq = 2Tguu$, & enſuite il faut ſatisfaire à ces èquations;

$$\frac{ddP}{dx^2} = 0, \quad 2udP + Pdu + \frac{ddQ}{dx} = 0,$$

$$2udQ + Qdu + \frac{ddR}{dx} = 0, \& \; 2udR + Rdu = 0,$$

dont la première & dernière donnent

$$P = \alpha x + \beta, \& \; RRu = A, \text{ ou } u = \frac{A}{RR},$$

la seconde donne

$$PPu + \frac{PdQ}{dx} - \alpha Q = B, \text{ ou bien } \frac{APP}{RR} + \frac{PdQ}{dx} - \alpha Q = B,$$

& la troisiéme

$$QQu + \frac{QdR}{dx} - \int \frac{dQ}{dx} dR = C.$$

Je m' arrêterai ici uniquement aux cas, où l' épaisseur qq, & partant aussi u devient égale à une certaine puissance de x, & où les lettres Q & R peuvent aussi être exprimées par des puissances de x. Ici il faut considérer deux cas, l' un ou $P = 1$, & l' autre ou $P = x$.

1° Soit donc $P = 1$ & $u = \alpha x^n$, posons $Q = \beta x^{n+1}$, & $R = \gamma x^{2n+2}$, pour obtenir le même nombre de dimensions dans nos égalités, & puisque la premiére est remplie d' elle même, les autres donneront

$$2udP + Pdu + \frac{ddQ}{dx} = 0,$$

$$n\alpha + (n+1)n\beta = 0,$$

$$2udQ + Qdu + \frac{ddR}{dx} = 0,$$

$$2(n+1)\alpha\beta + n\alpha\beta + (2n+2)(2n+1)\gamma = 0,$$

$$2udR + Rdu = 0,$$

$$4(n+1)\alpha\gamma + n\alpha\gamma = 0;$$

donc $5n + 4 = 0$, & $n = -\frac{4}{5}$: or de la premiè-

re nous tirons $\beta = -\frac{\alpha}{n+1} = -5\alpha$, & de la seconde $(3n+2)\alpha\beta + 2(n+1)(2n+1)\gamma = 0$ il résulte $\gamma = \frac{25}{3}\alpha\alpha$. Donc si $u = \alpha x^{-\frac{4}{5}}$ ou bien la grosseur de la corde $qq = 2Tg\alpha\alpha x^{-\frac{8}{5}}$ à cause de $\int u\,dx = 5\alpha x^{\frac{1}{5}}$, le mouvement de la corde sera exprimé par cette équation

$$y = \Gamma : (5\alpha x^{\frac{1}{5}} + t) - 5\alpha x^{\frac{1}{5}}\Gamma' : (5\alpha x^{\frac{1}{5}} + t)$$

$$+ \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{2}{5}}\Gamma'' : (5\alpha x^{\frac{1}{5}} + t) + \Delta : (5\alpha x^{\frac{1}{5}} - t)$$

$$- 5\alpha x^{\frac{1}{5}}\Delta' : (5\alpha x^{\frac{1}{5}} - t) + \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{2}{5}}\Delta'' : (5\alpha x^{\frac{1}{5}} - t),$$

où posant $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{8}{5}}$ il faut prendre $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} f^{\frac{4}{5}}$.

2° Soit $P = x$ & $u = \alpha x^n$, posons $Q = \beta x^{n+2}$, & $R = \gamma x^{2n+3}$, & nos égalités donneront

$$2u\,dP + P\,du + \frac{ddQ}{dx} = 0,$$

$$2\alpha + n\alpha + (n+2)(n+1)\beta = 0$$

$$2u\,dQ + Q\,du + \frac{ddR}{dx} = 0,$$

$$2(n+2)\alpha\beta + n\alpha\beta + (2n+3)(2n+2)\gamma = 0,$$

$$2u\,dR + R\,du = 0,$$

$$2(2n+3)\alpha\gamma + n\alpha\gamma = 0;$$

d'où nous tirons

$$\beta = -\frac{(n+2)\alpha}{(n+1)(n+2)} = -\frac{\alpha}{n+1},\ \gamma = -\frac{(3n+4)\alpha\beta}{(2n+3)(2n+2)},$$

& $5n + \beta = 0$; donc puisque $n = -\frac{6}{5}$, nous aurons $\beta = 5\alpha$, & $\gamma = \frac{25}{3}\alpha\alpha$, & ensuite $u = \alpha x^{-\frac{6}{5}}$,

$\int u\,dx = -5\alpha x^{-\frac{1}{5}}$, & $qq = 2Tg\alpha\alpha x^{-\frac{12}{5}}$, de forte que pofant $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{12}{5}}$ nous aions $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} f^{\frac{6}{5}}$, & pour le mouvement

$$y = x\Gamma:(5\alpha x^{-\frac{1}{5}} - t) + 5\alpha x^{\frac{4}{5}}\Gamma':(5\alpha x^{-\frac{1}{5}} - t)$$
$$+ \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{3}{5}}\Gamma'':(5\alpha x^{-\frac{1}{5}} - t) + x\Delta:(5\alpha x^{-\frac{1}{5}} + t)$$
$$+ 5\alpha x^{\frac{4}{5}}\Delta':(5\alpha x^{-\frac{1}{5}} + t) + \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{3}{5}}\Delta'':(5\alpha x^{-\frac{1}{5}} + t).$$

PROBLEME 4.

XVII. La groffeur de la corde qui répond à l'intervalle $IX = x$ étant exprimée ainfi $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{2-2n}$, trouver l'équation générale, qui en détermine le mouvement.

SOLUTION.

Prenons $u = \alpha x^{n-1}$, & il faut qu'il foit $\alpha = \frac{f^{2-n}}{\sqrt{2Tg}}$; d'où nous tirons $\int u\,dx = \frac{\alpha}{n}x^n$. Pofons maintenant pour notre équation intégrale cherchée

$$y = P\Gamma:\left(\frac{\alpha}{n}x^n + t\right) + Q\Gamma':\left(\frac{\alpha}{n}x^n + t\right)$$
$$+ R\Gamma'':\left(\frac{\alpha}{n}x^n + t\right) + S\Gamma''':\left(\frac{\alpha}{n}x^n + t\right) + \&c.$$
$$+ P\Delta:\left(\frac{\alpha}{n}x^n - t\right) + Q\Delta'\left(\frac{\alpha}{n}x^n - t\right)$$
$$+ R\Delta'':\left(\frac{\alpha}{n}x^n - t\right) + S\Delta'';\left(\frac{\alpha}{n}x^n - t\right) + \&c.$$

& ſoit $P = x^m$, $Q = Bx^{m+n}$, $R = Cx^{m+2n}$, $S = Dx^{m+3n}$ &c. où il faut remarquer que l' expoſant m doit être ou $= 0$, ou $= 1$, afin que $\frac{ddP}{dx^2} = 0$. Cela poſé nos égalités donneront comme il ſuit:

$$2\,u\,dP + P\,du + \frac{ddQ}{dx} = 0$$

$$2m\alpha + (n-1)\alpha + (m+n)(m+n-1)B = 0$$

$$2\,u\,dQ + Q\,du + \frac{ddR}{dx} = 0$$

$$2(m+n)\alpha B + (n-1)\alpha B + (m+2n)(m+2n-1)C = 0$$

$$2\,u\,dR + R\,du + \frac{ddS}{dx} = 0$$

$$2(m+2n)\alpha C + (n-1)\alpha C + (m+3n)(m+3n-1)D = 0$$

$$2\,u\,dS + S\,du + \frac{ddT}{dx} = 0$$

$$2(m+3n)\alpha D + (n-1)\alpha D + (m+4n)(m+4n-1)E = 0,$$

d' où nous tirons	donc ſi $m = 0$	& ſi $m = 1$
$B = -\frac{\alpha(2m+n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$;	$B = -\frac{\alpha(n-1)}{n(n-1)}$;	$B = -\frac{\alpha(n+1)}{n(n+1)}$;
$C = -\frac{\alpha B(2m+3n-1)}{(m+2n)(m+2n-1)}$;	$C = -\frac{\alpha B(3n-1)}{2n(2n-1)}$;	$C = -\frac{\alpha B(3n+1)}{2n(n+1)}$;
$D = -\frac{\alpha C(2m+5n-1)}{(m+3n)(m+3n-1)}$;	$D = -\frac{\alpha C(5n-1)}{3n(3n-1)}$;	$D = -\frac{\alpha C(5n+1)}{3n(3n+1)}$;
$E = -\frac{\alpha D(2m+7n-1)}{(m+4n)(m+4n-1)}$:	$E = -\frac{\alpha D(7n-1)}{4n(4n-1)}$;	$E = -\frac{\alpha D(7n+1)}{4n(4n+1)}$.

Conſidérons ſéparément les deux cas où $m = 0$ & $m = 1$.

1^er CAS OU $m = 0$, ET $P = 1$.

Dans ce cas nous voions que notre expreſſion devient finie toutes les fois que n eſt une telle fraction $\frac{1}{\lambda}$ où λ eſt un nombre impair, Poſons donc $n = \frac{1}{\gamma}$ pour avoir

$B =$

$$B = -\frac{\alpha\lambda(\lambda-1)}{1.(\lambda-1)} = -\lambda\alpha$$

$$C = -\frac{\lambda\alpha B(\lambda-3)}{2(\lambda-2)} = +\frac{\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{1\cdot 2(\lambda-1)(\lambda-2)}\alpha^2$$

$$D = -\frac{\lambda\alpha C(\lambda-5)}{3(\lambda-3)} = -\frac{\lambda^3(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)}{1\cdot 2\cdot 3(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}\alpha^3$$

$$E = -\frac{\lambda\alpha D(\lambda-7)}{4(\lambda-4)} = +\frac{\lambda^4(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)}\alpha^4$$

&c. &c.

Je n' ai pas ici effacé les facteurs qui ſe détruiſent dans les numérateurs & dénominateurs, puiſque toutes les fois qu'un numérateur évanoüit, non ſeulement le coéficient qui lui répond, mais auſſi tous les ſuivans peuvent être négligés. Voici donc les cas qui en réſultent.

1° Si $\lambda = 1$, $n = 1$; $qq = ff$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}}$, $\int udx = \alpha x$; $P = 1$, $Q = 0$, $R = 0$ &c.

2° Si $\lambda = 3$, $n = \frac{1}{3}$; $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4}{3}}$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{2}{3}}$, $\int udx = 3\alpha x^{\frac{1}{3}}$; $P = 1$, $Q = -\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \alpha x^{\frac{1}{3}}$, $R = 0$; $S = 0$ &c.

3° Si $\lambda = 5$, $n = \frac{1}{5}$; $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{8}{5}}$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} \cdot {}^{\frac{4}{5}}$, $\int udx = 5\alpha x^{\frac{1}{5}}$; $P = 1$, $Q = -\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{4}\alpha x^{\frac{1}{5}}$, $R = +\frac{5\cdot 5}{1\cdot 2} \cdot \frac{4\cdot 2}{4\cdot 3}\alpha^2 x^{\frac{2}{5}}$, $S = 0$ &c.

4° Si $\lambda = 7$, $n = \frac{1}{7}$; $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{12}{7}}$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{6}{7}}$; $\int udx = 7\alpha x^{\frac{1}{7}}$; $P = 1$, $Q = -\frac{7}{1} \cdot \frac{6}{6}\alpha x^{\frac{1}{7}}$, $R = +\frac{7\cdot 7}{1\cdot 2} \cdot \frac{6\cdot 4}{6\cdot 5}\alpha^2 x^{\frac{2}{7}}$, $S = -\frac{7\cdot 7\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{6\cdot 4\cdot 2}{6\cdot 5\cdot 4}\alpha^3 x^{\frac{3}{7}}$, $T = 0$ &c.

5° Si $\lambda = 9$, $n = \frac{1}{9}$; $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{16}{9}}$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{8}{9}}$; $\int u dx = 9\alpha x^{\frac{1}{9}}$; $P = 1$, $Q = -\frac{9}{1} \cdot \frac{8}{8} \alpha x^{\frac{1}{9}}$, $R = +\frac{9 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{8 \cdot 6}{8 \cdot 7} \alpha^2 x^{\frac{2}{9}}$, $S = -\frac{9 \cdot 9 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{8 \cdot 6 \cdot 4}{8 \cdot 7 \cdot 6} \alpha^3 x^{\frac{3}{9}}$, $T = +\frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} \alpha^4 x^{\frac{4}{9}}$, $V = 0$ &c.

Posons donc en général $\lambda = 2\mu + 1$, & soit $\lambda\alpha = \beta$; de sorte que la grosseur de la corde $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4\mu}{2\mu+1}}$; on prendra $\beta = \frac{(2\mu+1)f}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} = \frac{(2\mu+1)ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{-\frac{1}{2\mu+1}}$

& $\int u dx = \frac{\alpha}{n} x^n = \beta x^{\frac{1}{2\mu+1}}$. Or les coéficiens P, Q, R &c. seront déterminés ainsi;

$$P = 1$$

$$Q = -\frac{2\mu}{2\mu} \cdot \frac{\beta x^{\frac{1}{2\mu+1}}}{1}$$

$$R = +\frac{2\mu(2\mu-2)}{2\mu(2\mu-1)} \cdot \frac{\beta\beta x^{\frac{2}{2\mu+1}}}{1 \cdot 2}$$

$$S = -\frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)} \cdot \frac{\beta^3 x^{\frac{3}{2\mu+1}}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$T = +\frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)(2\mu-5)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)(2\mu-3)} \cdot \frac{\beta^4 x^{\frac{4}{2\mu+1}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \quad \text{\&c.}$$

2^d CAS OU $m = 1$ ET $P = x$.

Dans ce cas notre expression devient finie toutes les fois que n est une telle fraction $-\frac{1}{\lambda}$ prenant pour λ un nombre impair quelconque. Posons donc $n = -\frac{1}{\lambda}$, de sorte que la grosseur de la corde soit $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{2\lambda+2}{\lambda}}$. Soit ensuite $\alpha = \frac{ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{1}{\lambda}}$ ou $\lambda\alpha = \beta = \frac{\lambda ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{1}{\lambda}}$, & nous aurons $\int u dx = \frac{\alpha}{n} x^n = -\beta x^{-\frac{1}{\lambda}}$, d'où les autres coéficiens seront

$$B = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \beta$$

$$C = \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)}{(\lambda-1)(\lambda-2)} \cdot \frac{\beta^2}{1 \cdot 2}$$

$$D = \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)}{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)} \cdot \frac{\beta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$E = \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)}{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)} \cdot \frac{\beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ \&c.}$$

Soit maintenant $\lambda = 2\mu + 1$, ou bien la grosseur de la corde $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4\mu+4}{2\mu+1}}$. Qu'on prenne $\beta = \frac{(2\mu+1)ff}{\sqrt{2Tg}} f^{\frac{1}{2\mu+1}}$, & nous aurons $\int udx = \frac{\alpha}{n} x^n = -\beta x^{-\frac{1}{2\mu+1}}$. Or les coéficiens P, Q, R, S &c. se trouveront déterminés de cette manière

$$P = x$$

$$Q = \frac{2\mu}{2\mu} \cdot \frac{\beta}{1} \cdot x^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}$$

$$R = \frac{2\mu(2\mu-2)}{2\mu(2\mu-1)} \cdot \frac{\beta^2}{1\cdot 2} \cdot x^{\frac{2\mu-1}{2\mu+1}}$$

$$S = \frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)} \cdot \frac{\beta^3}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot x^{\frac{2\mu-2}{2\mu+1}}$$

$$T = \frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)(2\mu-6)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)(2\mu-3)} \cdot \frac{\beta^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot x^{\frac{2\mu-3}{2\mu+1}} \quad \text{\&c.}$$

COROLL. 1.

XVIII. Voions quelles valeurs obtiendront les coéficiens B, C, D &c. dans l'un & l'autre de nos deux cas, & d'abord au premier ou $m = 0$ & $n = \frac{1}{\lambda}$, nous aurons

	$\lambda = 1$	$\lambda = 3$	$\lambda = 5$	$\lambda = 7$	$\lambda = 9$	$\lambda = 11$	$\lambda = 13$
$P =$	1	1	1	1	1	1	1
$B =$	0	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$
$C =$	0	0	$+\frac{1}{3}\beta^2$	$+\frac{2}{5}\beta^2$	$+\frac{3}{7}\beta^2$	$+\frac{4}{9}\beta^2$	$+\frac{5}{11}\beta^2$
$D =$	0	0	0	$-\frac{1}{15}\beta^3$	$-\frac{2}{21}\beta^3$	$-\frac{3}{27}\beta^3$	$-\frac{4}{33}\beta^3$
$E =$	0	0	0	0	$+\frac{1}{105}\beta^4$	$+\frac{1}{63}\beta^4$	$+\frac{2}{99}\beta^4$
$F =$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{945}\beta^5$	$-\frac{1}{495}\beta^5$
$G =$	0	0	0	0	0	0	$+\frac{1}{10395}\beta^6$

COROLL. 2.

XIX. Or pour l' autre cas où $m = 1$ & $n = -\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{2\mu + 1}$ ces coéficiens auront les valeurs ſuivantes;

	$\lambda = 1$	$\lambda = 3$	$\lambda = 5$	$\lambda = 7$	$\lambda = 9$	$\lambda = 11$	$\lambda = 13$
$P =$	x	x	x	x	x	x	x
$B =$	o	β	β	β	β	β	β
$C =$	o	o	$\frac{1}{3}\beta^2$	$\frac{2}{5}\beta^2$	$\frac{3}{7}\beta^2$	$\frac{4}{9}\beta^2$	$\frac{5}{11}\beta^2$
$D =$	o	o	o	$\frac{1}{3\cdot5}\beta^3$	$\frac{2}{3\cdot7}\beta^3$	$\frac{3}{3\cdot9}\beta^3$	$\frac{4}{3\cdot11}\beta^3$
$E =$	o	o	o	o	$\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\beta^4$	$\frac{3}{3\cdot7\cdot9}\beta^4$	$\frac{6}{3\cdot9\cdot11}\beta^4$
$F =$	o	o	o	o	o	$\frac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot9}\beta^5$	$\frac{3}{3\cdot5\cdot9\cdot11}\beta^5$
$G =$	o	o	o	o	o	o	$\frac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}\beta^6$

qui ſont les mêmes que les précédentes.

PROBLEME 5.

XX. La groſſeur de la corde étant exprimée par cette formule $qq = \frac{f^6}{x^4}$, où x eſt l'iutervalle IX (*fig.* 1.), & qq la groſſeur au point X: déterminer le mouvement de la corde fixée dans les deux points A & B, de ſorte que $IA = a$, & $IB = b$, la tenſion étant $= T$.

SOLUTION.

Cette corde apartient au ſecond cas du Probleme précédent, en poſant $\mu = 0$, d'où l'on doit prendre

$\beta = \frac{f^{2}}{\sqrt{2Tg}}$, & puiſque $\int u\,d\,x = -\frac{\beta}{x}$, l' équation pour le mouvement ſera

$$y = x\Gamma : (\frac{\beta}{x} - t) + x\Delta : (\frac{\beta}{x} + t) = XY$$

d' où l' on tire la viteſſe du point Y dans le ſens YX,

$$-(\frac{dy}{dt}) = x\,\Gamma' : (\frac{\beta}{x} - t) - x\Delta' : (\frac{\beta}{x} + t).$$

Pour repréſenter ces fonctions qu'on tire un autre axe ki (*fig.* 3.) ſur lequel on prenne $kx = \frac{\beta}{x}$, $ka = \frac{\beta}{a}$, & $kb = \frac{\beta}{b}$, de ſorte qu'ici les points a & b répondent aux deux termes A & B où la corde eſt fixée. Qu'on décrive ſur l' eſpace ab les deux courbes $m\Delta n$ & $\mu\Gamma\nu$, de ſorte que l' appliquée de celle-là $x\Delta$ repréſente la fonction $\Delta : \frac{\beta}{x}$, & l'appliquée de celle-ci $x\Gamma$ négativement la fonction $\Gamma : \frac{\beta}{x}$, pour l'abſciſſe $kx = \frac{\beta}{x}$. Ces deux courbes ſont arbitraires, pourvû qu'elles aient certaines propriétés exigées par la condition, que les deux points de la corde A & B demeurent immobiles. Pour connoître ces propriétés conſidérons l' état initial de la corde, où le tems $t = 0$, & alors aiant

$$XY = y = x\,(\Delta - x\Gamma),\ \&\ (\frac{dy}{dt}) = x\ (\Delta' : \frac{\beta}{x} + \Gamma' : \frac{\beta}{x})$$

on voit que tranſportant le point X en A ou B, ou bien x en a & b, il faut qu'il ſoit $\alpha\mu = am$ &, $b\nu = bn$. Outre cela pour que les viteſſes en A & B évanoüiſſent auſſi, il eſt néceſſaire que les tangentes de ces deux courbes tant en m & μ, qu'en n & ν ſoient paralelles entr'elles. En obſervant ces conditions la figure de ces deux courbes $m\Delta n$ & $\mu\Gamma\nu$ eſt arbitraire, & on les peut toujours

décrire enſorte, qu'il en réſulte l' état initial, qui aura été imprimé à la corde au commencement. Enſuite pour connoître l'état de la corde après le tems écoulé $= t$, on n' a qu'à prendre du point x les intervalles xT & $xt = t$, pour avoir $kT = \frac{\beta}{x} + t$ & $kt = \frac{\beta}{x} - t$, & partant les appliquées $TU = \Delta : (\frac{\beta}{x} + t)$ & $tu = -\Gamma : (\frac{\beta}{x} - t)$, d' où l' on aura l' écart du point X de l' axe dans cet inſtant $XY = y = x\ (TU - tu) = IX\ (TU - tu)$ [*figg.* 1. & 3.]. Mais quand les points T & t tombent au delà des termes a & b, il faut continuer la courbe $n\Delta m$ au delà de a, & la courbe $\mu\Gamma\nu$ au delà de b, enſorte que prenant le point x ou en a, ou en b, il y ait toujours $TU = tu$, d'où l'on entend que la partie continuée mn' doit être ſemblable à la courbe $\mu\nu$, & la partie $\nu\mu'$ à la courbe nm. Donc prenant de part & d'autre les intervalles ab', $b'a''$ &c. ba', $a'b''$ &c. égaux à l' eſpace ab, les parties vers la droite nm, mn', $n'm''$ &c. ſeront alternativement ſemblables à nm & $\mu\nu$; & de la même manière les parties vers la gauche $\mu\nu$, $\nu\mu'$, $\mu'\nu''$ &c. alternativement ſemblables à $\mu\nu$ & nm; comme on le verra aiſément par la figure.

Maintenant quelque grand que ſoit le tems écoulé t, on pourra aſſigner l' intervalle XY, auquel le point de la corde X ſera alors éloigné de ſon état naturel, d' où l' on voit qu'après le tems $t = 2ab$, où les points T & t tombent en x' & x'' analogues à x, on aura $XY = x\ (x'\delta' = x''\gamma'') = x\ (x\Delta - x\Gamma)$ tout comme au commencement, de ſorte que la corde eſt parvenue au même état, après avoir achevé dans ce tems deux vibrations, ou ſelon les circonſtances peut être 4 ou 6, ou même pluſieurs ſelon un nombre pair quelconque. Le tems

d'une vibration sera donc $t = ab = \frac{\beta}{a} - \frac{\beta}{b} = \frac{\beta(b-a)}{ab}$ $= \frac{(b-a)f^3}{ab\sqrt{2Tg}}$, ou bien le nombre des vibrations rendues dans une seconde sera $= \frac{ab\sqrt{2Tg}}{(b-a)f^3}$, ou selon les circonstances 2, 3, 4 &c. fois plus grand.

C O R O L L. 1.

XXI. Une telle corde sera donc des vibrations régulières, de quelque manière qu'elle aura été ébranlée au commencement, & partant les sons qu'elle rend, seront aussi justes que ceux d'une corde partout également épaisse.

C O R O L L. 2.

XXII. Puisque l'épaisseur de la corde en X est qq $= \frac{f^6}{x^4}$, la masse ou bien le poids de la portion AX sera $= \frac{1}{3} f^6 (\frac{1}{a^3} - \frac{1}{x^3})$, & partant le poids de la corde entière $AB = \frac{1}{3} f^6 (\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3})$. Soit ce poids $= P$ pour avoir $f^3 = \frac{ab\sqrt{3Pab}}{\sqrt{(b^3 - a^3)}}$, & le nombre des vibrations rendues par seconde sera $= \sqrt{\frac{2Tg(aa+ab+bb)}{3Pab(b-a)}}$.

C O R O L L. 3.

XXIII. Posant le poids de la corde $AB = P$ pour avoir $\frac{1}{3} f^6 = \frac{Pa^3b^3}{b^3 - a^3}$, le poids de la partie AX, en nommant

mant $IX = x$, fera $= \frac{P b^3}{b^3 - a^3} (1 - \frac{a^3}{x^3})$. Mais il eſt plus convenable, pour ſe former une juſte idée de cette corde, de remarquer que la groſſeur en X eſt réciproquement proportionnelle au quarré-quarré de l' intervalle $IX = x$.

SCOLIE.

XXIV. Pour connoitre les circonſtances, ſous leſquelles cette même corde fera deux ou trois &c. fois plus de vibrations qu'à l'ordinaire, étant ébranlé d' une manière quelconque; on comprend de ce que j' ai dit des cordes de la même épaiſſeur, que cela arrive, lorſque la courbe nm eſt ſemblable à la courbe nn', ou nm'' &c., & en même tems la courbe $\mu\nu$ ſemblable à $\mu\mu'$ ou $\mu\nu''$ &c., ou bien ſi l' on applique à chaque point x dans l'eſpace ab une appliquée $= x\Delta - x\Gamma$, il faut que cette nouvelle courbe ait deux ou pluſieurs parties ſemblables entr'elles, & alternativement ſituées à l'égard de l' axe ab (*fig.* 4.). Ainſi pour le cas de deux fois plus d'oſcillations, cette nouvelle courbe doit avoir la figure $ayc y' b$, de ſorte que la partie cya ſoit égale & ſemblable à la partie $cy'b$, ou bien en prenant les intervalles $cx = cx'$, qu'il ſoit $x'y' = xy$. Donc puiſque $ka = \frac{\beta}{a}$, & $kb = \frac{\beta}{b}$, nous aurons $kc = \frac{\beta(a+b)}{2ab}$; de là nous formerons ainſi la figure de la corde même au commencement. Aiant $IA = a$ & $IB = b$ (*fig.* 5.), le nœud tombera au point C, enſorte que $IC = \frac{2ab}{a+b}$, c' eſt-à-dire que IC ſera la moyenne harmonique entre IA & IB; & prenant IX

$= \frac{\beta}{kx}$, l'appliquée XY sera $IX \times xy$. Pour rendre cela plus clair, posons $kc = c$, & $cx = cx' = u$, & puisque $IC = \frac{\beta}{c}$, prenons $IX = \frac{\beta}{c+u}$ & $IX' = \frac{\beta}{c-u}$, de sorte que $CX = \frac{\beta u}{c(c+u)}$, & $CX' = \frac{\beta u}{c(c-u)}$, & partant $CX : CX' = IX : IX'$. Maintenant, parceque $XY = IX \times xy$, & $X'Y' = IX' \times xy$, il est évident que $CX : XY = CX' : X'Y'$, & que la droite YY' passe par le nœud C. D'où nous tirons la construction suivante de la courbure de la corde, qui ne dépend plus de la fig. 4.

Aiant partagé la corde AB en C, de manière que IC soit la moyenne harmonique entre IA & IB, qu'on décrive sur AC une courbe quelconque AYC, & pour chaque point X qu'on prenne le point X', ensorte que les trois lignes IX, IC, IX' soient en proportion harmonique, alors la droite tirée de Y par le point C marquera sur l'appliquée $X'Y'$ le point Y' dans la courbe $CY'B$. Si l'on vouloit que la corde rendît trois fois plus de vibrations, il faudroit entre A & B établir deux nœuds C & D, de sorte que les distances IA, IC, ID, IB fissent une proportion harmonique, & aiant pris à volonté la figure d'une partie AYC on formeroit de la même manière la figure au delà du nœud C, & ensuite aussi au delà du nœud D. Cette même construction aura aussi lieu, lorsqu'on voudra établir un plus grand nombre de nœuds.

SCOLIE.

XXV. Voilà donc une espèce de cordes fort remarquable, puisqu'elle a cela de commun avec les cordes uniformément épaisses, que de quelque manière qu'on les ébran-

le, elles produisent toujours des vibrations régulières; or nous verrons bientôt que cette propriété ne sauroit avoir lieu dans aucune autre espèce. Le fondement de cette propriété est, qu'en quelque état que la corde soit mise au commencement, elle y doit nécessairement revenir après un certain tems; or dans les autres espèces de cordes ce rétablissement dans le premier état n'arrive peut-être jamais, & quand il arrive, ce n'est que sous de certaines circonstances, sans lesquelles le son ne sauroit être régulier ou formé par des vibrations isochrones. D'abord les espèces suivantes, que nous sommes en état de développer mettent cette différence dans tout son jour, & de là on pourra juger avec d'autant plus de raison, des autres espèces de cordes, qu'il ne nous est pas encore permis de soumettre au calcul.

PROBLEME 6.

XXVI. La grosseur de la corde étant exprimée par cette formule $qqff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4}{3}}$, où x est l'intervalle IX (*fig.* 1.) & qq la grosseur au point X: déterminer le mouvement de la corde fixée dans les deux points A & B, de sorte que $IA = a$ & $IB = b$, la tension étant $= T$.

SOLUTION.

Cette corde apartient au premier cas du Probl. 4, en prenant $\mu = 1$, d'où l'on a $\beta = \frac{3ff}{\sqrt{2Tg}} f^{-\frac{1}{3}}$, & $\int udx = \beta x^{\frac{1}{3}}$ & ensuite $P = 1$, & $Q = -\beta x^{\frac{1}{3}}$; tous les mouvemens de cette corde seront donc exprimés par cette équation;

$$y = \Gamma : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) + \Delta : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t)$$

$$- \beta x^{\frac{1}{3}} \Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) - \beta x^{\frac{1}{3}} \Delta' : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t)$$

où y exprime l'intervalle XY, dont le point X eſt éloigné de l'axe après le tems $= t$ *ſecondes*, d'où la viteſſe de ce point Y dans le ſens YX ſera

$$-\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) + \Delta' : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t)$$

$$+ \beta x^{\frac{1}{3}} \Gamma'' : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) - \beta x^{\frac{1}{3}} \Delta'' : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t).$$

Qu'on tire maintenant un nouvel axe ik (*fig.* 6.), ſur lequel on prenne $ia = \beta a^{\frac{1}{3}}$, $ib = \beta b^{\frac{1}{3}}$ & $ix = \beta x^{\frac{1}{3}}$; or poſons $ix = \beta x^{\frac{1}{3}} = v$, & ſur l'eſpace ab tirons les deux courbes $m\Gamma n$ & $\mu\Delta\nu$ pour repréſenter nos deux fonctions arbitraires, de manière qu'il ſoit $x\Gamma = \Gamma' : v$ & $x\Delta = \Delta' : v$, d'où nous aurons $\Gamma : v = amx\Gamma$, & $\Delta : v = a\mu x\Delta$, en remarquant que puiſque nous repréſentons ici la fonction Δ ſous l'axe, il faut changer le ſigne des fonctions Δ, Δ', Δ'' dans nos formules précédentes. Donc pour l'état initial de la corde où $t = 0$, nous aurons

$$y = amx\Gamma - a\mu x\Delta - v . x\Delta,$$

$$-\left(\frac{dy}{dt}\right) = - x\Gamma - x\Delta + \frac{v\, d.x\Gamma}{dv} + \frac{v\, d.x\Delta}{dv}.$$

Or puiſque aux points A & B, l'une & l'autre de ces deux valeurs doit évanouir, nous aurons ces conditions à remplir; 1° $am = a\mu$; 2° $am + a\mu = ia \times \frac{d.am + d.a\mu}{dv}$; 3° $ambn - a\mu b\nu = ib(bn - b\nu)$; 4° $bn + b\nu = ib \times \frac{d.bn + d.b\nu}{dv}$, & pourvû que ces quatre propriétés aient lieu dans les deux courbes mn & $\mu\nu$, leur dé-

ſcription eſt arbitraire ; & on les peut toujours tracer en ſorte qu'elles repréſentent un état initial quelconque donné de la corde.

Or maintenant il faut continuer la courbe $\nu\mu$ à gauche & la mn à droite ; la première opération eſt déterminée par cette condition, que le point A ou a demeure immobile ; & l'autre par l'immobilité du point b.

Pour la continuation de la courbe $\nu\mu$ prenons $ax' = ax = t$, & ſoit $x'\delta'$ l'appliquée cherchée au point x' ; donc puiſque pour ce cas ;

$$\Gamma : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) = amx\Gamma \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{3}}\Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) = ia\,.\,x\Gamma$$

$$\Delta : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t) = -a\mu x'\delta' \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{3}}\Delta' : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t) = ia\,.\,x'\delta'$$

il faut qu'il ſoit

$$o = amx\Gamma + a\mu x'\delta' - ia\,.\,x\Gamma + ia\,.\,x'\delta'.$$

Pour la continuation de la courbe mn prenons $bx'' = bx = t$, & ſoit $x''\gamma''$ l'appliquée cherchée au point x'' on aura donc

$$\Gamma : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) = amx''\gamma'' \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{3}}\Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) = ib.x''\gamma''$$

$$\Delta : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t) = a\mu x\Delta \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{3}}\Delta' : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t) = ib\,.\,x\Delta$$

& partant il faut qu'il ſoit

$$o = amx''\gamma'' - a\mu x\Delta - ib\,.\,x''\gamma'' + ib\,.\,x\Delta$$

Or $amx''\gamma'' = ambn + bnx''\gamma'' = a\mu b\nu + ib\,.\,bn - ib\,.\,b\nu + bnx''\gamma''$, d'où notre équation ſe change en cette forme :

$$o = bnx''\gamma'' + b\nu x\Delta + ib\,(bn - x''\gamma'') - ib\,(\beta\nu - x\Delta).$$

Aiant continué ainſi nos deux courbes, pour trouver l'eſpace $XY = y$ (*fig.* 1.) après un tems quelconque de t *ſecondes*, qu'on prenne $xT = tu = t$, & on aura

$$y = amTU - a\mu tu - \beta x^{\frac{1}{3}}\,(TU - tu);$$

c' eſt donc de cette formule qu'il faut déterminer l'état de la corde à un tems quelconque t depuis ſon état initial.

COROLL. 1.

XXVII. Par cette conſtruction on voit qu'on ne ſauroit aſſigner aucun tems, auquel la corde revienne néceſſairement à ſon état initial, & partant les ébranlemens dont une telle corde eſt ſuſceptible, ne ſauroient être réduits à un mouvement régulier de vibrations iſochrones, comme dans le cas précédent.

COROLL. 2.

XXVIII. Auſſi la continuation des deux courbes mn & $\mu\nu$ demande une conſtruction tranſcendente. Car poſant $\alpha x = a x' = t$, $x\Gamma = p$ & $x'\delta' = z$, la continuation de la courbe $\mu\nu$ doit être tirée de cette équation: $\int p\,dt + \int z\,dt - ia\,(p - z) = 0$, ou poſant $ia = \alpha$ de celle-ci $\alpha\,dz + z\,dt = \alpha\,dp - p\,dt$, qui donne

$$\alpha e^{\frac{t}{\alpha}} z = \int e^{\frac{t}{\alpha}} (\alpha\,dp - p\,dt) = \alpha e^{\frac{t}{\alpha}} p - 2\int e^{\frac{t}{\alpha}} p\,dt,$$

ou $z = p - \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{t}{\alpha}} \int e^{\frac{t}{\alpha}} p\,dt$.

COROLL. 3.

XXIX. De la même manière pour la continuation de la courbe mn poſant $bx'' = bx = t$, $x\Delta = q$, $x''\gamma'' = z$ & $ib = \beta$; on aura $2m'x''\gamma'' = ambn + \int z\,dt$, $a\mu x\Delta = a\mu b\nu - \int q\,dt$, donc $ambn - a\mu b\nu + \int z\,dt + \int q\,dt - \beta z + \beta q = 0$, ou $\beta\,dz - z\,dt = \beta\,dq + q\,dt$, &

partant $\beta e^{-\frac{t}{\beta}} z = \int e^{-\frac{t}{\beta}} (\beta dq + q dt)$, ou $z = q + \frac{2}{\beta} e^{\frac{t}{\beta}} \int e^{-\frac{t}{\beta}} q dt$.

SCOLIE.

XXX. Or il n'eſt pas abſolument impoſſible qu'une telle corde produiſe des vibrations régulières ou iſochrones; cela dépend de l' état initial, auquel la corde a été réduite, qui peut bien être tel, que les vibrations deviennent régulières. Pour trouver de tels cas, ſoit pour abreger $\beta x^{\frac{1}{3}} = v$, & poſons

$$\Gamma : (v + t) = C \text{ſin.} (nv + nt + \zeta), \&$$
$$\Delta : (v - t) = C \text{ſin.} (nv + \zeta - nt),$$

d' où nous aurons

$$\Gamma' : (v + t) = nC \text{coſ.} (nv + \zeta + nt), \&$$
$$\Delta' : (v - t) = nC \text{coſ.} (nv + \zeta - nt),$$

& partant

$$y = 2\,C \text{ſin.} (nv + \zeta) \text{coſ.}\, nt - 2nCv \text{coſ.} (nv + \zeta) \text{coſ.}\, nt.$$

Maintenant, cette quantité devant évanoüir, ſoit qu'on poſe $x = a$ ou $x = b$, ſoit pour abreger $\beta a^{\frac{1}{3}} = h$ & $\beta b^{\frac{1}{3}} = k$; & il faudra remplir ces deux conditions;

1° $\text{ſin.} (nh + \zeta) - nh \text{coſ.} (nh + \zeta) = 0$, &
2° $\text{ſin.} (nk + \zeta) - nk \text{coſ.} (nk + \zeta) = 0$,

d' où nous tirons

$$\text{tang.} (nh + \zeta) = nh, \& \text{tang.} (nk + \zeta) = nk.$$

Il s'agit donc de déterminer de ces deux égalités le nombre n avec l' angle ζ. Or éliminant l' angle ζ, nous aurons

$$\text{tang. } n\,(k - h) = \frac{n\,(k - h)}{1 + nnhk},$$

où il faut remarquer que $h = \frac{3\,ff}{\sqrt{2Tg}} \left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{1}{3}}$, & $k = \frac{3\,ff}{\sqrt{2Tg}} \left(\frac{b}{f}\right)^{\frac{1}{3}}$. Tout revient donc à déduire de l'équation trouvée le nombre n, ce qui se peut toujours exécuter d'une infinité de manières, attendu que cette équation renferme une infinité de racines, dont aiant trouvé une quelconque pour n, on voit qu'après le tems $t = \frac{2\pi}{n}$, la corde revient au même état, & le tems d'une vibration est par conséquent $= \frac{\pi}{n}$, de sorte que le nombre des vibrations rendues par seconde sera $= \frac{n}{\pi}$. Or pour trouver un tel nombre n on ne sauroit opérer qu'en tatonnant, en prenant successivement plusieurs valeurs pour en conclure enfin la véritable. Pour cet effet aiant pris pour n un nombre quelconque, qu'on cherche les angles φ & ψ, de sorte que $nh =$ tang. φ, & $nk =$ tang. ψ, & alors il faut qu'il provienne $n\,(k - h) = \psi - \varphi + i\pi$, où l'on peut prendre pour i ou zero ou un nombre entier quelconque, & quand cela arrivera on aura l'angle $\zeta = \varphi - nh$ ou $\zeta = \psi + i\pi - nk$.

S C O L I E 2.

XXXI. Cette question devient plus aisée à résoudre, si l'on regarde les points A & B où l'on doit fixer la corde, comme inconnus, & le nombre n comme connu, car alors, posant $nh = p$, & $nk = q$, pour avoir tang. $(p+\zeta) = p$ & tang. $(q + \zeta) = q$, ou tang. $(q - p) = \frac{q - p}{1 + pq}$, soit q

$-p$

$-p = r$ & $1 + pq = s$, & on aura $s = \frac{r}{\text{tang. } r}$. Qu'on prenne pour r un angle quelconque, & qu'on en cherche la valeur de s, de là on trouvera $q + p = \sqrt{(rr + 4s - 4)}$, & enſuite on aura $h = \frac{\sqrt{(rr + 4s - 4)} - r}{2n}$ & $k = \frac{\sqrt{(rr + 4s - 4)} + r}{2n}$, d'où l'on voit que s doit être plus grand que 1, & partant l'angle r plus grand que 180°, afin qu'on obtienne $r >$ tang. r. Maintenant pour connoître tous les mouvemens réguliers dont la même corde eſt ſuſceptible, on n'a qu'à prendre l'angle r en ſorte, qu'il en réſulte le même raport entre h & k; ſoit pour cet effet $k = mh$, & on aura $(m + 1) r = (m - 1) \sqrt{(rr + 4s - 4)}$ ou $mrr = (m - 1)^2 (s - 1)$, donc $s = 1 + \frac{mrr}{(m-1)^2} = \frac{r}{\text{tang. } r}$, d'où l'on tire $h = \frac{r}{n(m-1)}$, & $k = \frac{mr}{r(m-1)}$, & pour chaque nombre m on peut trouver une infinité de valeurs pour l'angle r.

Exemple.

XXXII. Prenons $m = 2$, de ſorte que $k = 2h$ & $b = 8a$, & l'équation à réſoudre ſera $1 + rr = \frac{r}{\text{tang. } r}$, d'où l'on tire $h = \frac{r}{n}$ & $k = \frac{2r}{n}$. Or il faut remarquer que pour réduire un angle exprimè en ſecondes à des parties du rayon, il faut ajouter 4, 6855749 au logarithme du nombre des *ſecondes*, mais puiſque nous ſavons que $r > \pi$, & que poſant $r = \pi + \varphi$, l'angle φ doit être plus grand que 10°, nous aurons à très-peu près tang. $r =$ tang. $\varphi = \varphi$

$+ \frac{1}{3}\phi^3$, donc $\phi(1 + 2rr) = \frac{r}{1 + \frac{1}{3}\phi^2} = r$ $(1 - \frac{1}{3}\phi\phi)$ ou bien

$$6\pi\pi\phi + 13\pi\phi\phi + 7\phi^3 = 3\pi,$$

d'où l'on tire à peu près $\phi = \frac{7 + 18\pi\pi + 12\pi^4}{\pi(21 + 52\pi\pi + 24\pi^4)}$, ou $\phi = \frac{1}{2\pi} - \frac{13}{24\pi^3} + \frac{37}{36\pi}$ &c. Pour les autres valeurs on n'a qu'à poser ſucceſſivement 2π, 3π, 4π &c. au lieu de π. Or pour ces derniers cas on a aſsès exactement $\phi = \frac{1}{2i\pi}$, donc $r = i\pi + \frac{1}{2i\pi}$, & de là le nombre $n = \frac{r}{b}$ & le nombre des vibrations rendues par ſeconde $= \frac{i}{h} + \frac{1}{2i\pi\pi h}$.

Faiſons donc le calcul pour trouver les valeurs du nombre r.

	ſi $i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$\frac{1}{2i\pi} =$	0, 159153	0, 079576	0, 053051	0, 039788
$\frac{13}{24 i^3 \pi^3} =$	0, 017469	0, 002185	0, 000647	0, 000273
$\frac{37}{36 i^5 \pi^5} =$	0, 003359	0, 000105	0, 000014	0, 000003
$\phi =$	0, 145043	0, 077496	0, 052418	0, 039518
$\pi =$	3, 141593	6, 283185	9, 424778	12, 566371
$r =$	3, 286636	6, 360681	9, 477196	12, 605889
$\zeta =$	65° 4′	76° 38′	80° 59′	83° 12′

d'où l'on voit que cette même corde peut rendre pluſieurs ſons réguliers qui ſont entr'eux, comme ces valeurs

de r, dont les plus bas s' écartent ſenſiblement de la ſuite des nombres naturels, mais les aigus s' y conforment de plus en plus. Aiant ainſi trouvé r, puiſque $nh = p = r$, on aura auſſi l' angle $\zeta =$ A: tang. $r - r =$ A: tang. $2r - 2r$ dont j' ai auſſi marqué les valeurs ci-deſſus.

Conclusion.

XXX. De la même manière on déterminera les ébranlemens des autres eſpèces de cordes, que nous ſommes en état de ſoumettre au calcul, & eu général on verra, que tous ces ébranlemens ne ſont pas réductibles à des vibrations régulières. Mais on peut toujours aſſigner des conditions, ſous leſquelles ces cordes peuvent recevoir un mouvement régulier, & cela même d'une infinité de manière différentes. Or il eſt bon de remarquer ici, que tous les ſons, dont une même corde de ces eſpèces eſt ſuſceptible, ſont incommenſurables entr' eux; pendant que ceux des deux premières eſpèces ſuivent entr' eux la progreſſion des nombres naturels. C' eſt donc à cauſe de cette incommenſurabilité que les ſons des autres eſpèces ſont ſi irréguliers & contraires à l' harmonie, puiſqu'on les peut regarder comme un mélange de pluſieurs ſons ſimples, que la même corde pourroit rendre ſous de certaines conditions.

RECHERCHES

Sur l'intégration de l'équation

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{c}{xx}z$$

Par M. EULER.

I. CETTE équation est d'un genre tout-à-fait différent de celui, auquel le calcul intégral a été appliqué jusqu'ici, puisqu'elle renferme trois variables t, x, & z, & qu'il s'agit de déterminer la quantité z par les deux autres t & x, c'est-à-dire qu'on demande quelle fonction de t & x doit être prise pour z, afin que la condition prescrite soit remplie. Mais on cherche principalement une solution compléte qui nous découvre à la fois toutes les fonctions possibles, qui étant substituées à la place de z, satisfassent à l'équation proposée ; comme cette équation contient des différentiels du second dégré, son intégrale compléte doit nécessairement renfermer deux fonctions absolument indéfinies & arbitraires, comme je l'ai prouvé autresfois.

II. Ce n'est pas une pure spéculation, qui a fourni cette équation, mais elle renferme la solution de plusieurs questions physico-mathématiques de la dernière importance. Le cas, où les quantités b & c sont zero, n'est que trop connu par les recherches sur les vibrations des cordes, dont le mouvement en général est toujours déterminé par cette équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, pourvu que la corde ait par tout la même grosseur, & que les excursions soient quasi infiniment petites. Ensuite la question sur la propaga-

tion du ſon m' aiant conduit à cette équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{4a^2}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$ il eſt aſsès clair, que l' équation propoſée étant plus générale eſt de la dernière importance.

III. Comme cette équation apartient à un genre de calcul tout particulier, dont les premiers élémens ne ſont pas encore aſsès bien développés, je me propoſe d'établir ici quelques méthodes, qui peuvent être d'un grand uſage dans ce nouveau calcul. Car quoique j'aie donné les intégrales complétes des deux cas mentionnés, c' eſt plutôt par une heureuſe induction, que j' y ai été conduit, que par une méthode certaine, & lorſque Mrs Bernoulli & D'Alembert ont traité le probleme des cordes vibrantes, ils ſe ſont contentés des ſolution particulières, ſans ſe ſoucier trop de toute l' étendue, que la queſtion renferme par ſa nature. Or avant que d' entreprendre l'intégration de l'équation générale miſe dans le titre, il ſera bon de traiter plus en détail l' équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, & d' expoſer quelques méthodes, qui nous conduiſent à ſon intégrale complete.

De l'équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$.

IV. Si l' on vouloit ſe contenter de ſolutions particulières, il ſeroit fort facile d' en trouver une multitude infinie, toutes les valeurs ſuivantes ſatisfont également à cette équation;
$z = A(x \pm at)^n$, $z = Ae^{n(x \pm at)}$, z A ſin. $n(x \pm at)$, & l' on peut encore joindre enſemble autant qu'on voudra de telles valeurs, de ſorte que par ce moyen on pourroit donner une ſolution qui renfermât une infinité de quantité

de quantités constantes, & absolument arbitraires. Cependant une telle solution ne feroit pas encore compléte, & ne comprendroit point toutes les solutions possibles. Mais quand j'ai trouvé $z = \Gamma:(x + at) + \Delta:(x - at)$, où $\Gamma:(x + at)$ marque une fonction quelconque de $x + at$, & $\Delta:(x - at)$ de $x - at$, on voit bien que cette forme est infiniment plus générale, aussi est-elle l'intégrale compléte de notre équation.

V. Il est aisé de s'assurer, que cette formule convient à l'équation proposée; car en marquant le différentiel de $\Gamma:u$ par $du\,\Gamma':u$, & celei de $\Gamma':u$ par $du\,\Gamma'':u$, on en tire

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma':(x + at) + \Delta':(x - at) \ \&$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = a\Gamma':(x + at) - a\Delta':(x - at)$$

& par la différentiation réitérée

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \Gamma'':(x + at) + \Delta'':(x - at) \ \&$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = a^2\Gamma'':(x + at) + a^2\Delta'':(x - at)$$

d'où l'on a évidemment $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$. Mais il s'agit ici d'une méthode, qui partant de l'équation différentio-différentielle nous conduise immédiatement à la formule $z = \Gamma:(x + at) + \Delta:(x - at)$, & par laquelle nous puissions être assurés, que cette formule est en effet l'intégrale compléte de l'équation différentio-différentielle. Je m'en vais proposer deux méthodes qui conduisent à ce but.

VI. *Première méthode.* Je transforme l'équation par cette substitution $\left(\frac{dz}{dt}\right) + a\left(\frac{dz}{dx}\right) = u$, d'ou je tire:

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + a\left(\frac{ddz}{dt\,dx}\right) \ \& \ \left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dt\,dx}\right) +$$

$a\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$; & partant $\left(\frac{du}{dt}\right) - a\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) - aa$ $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = 0$. Nous voilà donc parvenus à une équation différentielle du premier dégré $\left(\frac{du}{dt}\right) = a\left(\frac{du}{dx}\right)$, dont il s'agit de trouver la fonction u. Or, puisque $du = dt$ $\left(\frac{du}{dt}\right) + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$, nous aurons $du = \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot (a\,dt + dx)$; laquelle formule devant être intégrable, il faut que $\left(\frac{du}{dx}\right)$ soit une fonction de la quantité $x + at$. Posons donc $\left(\frac{du}{dx}\right) = \Gamma'' : (x + at)$, & l'équation $du = (dx + a\,dt)$, $\Gamma'' : (x + at)$ donne $u = \Gamma' : (x + at)$. Maintenant nous avons à résoudre cette équation $\left(\frac{dz}{dt}\right) + a\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma' :$ $(x + at)$ dont je cherche l'intégrale de la manière suivante.

VII. Posant $dz = p\,dx + q\,dt$, pour avoir $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ & $q = \left(\frac{dz}{dt}\right)$, à cause de $q = -ap + \Gamma' : (x + at)$, nous aurons :

$$dz = p\,(dx - a\,dt) + dt\,\Gamma' : (x + at)$$

Posons $p = r + \alpha\Gamma' : (x + at)$, pour avoir :

$$dz = r\,(dx - a\,dt) + [\alpha dx + (1 - \alpha a)\,dt]\,\Gamma' : (x + at)$$

& soit $\frac{1 - \alpha a}{\alpha} = a$ ou $\alpha = \frac{1}{2a}$, donc

$$dz = r\,(dx - a\,dt) + \frac{1}{2a}(dx + a\,dt)\,\Gamma' : (x + at),$$

& puisque le dernier nombre est intégrable ; l'intégrale étant $\frac{1}{2a}\Gamma : (x + at)$ ou bien simplement $\Gamma : (x + at)$

pour rendre le premier membre également intégrable, il faut qu'il soit $r = \Delta' : (x - at)$, d'où nous tirons

$$z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$$

& il est évident en même tems, que cette forme est l'intégrale compléte de l'équation proposée.

VIII. *Autre méthode.* Changeons les variables t & x, dont z doit être une fonction, & posons $x + at = p$, & $x - at = q$, de sorte qu'il faille à présent trouver, quelle fonction de p & q doit être z. Il s'agit donc d'éliminer t & x, & de trouver une équation differentielle entre p, q, & z, ce qui se fera de la manière suivante. Puisque $dz = dt\,(\frac{dz}{dt}) + dx\,(\frac{dz}{dx})$ & $dz = dp\,(\frac{dz}{dp}) + dq\,(\frac{dz}{dq})$, à cause de $dp = dx + a\,dt$, & $dq = dx - a\,dt$, nous aurons

$$dt\,(\frac{dz}{dt}) + dx\,(\frac{dz}{dx}) =$$

$$(dx + a\,dt)\,(\frac{dz}{dp}) + (dx - a\,dt)\,(\frac{dz}{dq}).$$

Maintenant parceque t & x ne dépendent point l'une de l'autre, les membres affectés de dx & dt doivent être égales séparément, ce qui donne

$$(\frac{dz}{dx}) = (\frac{dz}{dp}) + (\frac{dz}{dq}) \quad \& \quad (\frac{dz}{dt}) = a\,(\frac{dz}{dp}) - a\,(\frac{dz}{dq})$$

& de là nous tirons

$$(\frac{ddz}{dpdx}) = (\frac{ddz}{dp^2}) + (\frac{ddz}{dpdq}) \quad \& \quad (\frac{ddz}{dpdt}) = a\,(\frac{ddz}{dp^2}) - a\,(\frac{ddz}{dpdq})$$

$$(\frac{ddz}{dqdx}) = (\frac{ddz}{dpdq}) + (\frac{ddz}{dq^2}) \quad \& \quad (\frac{ddz}{dqdt}) = a\,(\frac{ddz}{dpdq}) - a\,(\frac{ddz}{dq^2})$$

IX. Pour achever la substitution, aiant

$$(\frac{ddz}{dx^2}) = (\frac{ddz}{dpdx}) + (\frac{ddz}{dqdx}) \quad \& \quad (\frac{ddz}{dt^2}) = a\,(\frac{ddz}{dpdt}) - a\,(\frac{ddz}{dqdt})$$

on n'a qu'à substituer ici les valeurs, que nous venons de trouver, & nous obtiendrons

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + 2\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \left(\frac{ddz}{dq^2}\right) \ \&$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) - 2aa\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + aa\left(\frac{ddz}{dq^2}\right).$$

Donc notre équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ ſe change en celle-ci :

$2aa\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = -2aa\left(\frac{ddz}{dpdq}\right)$, ou bien $\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = 0$ qui eſt beaucoup plus ſimple que la propoſée, ne contenant qu'un ſeul membre, qu'il faut égaler à zero ; d'où l'on comprend de quelle importance peuvent ſouvent être de telles transformations, dans ce nouveau genre du calcul intégral.

X. Tout ſe rêduit donc à trouver, quelle fonction des deux variables p & q doit être la quantité z, afin que l'on ait $\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = 0$. Or cette équatiou eſt fort aiſée à réſoudre ; qu'on poſe, pour mettre l'opération dans tout ſon jour, $\left(\frac{dz}{dq}\right) = u$, & puiſque $\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = \left(\frac{du}{dp}\right)$, il faut qu'il ſoit $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$, d'où il eſt clair que la quantité u ne ſauroit renfermer la variable p, & partant elle ſera fonction de la ſeule variable q, & une fonction quelconque de q miſe pour u ſatisfera à la condition $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$. Poſons donc $u = \Delta : q$, ce qui eſt l'intégrale compléte de l'équation $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$, & maintenant nous aurons $\left(\frac{dz}{dq}\right) = \Delta' : q$. Conſidérons ici l'autre quantité p conſtante, pour avoir $dz = dq\,\Delta' : q$, & partant ſon intégrale $z = \Delta : q +$ conſt. ; mais cette conſtante renferme

une fonction quelconque de p, au lieu de laquelle écrivant $\Gamma : p$ nous trouvons comme ci-dessus $z = \Gamma : p + \Delta : q$ ou bien $z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$.

XI. Pour mettre devant les yeux toute l'étendue de cette solution, on peut dècrire à volonté deux courbes quelconques EMS & FNT (*fig.* * *plan.* 1.) raportées à leur axes & BD, & alors pour avoir la valeur de z, qui répond à des valeurs quelconques des deux variables x & t, qu'on prenne dans la première courbe l'abscisse $AP = x + at$, & dans l'autre l'abscisse $BQ = x - at$, & la somme des deux appliquées $PM + QN$ ou bien aussi leur différence représentera en général la nature de la fonction cherchée z qui convient à l'équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$. Cette construction est si générale, que des traits tirés librement sur le papier sans aucune loi peuvent être employés pour les deux lignes EMS & FNT.

XII. C'est aussi en quoi consiste le caractère essentiel de ce genre de calcul intégral, & qui le distingue des intégrations ordinaires, où aucune ligne courbe destituée de la loi de continuité, ne sauroit jamais avoir lieu. Mais ici les lignes EMS & FNT peuvent être tirées d'une maniére quelconque, sans qu'elles soient comprises dans quelque équation que ce soit; on les peut terminer brusquement où l'on veut, & les composer d'arcs de courbes tout-à-fait différentes. De quelque manière qu'on ait commencé à tirer ces lignes, on est toujours le maître de les continuer de part & d'autre comme on veut, sans qu'on soit astreint à aucune loi; toutes ces irrégularités n'empêchent pas que la construction donnée ne satisfasse aussi bien à l'équation proposée, que si ces deux lignes courbes étoient tout-à-fait régulières.

De l'équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\frac{\alpha}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{\beta}{xx}z$.

XIII. D'abord je remarque qu'on peut transformer cette équation en d'autres ſemblables, en ſuppoſant $z = x^{\lambda} u$, d'où l'on a

$\left(\frac{dz}{dt}\right)=x^{\lambda}\left(\frac{du}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)=\lambda x^{\lambda-1}u+x^{\lambda}\left(\frac{du}{dx}\right)$, & de là $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=x^{\lambda}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}u$ $+2\lambda x^{\lambda-1}\left(\frac{du}{dx}\right)+x^{\lambda}\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)$, & partant cette ſubſtitution, en diviſant par x^{λ}, nous fournit l'équation:

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)+\frac{\alpha+2\lambda}{x}\left(\frac{du}{dx}\right)+\frac{\beta+\alpha\lambda+\lambda(\lambda-1)}{xx}u.$$

Donc ſi nous prenons $\lambda=-\frac{1}{2}\alpha$, de ſorte que $z = x^{-\frac{1}{2}\alpha}u$, l'équation propoſée ſe transforme dans celle-ci

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)+\frac{4\beta-\alpha\alpha+2\alpha}{4xx}\cdot u$$

qui aiant un terme de moins, doit être regardée comme plus ſimple.

XIV. Par la même ſubſtitution on peut fair évanoüir le dernier terme, en poſant $\beta+\alpha\lambda+\lambda\lambda-\lambda=0$, ce qui donne

$\lambda=\frac{1-\alpha}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{(1-\alpha)^2}{4}-\beta\right)}$ & $\alpha+2\lambda=1\pm\sqrt{[(1-\alpha)^2-4\beta]}$

donc la ſubſtitution $z = x^{\lambda}u$ nous conduit à cette équation:

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)+\frac{1\pm\sqrt{((1-\alpha)^2-4\beta)}}{x}\left(\frac{du}{dx}\right).$$

Donc ſans reſtraindre la forme propoſée nous pouvons d'abord ſuppoſer $\beta = 0$, de ſorte que nous aions à réſoudre cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\alpha}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

où il eſt remarquable que poſant $z = x^{1-\alpha}u$, elle ſe transforme dans celle-ci, qui lui eſt ſemblable.

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{2-\alpha}{x}\left(\frac{du}{dx}\right),$$

& partant ſi la réſolution de l' équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\alpha}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

réuſſit dans le cas de $\alpha = n$, elle réuſſira auſſi dans le cas de $\alpha = 2 - n$.

XV. Mais puiſque la deſtruction du dernier terme pourroit conduire à des valeurs imaginaires, qu'il faudroit donner à l' expoſant λ, il vaudra mieux chaſſer l' avant dernier terme, ce qui ſe peut toujours faire ſans tomber dans cet inconvénient, & partant nos recherches rouleront ſur la réſolution de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\beta}{xx}z,$$

ſur laquelle je remarque, qu'on la peut réduire à une forme où le dernier terme manque d'une double manière, en poſant $z = x^{\frac{1 \pm \sqrt{(1-4\beta)}}{2}}u$, d' où l' on parvient à cette forme;

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{1 + \sqrt{(1-4\beta)}}{x}\left(\frac{du}{dx}\right).$$

Or ſi β eſt un nombre poſitif plus grand que $\frac{1}{4}$ cette forme devient imaginaire.

XVI. Or par raport à cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\beta}{xx}z$$

je dois avertir d'avance, que je ne la ſaurois réſoudre en général, quelque nombre qu'on prenne ponr β, il n'y a

que certaines valeurs de cette lettre, où l' intégration réussisse, en quoi la résolution est semblable à la fameuse équation de Riccati, qui n' est résoluble qu'en certains cas. Mais aussi dans ces cas je dois avoüer, que je ne pas suis assès content de la méthode, qui m'a conduit à l'intégration de ces cas, puisqu'elle m' a été fournie par la considération d'une solution particulière, comme on peut le voir dans mes Recherches sur la propagation du son. Cependant j'expliquerai cette méthode, toute imparfaite qu'elle puisse paroître encore, peut être qu'elle donnera à d'autres occasion de mieux approfondir les mystères, que ce nouveau genre de calcul intégral renferme.

XVII. Après plusieurs essais j'ai trouvé que l' intégrale de cette équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\beta}{xx} z$ peut être représentée par une telle suite indéfinie :

$$z = Ax^n\Gamma:(x \pm at) + Bx^{n+1}\Gamma':(x \pm at) + Cx^{n+2}\Gamma'':(x \pm at) + Dx^{n+3}\Gamma''':(x \pm at) + \&c.$$

d' où nous tirons d' abord

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = Ax^n\Gamma'':(x \pm at) + Bx^{n+1}\Gamma''':(x \pm at) + Cx^{n+2}\Gamma^{IV}:(x \pm at) + Dx^{n+3}\Gamma^{V}:(x \pm at) + \&c.$$

pour la première partie de l' équation; or pour l' autre nous trouvons

$$\begin{array}{lll}
\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = n(n-1)Ax^{n-2}\Gamma:(x \pm at) & + 2nAx^{n-1}\Gamma':(x \pm at) & + Ax^n\Gamma'':(x \pm at) \\
 & + (n+1)nB & + 2(n+1)B \\
 & & + (n+2)(n+1)C \\
\frac{\beta}{xx} z = \beta A & + \beta B & + \beta C
\end{array}$$

qui devant être égalée à celle-là, nous en tirons les déterminations suivantes

$n(n-1) + \beta = 0$, ou $\beta = -n(n-1)$

$2nA + 2nB = 0$, ou $B = -A$

$2(n+1)\,B + 2\,(2n+1)\,C = 0$, ou $(n+1)\,B + 2\,(n+\frac{1}{2})\,C = 0$
$2(n+2)\,C + 2\,(3n+3)\,D = 0$, ou $(n+2)\,C + 3\,(n+\frac{2}{2})\,D = 0$
$2(n+3)\,D + 2(4n+6)\,E = 0$, ou $(n+3)\,D + 4(n+\frac{3}{2})\,E = 0$
$2(n+4)E + 2(5n+10)\,F = 0$, ou $(n+4)\,E + 5\,(n+\frac{4}{2})\,F = 0$.

XVIII. Voici donc les déterminations de tous nos coéficiens, en ſuppoſant $\beta = -n\,(n-1)$.

$$B = -A$$

$$C = -\frac{(n+1)\,B}{2(n+\frac{1}{2})} = +\frac{(n+1)}{2(n+\frac{1}{2})}\,A$$

$$D = -\frac{(n+2)\,C}{3\,(n+1)} = -\frac{(n+2)}{2.3\,(n+\frac{1}{2})}\,A$$

$$E = -\frac{(n+3)\,D}{4(n+\frac{3}{2})} = +\frac{(n+2)(n+3)}{2.3.4(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}\,A$$

$$F = -\frac{(n+4)\,E}{5\,(n+2)} = -\frac{(n+3)(n+4)}{2.3.4.5\,(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}\,A$$

$$G = -\frac{(n+5)\,F}{6(n+\frac{5}{2})} = +\frac{(n+3)(n+4)(n+5)}{2.3.4.5.6(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})(n+\frac{5}{2})}\,A$$

$$H = -\frac{(n+6)\,G}{7(n+3)} = -\frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{2.3.4.5.6.7\,(n+\frac{1}{2})\,(n+\frac{3}{2})(n+\frac{5}{2})}\,A$$

&c. &c.

XIX. De là nous voions que toutes les fois que n eſt un nombre entier négatif, la ſérie ſuppoſée devient finie, & partant c' eſt dans ces cas, que nous pouvons aſſigner l' intégrale de notre équation. Poſons donc $n = -i$, marquant par i un nombre entier quelconque, & l'équation, dont nous ſommes en état de trouver l'intégrale ſera

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{i(i+1)}{xx}\,z$$

de laquelle il eſt bon de remarquer, que poſant $z = x^{i+1}u$, elle ſe change dans cette forme:

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{2(i+1)}{x}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Or poſant $z = x^{-i}u$ elle ſe transforme dans celle-ci

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2i}{x}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

d' où nous voions que cette forme

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\alpha}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

eſt intégrable toutes les fois, que α eſt un nombre pair, ſoit poſitif, ſoit négatif.

1^r CAS $n = -1$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{2}{xx}z.$$

XX. Puiſque $n = -1$, nous aurons $B = -A$, & les coéficiens ſuivans s'évanoüiront tous, donc l' intégrale de cette équation ſera, en prenant $A = 1$, & partant $B = -1$,

$$z = \frac{1}{x}\Gamma:(x \pm at) - \Gamma':(x \pm at)$$

& tenant compte du ſigne ambigu de la quantité a, l'intégrale compléte ſera exprimée ainſi

$$z = \frac{1}{x}\Gamma:(x - at) - \Gamma':(x - at)$$

$$+ \frac{1}{x}\Delta:(x + at) - \Delta':(x + at)$$

& de la même manière on pourra aiſément trouver les intégrales complétes pour tous les autres cas intégrables. Aiant trouvé les coéficiens de la forme ſuppoſée, on n' a

qu'à résoudre chaque terme en deux, en emploiant pour l'un la forme $x + at$, & pour l'autre la forme $x - at$.

2^{d} CAS $n = -2$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{6}{xx}z.$$

XXI. Aiant toujours $B = -A$ à cause de $n = -2$, nous aurons $C = \frac{1}{3}A$; prenant $A = 3$, & partant $B = -3$, & $C = 1$, l'intégrale compléte de notre équation sera

$$z = \frac{3}{x^2}\Gamma:(x + at) - \frac{3}{x}\Gamma':(x + at) + \Gamma'':(x + at)$$
$$+ \frac{3}{x^2}\Delta:(x - at) - \frac{3}{x}\Delta':(x - at) + \Delta'':(x - at)$$

où Γ & Δ signifient des fonctions quelconques, exprimées par des appliquées de lignes courbes quelconques, tant régulières qu'irrégulières, & puisque ces deux fonctions sont absolument indépendantes l'une de l'autre, c'est en quoi consiste le caractère de la solution compléte.

3^{e} CAS $n = -3$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{12}{xx}z.$$

XXII. Ici le quatrième coéficient D entre aussi dans l'intégral avec les trois précédens, dont voici les valeurs $B = -A, C = -\frac{2}{5}B = \frac{2}{5}A, D = -\frac{1}{6}C = -\frac{1\cdot 2}{5\cdot 6}A$.

Posons

Posons donc pour éviter les fractions
$A = 3 \cdot 5$, $B = - 3 \cdot 5$, $C = 2 \cdot 3$, $D = - 1$
& l'intégrale compléte sera

$$z = \frac{3 \cdot 5}{x^3}\,\Gamma : (x + a\,t) - \frac{3 \cdot 5}{x^2}\,\Gamma' : (x + a\,t)$$
$$+ \frac{2 \cdot 3}{x}\,\Gamma'' : (x + a\,t) - \Gamma''' : (x + a\,t)$$
$$+ \frac{3 \cdot 5}{x^3}\,\Delta : (x - a\,t) - \frac{3 \cdot 5}{x^2}\,\Delta' : (x - a\,t)$$
$$+ \frac{2 \cdot 3}{x}\,\Delta'' : (x - a\,t) - \Delta''' : (x - a\,t)$$

4^e CAS $n = - 4$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{a\,a}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{20}{xx}\,z.$$

XXIII. Ici les coéficiens sont déterminés ainsi ;

$$B = - A,\; C = - \frac{3}{7}\,B = \frac{3}{7}\,A,$$

$$D = - \frac{2}{9}\,C = - \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 9}\,A,\; E = - \frac{1}{10}\,D = \frac{1.2.3}{7.9.10}\,A$$

de sorte qu'en entiers nous aurons
$A = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $B = - 3 \cdot 5 \cdot 7$, $C = 3 \cdot 3 \cdot 5$, $D = - 2 \cdot 5$, $E = 1$
& l'intégrale compléte sera

$$z = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^4}\,\Gamma : (x + a\,t) - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^3}\,\Gamma' : (x + a\,t)$$
$$+ \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{x^2}\,\Gamma'' : (x + at) - \frac{2 \cdot 5}{x}\,\Gamma''' : (x + at) + \Gamma^{\text{IV}} : (x + at)$$
$$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^4}\,\Delta : (x - a\,t) - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^3}\,\Delta' : (x - a\,t)$$
$$+ \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{x^2}\,\Delta'' : (x - at) - \frac{2 \cdot 5}{x}\,\Delta''' : (x - at) + \Delta^{\text{IV}} : (x - at)$$

5^e^ CAS $n = -5$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{30}{xx}z.$$

XXIV. Les coéficiens ſont déterminés de la manière ſuivante

$$B = -A,\ C = -\frac{4}{9}B,\ D = -\frac{3}{12}C,$$
$$E = -\frac{2}{14}D,\ F = -\frac{1}{15}E$$

& prenant $A = 3.5.7.9$, nous aurons

$$A = 3.5.7.9,\ B = -3.5.7.9,\ C = 4.3.5.7,$$
$$D = -3.5.7,\ E = 3.5,\ F = -1$$

& après avoir trouvé ces coéficiens, on n'a qu'à obſerver que l' intégrale compléte ſera

$$z = \frac{A}{x^5}\Gamma:(x + at) + \frac{B}{x^4}\Gamma':(x + at)$$
$$+ \frac{C}{x^3}\Gamma'':(x + at) + \frac{D}{x^2}\Gamma''':(x + at) + \&c.$$
$$+ \frac{A}{x^5}\Delta:(x - at) + \frac{B}{x^4}\Delta':(x - at)$$
$$+ \frac{C}{x^3}\Delta'':(x - at) + \frac{D}{x^2}\Delta''':(x - at) + \&c.$$

6^e^ CAS $n = -6$

Ou intégration de cette équation.

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{42}{xx}z.$$

XXV. Pour les valeurs des coéficiens on aura

$$B = -A,\ C = -\frac{5}{11}B;\ D = -\frac{4}{15}C,$$
$$E = -\frac{3}{18}D,\ F = -\frac{2}{20}E,\ G = -\frac{1}{21}F$$

& prenant $A = 3.5.7.9.11$ les autres feront

$B = -3.6.7.9.11$, $C = +5.3.5.7.9$, $D = -4.5.7.9$, $E = +2.3.5.7$, $F = -3.7$, $G - 1$

d' où l' intégrale compléte devient

$$\zeta = \frac{A}{x^6}\Gamma:(x+at) + \frac{B}{x^5}\Gamma':(x+at)$$
$$+ \frac{C}{x^4}\Gamma'':(x-at) + \frac{D}{x^3}\Gamma''':(x+at) + \&c.$$
$$+ \frac{A}{x^6}\Delta:(x+at) + \frac{B}{x^5}\Delta':(x-at)$$
$$+ \frac{C}{x^4}\Delta'':(x-at) + \frac{D}{x^3}\Delta''':(x-at) + \&c.$$

XXVI. En général pour cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{i(i+1)}{xx}\zeta$$

l' intégrale compléte fera

$$\zeta = \frac{A}{x^i}\Gamma:(x-at) + \frac{B}{x^{i-1}}\Gamma':(x+at)$$
$$+ \frac{C}{x^{i-2}}\Gamma'':(x+at) + \frac{D}{x^{i-3}}\Gamma''':(x+at) + \&c.$$
$$+ \frac{A}{x^i}\Delta:(x-at) + \frac{B}{x^{i-1}}\Delta':(x-at)$$
$$+ \frac{C}{x^{i-2}}\Delta'':(x-at) + \frac{D}{x^{i-3}}\Delta''':(x-at) + \&c.$$

où les coéficiens doivent être déterminés de la manière fuivante

$$B = -A$$
$$C = -\frac{(i-1)B}{2i-1} = +\frac{(i-1)A}{2i-1}$$
$$D = -\frac{(i-2)C}{3i-3} = -\frac{(2i-4)A}{2.3(2i-1)}$$
$$E = -\frac{(i-3)D}{4i-6} = +\frac{(2i-4)(2i-6)A}{2.3.4(2i-1)(2i-3)}$$

$$F = -\frac{(i-4)E}{5i-10} = -\frac{(2i-6)(2i-8)A}{2.3.4.5(2i-1)(2i-3)}$$

$$G = -\frac{(i-5)F}{6i-15} = +\frac{(2i-6)(2i-8)(2i-10)A}{2.3.4.5.6(2i-1)(2i-3)(2i-5)}$$

&c. &c.

XXVII. Pour comprendre mieux la loi de ces coéficiens j'obſerve, qu'on trouve les mêmes coéficiens, en intégrant cette équation différentio-différentielle :

$$\frac{xxddy}{dx^2} + \frac{2xxdy}{dx} - i(i+1)y = 0$$

ſi l'on ſuppoſe l'intégrale exprimée par cette ſérie

$$y = \frac{A}{x^i} + \frac{B}{x^{i-1}} + \frac{C}{x^{i-2}} + \frac{D}{x^{i-3}} + \&c.$$

Or ſi i eſt un nombre entier, cette même équation nous fournit les coéficiens en ordre retrograde, car ſi nous ſuppoſons

$$y = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4} + \frac{F}{x^5} + \&c.$$

nous trouvons

$$B = -\frac{i(i+1)}{2}A$$

$$C = -\frac{(i-1)(i+2)}{4}B = +\frac{i(ii-1)(i+2)}{2\,.\,4}A$$

$$D = -\frac{(i-2)(i+3)}{6}C = -\frac{i(ii-1)(ii-4)(i+3)}{1\,.\,4\,.\,6}A$$

$$E = -\frac{(i-3)(i+4)}{8}D = +\frac{i(ii-1)(ii-4)(ii-9)(i+4)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}A$$

$$F = -\frac{(i-4)(i+5)}{10}E = -\frac{i(ii-1)(ii-4)(ii-9)(ii-16)(i+5)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10}A$$

&c. &c.

XXVIII. Donc ſi nous marquons les fonctions en aſcendant par intégration, de cette maniéré :

$${}'\Gamma : s = \int ds\,\Gamma : s,\ {}''\Gamma : s = \int ds\,{}'\Gamma : s,\ {}'''\Gamma : s = \int ds\,{}''\Gamma : s \quad \&c.$$

l' intégrale de notre équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{i(i+1)}{xx} z$ sera:

$$z = A\Gamma:(x+at) + \frac{B}{x}\,{}'\Gamma:(x+at)$$
$$+ \frac{C}{xx}\,{}''\Gamma:(x+at) + \frac{D}{x^3}\,{}'''\Gamma:(x+at) + \&c.$$
$$+ A\Delta:(x-at) + \frac{B}{x}\,{}'\Delta:(x-at)$$
$$+ \frac{C}{xx}\,{}''\Delta:(x-at) + \frac{D}{x^3}\,{}'''\Delta:(x+at) + \&c.$$

& pour les diverses valeurs de i ces coéficiens seront

i	A	$-$B	$+$C	$-$D	$+$E	$-$F
1	1	$\frac{1.2}{2}$				
2	1	$\frac{2.3}{2}$	$\frac{2.3.4}{2.4}$			
3	1	$\frac{3.4}{2}$	$\frac{3.8.5}{2.4}$	$\frac{3.8.5.6}{2.4.6}$		
4	1	$\frac{4.5}{2}$	$\frac{4.15.6}{2.4}$	$\frac{4.15.12.7}{2.4.6}$	$\frac{4.15.12.7.8}{2.4.6.8}$	
5	1	$\frac{5.6}{2}$	$\frac{5.24.7}{2.4}$	$\frac{5.24.21.8}{2.4.6}$	$\frac{5.24.21.16.9}{2.4.6.8}$	$\frac{5.24.21.16.9.10}{2.4.6.8.10}$
6	1	$\frac{6.7}{2}$	$\frac{6.35.8}{2.4}$	$\frac{6.35.32.9}{2.4.6}$	$\frac{6.35.32.27.10}{2.4.6.8}$	$\frac{6.35.32.27.20.11}{2.4.6.8.10}$
7	1	$\frac{7.8}{2}$	$\frac{7.48.9}{2.4}$	$\frac{7.48.45.10}{2.4.6}$	$\frac{7.48.45.40.11}{2.4.6.8}$	$\frac{7.48.45.40.33.12}{2.4.6.8.10}$
			&c.		&c.	

XXIX. J' observe encore, que l' intégrale de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{n(n+1)}{xx} z$$

se peut exprimer d'une double manière, l'une finie, & l'autre infinie, puisque on peut mettre tant $i = n$ que $i = -n - 1$. Pour rendre l'une & l'autre plus évidente, posons $x + at = p$, & $x - at = q$, & que P marque une fonction quelconque de p, & Q de q; cela posé la première forme sera

$$z = \frac{A}{x^n}(P + Q) + \frac{B}{x^{n-1}}\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right) + \frac{C}{x^{n-2}}\left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right) + \&c.$$

les coéficiens étant déterminés ainsi:

$$B = -A, C = -\frac{2(n-1)}{2(2n-1)}B, D = -\frac{2(n-2)}{3(2n-2)}C,$$
$$E = -\frac{2(n-3)}{4(2n-3)}D, F = -\frac{2(n-4)}{5(2n-4)}E \ \&c.$$

Or l'autre forme est

$$z = Ax^{n+1}(P + Q) + Bx^{n+2}\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right) + Cx^{n+3}\left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right) + \&c.$$

où les coéficiens ont les valeurs suivantes

$$B = -A, C = -\frac{2(n+2)}{2(2n+3)}B, D = -\frac{2(n+3)}{3(2n+5)}C,$$
$$E = -\frac{2(n+4)}{4(2n+5)}D, F = -\frac{2(n+6)}{5(2n+6)}E \ \&c.$$

Il est bien remarquable que ces deux expressions sont équivalentes, & que dans les cas $n = 0$, & $n = -1$, l'une & l'autre devient infinie, & se réduit à $z = P + Q$.

XXX. Puisque cette réduction ne paroit pas d'abord, il est bon de la démontrer. Soit donc $n = 0$, & pour la premieère forme on aura

$$A = 1, B = -1, C = \frac{2}{2}, D = -\frac{2^2}{2.3}, E =$$

$+ \frac{2^3}{2.3.4}$, $F = - \frac{2^4}{2.3.4.5}$ &c.

d' où nous tirons

$$z = 1\,(P + Q) - \frac{x}{1}\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right) + \frac{2\,x^2}{1.2}\left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right)$$
$$- \frac{2\,x^3}{1.2.3.}\left(\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{d^3Q}{dq^3}\right) + \&c.$$

Puiſque chaque membre contient deux termes, ſoit M la ſérie qui contient les termes dépendans de P & N celle qui contient Q, de ſorte que $z = M + N$; maintenant puiſque $P = \Gamma : p = \Gamma : (x + at)$, à cauſe de $p = x + at$, ſi nous poſons $p - 2\,x$ au lieu de x, on aura par la nature des différentiels

$$\Gamma : (p - 2\,x) = P - \frac{2x}{1} \times \frac{dP}{dp} + \frac{2^2x^2}{1.2} \times \frac{ddP}{dp^2}$$
$$- \frac{2^3x^3}{1.2.3} \times \frac{d^3P}{dp^3} + \frac{2^4x^4}{1.2.3.4} \times \frac{d^4P}{dp^4} - \&c.$$

donc, puiſque $M = P - \frac{x}{1} \times \frac{dP}{dp} + \frac{2\,x^2}{1.2} \times \frac{ddP}{dp^2} - \frac{2^2\,x^3}{1.2.3} \times \frac{d^3P}{dp^3} + \&c.$, il eſt évident, que $2\,M - \Gamma : (p - 2x) = P = \Gamma : p$, & partant $M = \frac{1}{2}\,\Gamma : (p + 2\,x) = \frac{1}{2}\,\Gamma : (x + at) + \frac{1}{2}\,\Gamma : (at - x)$. De la même manière on verra que

$$N = \frac{1}{2}\,\Delta : q + \frac{1}{2}\,\Delta : (q - 2\,x) = \frac{1}{2}\,\Delta : (x - at)$$
$$+ \frac{1}{2}\,\Delta : (-at - x)$$, & par conſéquent $z = M + N$ ſe trouve égale à la ſomme de deux fonctions, l' une de $x + at$, & l' autre de $x - at$.

XXXI. L' autre forme posant $n = 0$ donne

$$A = 1\,,\ B = -1\,,\ C = \frac{2}{3}\,,\ D = -\frac{2^2}{3.4}\,,$$

$$E = +\frac{2^3}{3.4.5}\,,\ F = -\frac{2^4}{3.4.5.6}\ \&c.$$

d' où l'on obtient

$$z = x\,(P + Q) - \frac{2x^2}{2.3}\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right) + \frac{2^2x^3}{1.2.3}\left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right) - \frac{2^3x^4}{1.2.3.4}\left(\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{d^3Q}{dq^3}\right) + \&c.$$

Posons $z = M + N$, de sorte que M contienne les termes renfermans P, & N les Q. Considérons à présent la forme $\int P\,dp = \Gamma : p = \Gamma : (x + at)$, & posons $p - 2x$ au lieu de p, pour avoir

$$\Gamma : (p - 2x) = \Gamma : p - \frac{2x}{1} \times P + \frac{2^2x^2}{1.2} \times \frac{dP}{dp} - \frac{2^3x^3}{1.2.3} \times \frac{ddP}{dp^2} + \&c.$$

Or $M = \frac{x}{1}\,P - \frac{2x^2}{1.2} \times \frac{dP}{dp} + \frac{2^2x^3}{1.2.3} \times \frac{ddP}{dp^2} + \&c.$ donc $2M + \Gamma : (p - 2x) = \Gamma : p$ & partant

$$M = \frac{1}{2}\Gamma : p - \frac{1}{2}\Gamma : (p - 2x) = \frac{1}{2}\Gamma : (x + at) - \frac{1}{2}\Gamma : (at - x)$$

& de la même manière on trouve

$$N = \frac{1}{2}\Delta : q - \frac{1}{2}\Delta : (q - 2x) = \frac{1}{2}\Delta : (x - at) - \frac{1}{2}\Delta : (-at - x)$$

d' où il est clair que $z = M + N$ devient comme ci-devant la somme des deux fonctions, l' une de $x + at$, & l' autre de $x - at$. Cette réduction pour le cas le plus simple est très remarquable.

XXXII.

XXXII. Par les mêmes principes on peut prouver l'identité des deux expressions pour les autres cas. Soit $n = 1$, & la première forme donnant $A = 1$ & $B = -1$, l'intégrale est $z = \frac{1}{x}(P + Q) - 1\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right)$.
Or l'autre forme donne ces coéficiens $B = - A$, $C = + \frac{3}{5} A$, $D = - \frac{2.4}{5.6} A$, $E = + \frac{2^2.5}{5.6.7} A$, $F = - \frac{2^3.6}{5.6.7.8} A$ &c.

Posons $A = \frac{2^3}{1.2.3.4}$, pour avoir la forme suivante de l'intégrale, dans laquelle je ne mets que les termes renfermant $P = \Gamma : (x + at)$, puisque la réduction pour les Q est la même :

$$z = \frac{2^3 x^3}{1 \,..\, 4} P - \frac{2^3 x^3}{1 \,..\, 4} \cdot \frac{dP}{dp} + \frac{2^3.3\, x^4}{1 \ldots 5} \cdot \frac{ddP}{dp^2}$$
$$- \frac{2^4.4 x^5}{1 \ldots 6} \cdot \frac{d^3P}{dp^3} + \frac{2^5.5 x^6}{1 \ldots 7} \cdot \frac{d^4P}{dp^4} \;\&c.$$

que je décompose en deux parties, savoir

$$z = \frac{2 x^2}{1.2} P - \frac{2^2 x^3}{1.2.3} \cdot \frac{dP}{dp} + \frac{2^3 x^4}{1 \,..\, 4} \cdot \frac{ddP}{dp^2}$$
$$- \frac{2^4 x^5}{1 \ldots 5} \cdot \frac{d^3P}{dp^3} + \frac{2^5 x^6}{1 \ldots 6} \cdot \frac{d^4P}{dp^4} - \;\&c.$$
$$- \frac{2^2 x^2}{1.2.3} P + \frac{2^3 x^3}{1 \,..\, 4} \cdot \frac{dP}{dp} - \frac{2^4 x^4}{1 \ldots 5.} \cdot \frac{ddP}{dp^2}$$
$$+ \frac{2^5 x^5}{1 \ldots 6} \cdot \frac{d^3P}{dp^3} - \frac{2^6 x^6}{1 \ldots 7} \cdot \frac{d^4P}{dp^4} + \;\&c.$$

pour avoir une telle forme $z = M - N$, où M & N marquent les séries trouvées, qui étant asses régulières, la valeur de l'une & de l'autre se découvrira ainsi.

XXXIII. Pour la première série M, je pose $P = \frac{ddR}{dp^2}$, où R est aussi une fonction de $x + at$, & j'aurai

$$M = \frac{2x}{1.2} \cdot \frac{ddR}{dp^2} - \frac{2^2x^4}{1.2.3} \cdot \frac{d^3R}{dp^3} + \frac{2^3x^5}{1\ldots4} \cdot \frac{d^4R}{dp^4} - \&c.$$

Mais posant $R = \Gamma : p$, il me vient

$$\Gamma : (p - 2x) = R - \frac{2x}{1} \cdot \frac{dR}{dp} + \frac{2^2x^2}{1.2} \cdot \frac{ddR}{dp^2}$$
$$- \frac{2^3x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3R}{dp^3} + \&c.$$

& partant $\Gamma : (p - 2x) = R - \frac{2x}{1} \cdot \frac{dR}{dp} + 2M$, d'où l'on tire la valeur de M, savoir

$$M = \frac{1}{2}\Gamma : (p - 2x) - \frac{1}{2}\Gamma : p + x\Gamma' : p.$$

Pour l'autre série je fais $P = \frac{d^3S}{dp^3}$ pour avoir

$$N = \frac{2^2x^2}{1.2.3} \cdot \frac{d^3S}{dp^3} - \frac{2^3x^3}{1\ldots4} \cdot \frac{d^4S}{dp^4} + \frac{2^4x^4}{1\ldots5} \cdot \frac{d^5S}{dp^5} - \&c.$$

Mais puisque $\frac{d^3S}{dp^3} = \frac{ddR}{dp^2}$, il suit que $\frac{dS}{dp} = R = \Gamma\, p$, donc $S = {}'\Gamma : p$ & ${}'\Gamma : (p - 2x) = S - \frac{2x}{1} \cdot \frac{dS}{dp} + \frac{2^2x^2}{1.2} \cdot \frac{ddS}{dp^2} - \frac{2^3x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3S}{dp^3} + \frac{2^4x^4}{1\ldots4} \cdot \frac{d^4S}{dp^4} - \&c.$ & partant ${}'\Gamma : (p - 2x) = {}'\Gamma : p - 2x\Gamma : p + 2xx\Gamma' : p - 2xN$, de sorte que $N = -\frac{1}{2x}{}'\Gamma : (p - 2x) + \frac{1}{2x}{}'\Gamma : p - \Gamma : p + x\Gamma' : p$, par conséquent $M - N = \frac{1}{2}\Gamma : (p - 2x) + \frac{1}{2x}{}'\Gamma : (p - 2x) + \frac{1}{2}\Gamma : p - \frac{1}{2x}{}'\Gamma : p$, ce qui est la valeur de z.

XXXIV. Puisque $p = x + at$, en doublant les termes, & posant Γ au lieu de ${}'\Gamma$, la partie de l'intégrale, qui renferme la lettre P, se réduit à cette forme

$$z = \Gamma' : (x + at) - \frac{1}{x}\Gamma : (x + at)$$

$$+ \Gamma' : (-x + at) + \frac{1}{x}\Gamma : (-x + at)$$

or la même méthode nous fournit pour les termes Q

$$z = \Delta' : (x - at) - \frac{1}{x}\Delta : (x - at)$$

$$+ \Delta' : (-x - at) + \frac{1}{x}\Delta : (-x - at)$$

& ces deux expreſſions combinées enſemble donnent l'intégrale trouvée par la première forme.

Soit pour cela $\Delta : (-x - at) - \Gamma : (x + at) = P =$ funct. $(x + at = p)$, & la différentiation donnera $-\Delta' : (-x - at) - \Gamma' : (x + at) = \frac{dP}{dp}$; poſant de même $\Gamma : (-x + at) - \Delta : (x - at) = Q =$ funct. $(x - at = q)$, on aura par la différentiation : $-\Gamma' : (-x + at) - \Delta' : (x - at) = \frac{dQ}{dq}$, & de là il eſt clair qu'on aura, comme ci-deſſus :

$$z = \frac{1}{x}(P + Q) - 1\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right).$$

XXXV. Ces réductions que je viens de faire pour les cas $n = 0$ & $n = 1$, peuvent être appliquées avec le même ſuccès à des plus grands nombres pris pour n, mais il eſt aiſé de prevoir, qu'elles deviendront de plus en plus embarraſſantes. Cependant il ſuffit d'avoir fait voir la poſſibilité de réduire la forme infinie de l'intégrale à la finie, dans les cas, où n eſt un nombre entier. Mais pour les cas, où n eſt une fraction, les deux formes trouvées pour l'intégrale dans le §. XXIX. deviennent infinies, & il ne paroit aucun moyen de réduire

l' une ou l' autre à une forme finie. On y rencontre les mêmes difficultés que dans les cas irréſolubles de l' équation de Riccati, & quoique j' aie trouvé moyen de conſtruire ces cas par une méthode tout-à-fait particulière, il ne ſemble point, que cette méthode puiſſe être appliquée aux cas dont il s' agit ici. Mais non obſtant le nombre infini des termes, dont les intégrales de ces cas ſont composées, elles ne ſont pas moins complétes, puiſqu'elles renferment deux fonctions abſolument indéterminées & arbitraires.

XXXVI. Or pour trouver plus facilement les intégrales complétes de cette équation :

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{n(n+1)}{xx}z$$

qu'on poſe $x + at = p$ & $x - at = q$, enſuite ſoit P une fonction quelconque de p, & Q une fonction quelconque de q, qu'on faſſe outre cela pour abreger :

$P' = \int P dp$, $P'' = \int P' dp$, $P''' = \int P'' dp$, $P^{IV} = \int P''' dp$ &c.

$Q' = \int Q dq$, $Q'' = \int Q' dq$, $Q''' = \int Q'' dq$, $Q^{IV} = \int Q''' dq$ &c.

toutes ces valeurs pouvant aiſément être repréſentées par des quadratures de lignes courbes, enfin qu'on forme les coéficiens ſuivans

$$A = +1$$

$$B = +\frac{n(n+1)}{2}$$

$$C = +\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4}$$

$$D = +\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$E = +\frac{(n-3)(n-2) \ldots\ldots\ldots (r+4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$$

$$F = +\frac{(n-4)(n-3) \ldots\ldots\ldots (n+5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}$$

&c.

& l'intégrale cherchée sera

$$z = A(P+Q) - \frac{B}{x}(P'+Q') + \frac{C}{xx}(P''+Q'')$$
$$- \frac{D}{x^3}(P'''+Q''') + \&c.$$

XXXVII. Aiant trouvé cette intégrale ou valeur de z, on aura aussi les intégrales de toutes les équations qui en sont transfermées, comme posant $z = x^{-m} u$, à cause de $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = x^{-m}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)$ &

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = x^{-m}\left(\frac{du}{dx}\right) - m x^{-m-1} u$$
$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = x^{-m}\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - 2m x^{-m-1}\left(\frac{du}{dx}\right) + m(m+1)x^{-m-2}u$$

l'équation transformée sera:

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-n)(m+n+1)}{xx}u$$

& partant son intégrale sera :

$$u = Ax^m(P+Q) - Bx^{m-1}(P'+Q')$$
$$+ Cx^{m-2}(P''+Q'') - Dx^{m-3}(P'''+Q'''). \&c.$$

XXXVIII. Développons les cas les plus simples de cette équation généralisée, en conservant les mêmes significations $p = x + at$ & $q = x - at$, & des fonctions qui en sont formées P, P', P'', P''' &c. Q, Q', Q'', Q''' &c.

1° $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{m(m+1)}{xx}u$

l'intégrale est : $u = x^m(P+Q)$

2° $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-1)(m+2)}{xx}u$

l'intégrale: $u = x^m(P+Q) - \frac{1.2}{2}x^{m-1}(P'+Q')$

3° $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-2)(m+3)}{xx}u$

dont l'intégrale est

$$u = x^m (P + Q) - \frac{2.3}{2} x^{m-1} (P' + Q') + \frac{1.2.3.4}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'').$$

4° $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-3)(m+4)}{xx} u$
dont l' intégrale eſt

$$u = x^m (P + Q) - \frac{3.4}{2} x^{m-1} (P' + Q') + \frac{2.3.4.5}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'') - \frac{1.2.3.4.5.6}{2.4.6} x^{m-3} (P''' + Q''')$$

5° $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-4)(m+5)}{xx} u$
dont l' intégrale

$$u = x^m (P + Q) - \frac{4.5}{2} x^{m-1} (P' + Q') + \frac{3.4.5.6}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'') - \frac{2.3.4.5.6.7}{2.4.6} x^{-3} (P''' + Q''') + \frac{2.3.4.5.6.7.8}{2.4.6.8} x^{m-4} (P^{\text{IV}} + Q^{\text{IV}}).$$

6° $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-5)(m+6)}{xx} u$
dont l' intégrale

$$u = x^m (P + Q) - \frac{5.6}{2} x^{m-1} (P' + Q') + \frac{4.5.6.7}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'') - \frac{3.4.5.6.7.8}{2.4.6} x^{m-3} (P''' + Q''') + \frac{2.3.4.5.6.7.8.9}{2.4.6.8} x^{m-4} (P^{\text{IV}} + Q^{\text{IV}}) - \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{2.4.6.8.10} x^{m-5} (P^{\text{V}} + Q^{\text{V}}).$$

XXXIX. Juſqu'ici je n' ai donné que les intégrales pour les cas de l' équation propoſée qui en ſont ſuſceptibles, ſans y avoir été conduit par une méthode certaine, &

directe, car toute l'analise dont je me suis servi est uniquement fondée sur une heureuse conjecture, qui regarde la forme de ces intégrales, & que le pur hazard m' a quasi fournie. Il est donc d' autant plus important de découvrir une méthode directe, qui nous puisse mener au même but, qu'il n'y a aucun doute, qu'une telle méthode n'apporte de très-grands éclaircissemens dans cette nouvelle carrière; or la considération de ces intégrales nous porte aisément à penser, qu'il doit y avoir une méthode, qui, moyennant une certaine transformation conduise des cas plus simples aux plus compliqués, de la même manière que dans le développement de la fameuse équation de Riccati on a réussi à déduire les cas plus difficiles des plus simples, en y employant une certaine substitution. C' est donc par une semblable méthode, que je m'en vais enseigner la résolution de l' équation, que j'ai traitée jusqu'ici.

XL. L' équation proposée étant donc:

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{k}{xx}z$$

je la transforme par le moyen de cette substitution:

$$u = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x}z$$

en cherchant une équation, qui détermine la fonction u par t & x; or il est aisé de prevoir, que l' équation transformée aura une telle forme

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{k'}{xx}u$$

semblable à la proposée, avec cette seule différence que le nombre k' sera différent du nombre k; ou bien sans supposer une telle prévoyance, on peut regarder cette dernière équation comme la proposée, & introduire z à la place de u par la substitution indiquée.

XLI. Supposant donc $u = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x}z$, on en tire

d' abord

$$\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dt^2\,dx}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

Or la première équation donnant

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{aak}{xx}z$$

ſi nous différentions par la ſeule variabilité de x, nous aurons :

$$\left(\frac{d^3z}{dt^2\,dx}\right) = aa\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) - \frac{aak}{xx}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{2aak}{x^3}z$$

d' où nous tirons :

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{k}{xx}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{(m-2)k}{x^3}z.$$

Maintenant la même ſubſtitution donne :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{m}{xx}z$$

& de là

$$\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{2m}{xx}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{2m}{x^3}z;$$

$$\text{or } -\frac{k'}{xx}u = -\frac{k'}{xx}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{mk'}{x^3}z$$

& partant ces deux dernières expreſſions enſemble doivent être égales à celle, qui vient d' être trouvée pour $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)$.

XLII. Puiſque les termes $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$ & $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ ſe détruiſent d'eux mêmes, il ne reſte qu'à égaler ſéparément ceux qui ſont affectés par $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ & par z, d'où nous tirons ces deux égalités $-k = -2m - k'$ & $-(m-2)k = 2m - mk'$, ou $m = \frac{k-k'}{2}$, & $2k = m(k - k' + 2)$ donc $(k - k')^2 - 2k - 2k' = 0$, & partant

$k' =$

$k' = k + 1 \pm \surd(1 + 4k)$, & $m = \frac{-1 \mp \surd(1+4k)}{2}$

Par conséquent si nous avons réussi à trouver l'intégrale de cette équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{k}{xx} z$, nous aurons aussi l'intégrale de celle-ci : $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{k'}{xx} u$ posant $k' = k + 1 \pm \surd(1 + 4k)$, puisque $u = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{k - k'}{2x} z$.

XLIII. Or aiant assigné ci-dessus, indépendamment de ces recherches, l'intégrale de notre équation pour le cas $k = 0$, cette nouvelle méthode nous fournit l'intégrale pour le cas $k' = 2$, & supposant ensuite $k = 2$, nous en tirons le troisiéme cas $k' = 3 + \surd 9 = 6$, & celui-ci, posant $k = 6$, nous conduit au quatriéme $k' = 7 + \surd 25 = 12$, lequel, en faisant $k = 12$, nous méne au cinquiéme $k' = 13 + \surd 49 = 20$, & ainsi de suite selon cette progression :

k	0	2	6	12	20	30	42	&c.
k'	2	6	12	20	30	42	56	&c.

d'où l'on voit que toutes les valeurs de k sont comprises dans cette formule générale $k = i(i + 1)$, & ce cas considéré en général nous conduit au suivant $k' = i(i + 1) + 1 + \surd[1 + 4i(i + 1)] = ii + 3i + 2 = (i + 1)(i + 2)$, d'où nous tirons tous les cas dont j'ai assigné ci-dessus les integrales.

XLIV. Donc si nous connoissons, pour le cas $k = n(n + 1)$ l'intégrale de cette équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{n(n+1)}{xx} z$, qui soit $z = V$, nous en tirerons, pour le cas $k' = (n + 1)(n + 2)$ l'intégrale de celle-ci :

$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{(n+1)(n+2)}{xx}z$, qui sera $z = \left(\frac{dV}{dx}\right) - \frac{(n+1)}{x}V$, ou bien, puiſqu'on peut multiplier la valeur de z par une conſtante quelconque, cette dernière intégrale peut être exprimée ainſi: $z = \frac{1}{x}V - \frac{1}{n+1}\left(\frac{dV}{dx}\right)$. Par conſéquent, puiſque pour le cas, $k = 0$, l'intégrale eſt $z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$, en écrivant S pour cette double fonction, nous aurons pour l'équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{k}{xx}z$$

les intégrales ſuivantes:

ſi	
$k = 0$	$z = S$
$k = 1.2$	$z = \frac{1}{x}S - \left(\frac{dS}{dx}\right)$
$k = 2.3$	$z = \frac{3}{2x^2}S - \frac{3}{2x}\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right)$
$k = 3.4$	$z = \frac{5}{2x^3}S - \frac{5}{2x^2}\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) - \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right)$
&c.	&c.

XLV. Soit, pour le cas $k = n(n+1)$, l'intégrale:

$$z = \frac{A}{x^n}S - \frac{B}{x^{n-1}}\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{C}{x^{n-2}}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right)$$
$$- \frac{D}{x^{n-3}}\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right) + \frac{E}{x^{n-4}}\left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) - \text{\&c.}$$

& pour le cas $k = n(n+1)(n+2)$, à cauſe de $z = \left(\frac{dV}{dx}\right) - \frac{(n+1)}{x}V$, nous aurons:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = -\frac{nA}{x^{n+1}}S + \frac{A}{x^n}\left(\frac{dS}{dx}\right) - \frac{B}{x^{n-1}}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right)$$
$$+ \frac{(n-1)B}{x^n} - \frac{(n-2)C}{x^{n-1}}$$

$$+ \frac{C}{x^{n-2}} \left(\frac{d^3 S}{d x^3}\right) - \&c.$$

$$+ \frac{(n-3)D}{x^{n-2}} \qquad - \&c.$$

$$-\frac{(n+1)}{x} V = -\frac{(n+1)A}{x^{n+1}} S + \frac{(n+1)B}{x^n} \left(\frac{dS}{dx}\right)$$

$$-\frac{(n+1)C}{x^{n-1}} \left(\frac{ddS}{dx^2}\right) + \frac{(n+1)D}{x^{n-2}} \left(\frac{d^3 S}{dx^3}\right) - \&c.$$

& partant l'intégrale pour le cas $k = (n+1)(n+2)$ en changeant les ſignes ſera :

$$z = \frac{(2n+1)A}{x^{n+1}} S - \frac{(A+2nB)}{x^n} \left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{(B+[2n-1]C)}{x^{n-1}}$$
$$\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) - \frac{(C+[2n-2]D)}{x^{n-2}} \left(\frac{d^3 S}{dx^3}\right) + \&c.$$

& il eſt évident que cette méthode nous fournit les mêmes intégrales que la précédente ; quoique les valeurs pour chaque nombre n ne paroiſſent point ſi ouvertement, cependant une légère attention nous découvrira bientôt la même loi de progreſſion entre les coéficiens A, B, C, D &c. qui a été trouvée ci-deſſus.

RECHERCHES

Sur la construction des nouvelles Lunettes à 5 & 6 verres & leur perfection ultérieure

PAR M. EULER.

I. DEPUIS quelque tems cette espèce de Lunettes est devenue fort commune, & l'emporte beaucoup sur les Lunettes à 4 verres, dont on s'étoit servi jusqu'ici pour représenter les objets debout. L'invention de ces nouvelles Lunettes est apparemment dûe au célèbre M. Dollond, qui semble avoir porté l'art de polir les verres presque au plus haut dégré de perfection, dont il est susceptible. Aussi les avantages de ces nouvelles Lunettes sur les ordinaires à 4 verres sont ils très-considérables: elles présentent les objets plus nettement, elles découvrent un plus grand champ, & pour le même grossissement elles ne sont pas si longues que les ordinaires.

II. D'abord je me suis imaginé que ces Lunettes étoient construites sur le même principe que les ordinaires, qu'on peut regarder comme deux Lunettes astronomiques jointes ensemble, & que l'artiste y avoit adroitement ajouté un cinquiéme & même un sixiéme verre, tant pour augmenter le champ apparent, que pour délivrer des couleurs d'iris la représentation des objets. Mais aiant examiné quelques unes de ces Lunettes, j'ai remarqué que l'arrangement des verres est fondé sur un principe tout-à-fait différent, & en particulier on y trouve une lentille, dont l'ouverture est beaucoup plus petite que dans les ordinaires, sans que le champ apparent en souffre la moindre diminution. Cette petite lentille constitue quasi l'essence de

ces nouvelles Lunettes, en les distinguant de toutes les autres dont on s' est servi jusqu'ici.

III. Le principe sur lequel ces Lunettes sont fondées, consiste dans une disposition toute particulière des deux verres du milieu, qu' il faut bien distinguer tant de l'objectif que des oculaires. L'objectif étant placé en A (*fig.* 1. *pl.* 3.), on met le second verre QQ à peu près dans le foyer de l' objectif (je supposerai ici qu'il s' y trouve exactement, puisque cette situation ne cause aucune confusion); ensuite considérant l' objectif PAP comme un vrai objet qu'on marque le lieu C ou son image tomberoit par le second verre QQ, & c' est précisément ici qu'il faut placer le troisième verre RR; d' où l' on voit que son ouverture est déterminée uniquement par celle de l' objectif, de sorte que $RR = \frac{BC}{AB} \cdot PP$, & puisque la distance BC est ordinairement très-petite à l' égard de AB, c'est la raison pourquoi l'ouverture de ce troisième verre est si petite, en quoi consiste le caractère de ces Lunettes.

IV. Après ces trois verres en A, B, & C, on peut employer un ou deux, ou plusieurs oculaires pour gagner un champ apparent d' autant plus grand; car si l' on ne se servoit que d'un seul oculaire SDS le champ seroit au dessous des Lunettes ordinaires, & cependant comme ce cas renferme le fondement des suivans, il sera bon de le développer.

Soit donc p la distance de foyer de l' objectif, & x le demi-diamétre de son ouverture, & que pour les autres verres les distances de foyer soient exprimées par les lettres q, r, s, & les demi-diamètre de leurs ouvertures par πq, $\pi' r$, $\pi'' s$, entant que le champ apparent en dépend. Ensuite pour les nombres B, C, D de mes formules générales expliquées dans le XIII. Volume des Mém. de l'Acad. de Berlin, puisque le verre B est placé au foyer de l'obje-

ctif, nous aurons $B = -1$ & $\mathrm{B} = \infty$, pour le troisiéme verre posons $C = \frac{c}{1-c}$, & partant $\mathrm{C} = c$, or le quatriéme verre étant l'oculaire, donne $D = \infty$, & $\mathrm{D} = 1$.

V. Maintenant, puisque les objets doivent être présentés debout, soit $m : 1$ le raport du grossissement selon le diamètre, & posant le demi-diamètre du champ apparent $= \varphi$ nous aurons d'abord $\varphi = -\frac{\pi + \pi' - \pi''}{m-1}$, où je remarque que si l'on fait l'oculaire également convexe des deux côtés, on peut prendre $\pi'' = -\frac{1}{4}$, de sorte que le diamètre de son ouverture soit égal à la moitié de sa distance de foyer. Or pour rendre les déterminations plus générales, au lieu de la fraction $\frac{1}{2}$, qui répond à la plus grande ouverture, j'écrirai ω, & je poserai $\pi'' = -\omega$. Pour la lettre π', puisque l'ouverture du troisième verre n'influe point sur le champ, j'aurai $\pi' = 0$, & la lettre π ne pouvant être prise négative, je mettrai $\pi = \beta\omega$, où il faut prendre β aussi petite que les circonstances le permettent. De là nous aurons $\varphi = \frac{1-\beta}{m-1}\omega$, & posant pour abreger $\frac{1-\beta}{m-1} = M$, cette expression $\varphi = M\omega$.

VI. Aiant établi ces élémens, je tire de mes formules générales, à cause de
$\mathrm{B}\pi - \varphi = \infty\pi$, $\mathrm{C}\pi' - \pi\varphi = -(\beta - M)\omega$, & $\pi'' - \pi' + \pi - \varphi = -(1 - \beta + M)\omega$, tant pour les distances de foyer de nos verres, que pour leurs intervalles les valeurs suivantes :

$$q = \frac{B\varphi}{B\pi - \varphi} p = \frac{M}{\beta} p$$

$$r = \frac{BC\varphi}{-(\beta - M)\omega} p = \frac{cM}{\beta - M} p$$

$$s = \frac{BC\varphi}{-(1 - \beta + M)\omega} p = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{M}{1 - \beta + M} p,$$

$$AB = \frac{B\pi}{B\pi - \varphi} p = p$$

$$BC = \frac{\varphi B\pi}{B\pi(\beta - M)\omega} p = \frac{M}{\beta - M} p$$

$$CD = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{M}{(\beta - M)(1 - \beta + M)} p$$

& pour le lieu de l'œil, la diſtance $DO = \frac{s}{1 - \beta + M}$. Or la formule, qui ſert à détruire les couleurs d' iris, ne ſauroit être remplie, puiſqu'il faudroit qu'il fût $\frac{1}{1 - \beta + M} = 0$, & partant ce ſera un grand défaut de cette première eſpèce de Lunettes.

VII. Or l'autre défaut, par raport au champ apparent, eſt encore plus conſidérable, ſon demi-diamètre $\varphi = \frac{1 - \beta}{m - 1} \omega$ étant encore plus petit que dans les Lunettes aſtronomiques ordinaires; car non ſeulement le nombre β ne ſauroit évanoüir, mais il faut qu'il ſoit plus grand que M. Poſons donc $\beta = (1 + n) M$, & puiſque $1 - \beta = (m - 1) M$, nous aurons $M = \frac{1}{m + n}$, & partant $\varphi = M\omega = \frac{\omega}{m + n}$, & enſuite les autres déterminations:

$$q = \frac{1}{1 + n} p, \qquad AB = p$$

$$r = \frac{c}{n} p, \qquad BC = \frac{1}{n} p$$

$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{M}{1-nM} p$, $CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{n(1-nM)} p$,

ou $t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{m} p$, ou $CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{m+n}{nm} p$.

& pour le lieu de l' œil $DO = \frac{s}{1-nM} = \frac{m+n}{m} s$.

VIII. Si nous considérons les distances de foyer des trois premiers verres p, q, r, avec le grossissement m, comme données, nous en aurons $n = \frac{p-q}{q}$ & $c = \frac{(p-q)r}{pq}$, d'où le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi = \frac{q\omega}{mq+p-q}$, qui ne dépend donc point du troisiéme verre en C. Mais pour l'oculaire en D sa distance de foyer doit être $s = \frac{(p-q)r}{pq-(p-q)r} \cdot \frac{p}{m}$, & les intervalles entre les verres, $AB = p$, $BC = \frac{pq}{p-q}$, $CD = \frac{r(mq+p-q)}{m(pq-(p-q)r)} p = s\left(\frac{mq}{p-q} + 1\right)$. Cet arrangement des verres nous fournit donc la commodité que, quand même on pourroit donner à p une valeur très-petite, on pourroit se servir d' un oculaire, dont la distance de foyer fût aussi grande qu'on voudra.

IX. Pour rendre cet avantage plus sensible, soit la distance de foyer de l' oculaire donnée, $s = k$, & puisque $\frac{c}{1-c} = \frac{mk}{p}$, nous aurons $c = \frac{mk}{mk+p}$, d' où les déterminations de la Lunette seront les suivantes :

Dist. de foyer du verre	Intervalles entre les verres
en $A = p$	$AB = p$
en $B = q = \frac{1}{1+n} p$	$BC = \frac{1}{n} p$

Dist. de foyer du verre	Intervalles entre les verres
en $C = r = \frac{mkp}{n(mk+p)}$	$CD = \frac{m+n}{n} k$
en $D = s = k$	$DO = \frac{m+n}{m} k$

où le nombre n eſt encore indéterminé ; mais puiſque nous avons pour le champ apparent $\varphi = \frac{\omega}{m+n}$, il eſt bon de prendre n auſſi petit qu'il eſt poſſible ; or on voit qu'en diminuant trop le nombre n, la longueur de la Lunette deviendroit exceſſive, défaut qu'on a encore plus de raiſons d' éviter, que la petiteſſe du champ apparent.

X. Conſidérons auſſi l' ouverture de chaque verre, & pour l'objectif le demi-diamètre de ſon ouverture x ſe détermine par le groſſiſſement, en prenant $x = \frac{m}{60}$ pouces ou bien $x = \frac{m}{50}$ pouces, ſi l' on craint que la pluralité des verres ne nuiſe à la clarté. Pour le ſecond verre QBQ, le demi-diamètre de ſon ouverture doit être $BQ = \beta \omega q = M \omega p = \frac{\omega}{m+n} p$. Pour le troiſiéme verre RCR, il faut avoir uniquement égard à l' ouverture de l' objectif, dont le demi-diamètre étant $AP = x$, nous aurons $CR = \frac{BC}{AB} x = \frac{x}{n}$, d' où l' on comprend la raiſon, pourquoi ce verre ſouffre une ſi petite ouverture. Mais au verre oculaire il faut donner la plus grande ouverture dont il eſt ſuſceptible, ſon demi-diamètre étant $DS = \omega k$ ou bien $\frac{1}{4} k$.

XI. Il eſt auſſi important de déterminer conformément à mes expreſſions générales la confuſion qui réſulte de tous

nos quatre verres, où leur figure indiquée par les nombres $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ entre principalement en confidération. Puifque donc $B = -1$, $C = \frac{c}{1-c}$, $C\pi' - \pi + \phi = -(\beta - M)\omega = -n\phi$, on voit que le fecond verre ne caufe aucune confufion; or de tous les autres enfemble réfulte cette expreffion :

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{\lambda'' + \nu c(1-c)}{n c^3} + \frac{\lambda'''(1-c)^3}{m c^3}\right)$$

qui ne doit pas excéder la valeur de $\frac{\mu}{4x^3}$, prenant x entre 40 & 50. Il faut donc qu'il foit

$$\frac{mx^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{\lambda'' + \nu c(1-c)}{n c^3} + \frac{\lambda'''(1-c^3}{m c^3}\right) < \frac{1}{x^3}$$

ou, puifque $\frac{c}{1-c} = \frac{mk}{p}$, & $c = \frac{mk}{mk+p}$, nous aurons:

$$\frac{mx^3}{p^3}\left(\lambda + \frac{\lambda''(mk+p)^3}{n m^3 k^3} + \frac{\nu p(mk+p)}{n m m k k} + \frac{\lambda''' p^3}{m^3 k^3}\right) < \frac{1}{x^3}$$

XII. De là nons voyons que plus on prend petit le nombre n plus la confufion fera augmentée, ce qui eft un nouveau motif de prendre toujours $n > 1$. Enfuite comme le fecond verre n' affecte point la confufion, on le fera également convexe des deux côtés, pourqu'il admette l'ouverture que je viens de lui affigner, fur tout quand j'emploierai plufieurs oculaires. Or pour le troifiéme verre, comme il ne demande prefque point d' ouverture, il fera bon de prendre $\lambda'' = 1$, & puifque fa diftance de foyer eft $= r$, & $C = c$, il faudra faire les rayons

de la face d' avant $= \frac{r}{\rho c + \sigma(1-c)}$

de la face de derrière $= \frac{r}{\sigma c + \rho(1-c)}$

où les nombres ρ & σ de même que le nombre ν dépendent de la raifon de réfraction, comme je l'ai expliqué ailleurs. Mais

pour l'oculaire *SDS*, on voit qu'en augmentant k audelà de $\frac{p}{m}$, la confuſion qui en réſulte, ne ſera d'aucune conſéquence.

XIII. Je ne m' arrêterai pas à développer cette eſpèce de teleſcopes, puiſqu'elle eſt aſſujettie à ces deux très-grands défauts, que premiérement le champ apparent eſt très-peu conſidérable, étant moindre que dans les Lunettes ordinaires compoſées des deux convexes, & en ſecond lieu parcequ'elle n' eſt pas délivrée de l'apparition des couleurs d' iris. Auſſi M. Dollond n' en a point fait, autant que je ſache, & ſi l' on veut des Lunettes qui n' aient pas plus de verres que quatre, on fera mieux de ſuivre la conſtruction ordinaire. Cependant cette première eſpèce me ſervira de baſe, pour en déduire les eſpèces ſuivantes, qui ne différent de celle-ci que par le nombre des verres oculaires. C'eſt de cette ſource qu'on peut non ſeulement amplifier le champ apparent, mais auſſi détruire les couleurs d' iris, & par là procurer à ces Lunettes les avantages, qui les ont rendues ſi recommendables; je tâcherai ſur tout de porter ces avantages au plus haut dégré de perfection, dont ils ſont ſuſceptibles.

XIV. Mais auparavant il eſt néceſſaire de donner un bon conſeil pour faire mieux réuſſir l' exécution de ces Lunettes. C' eſt au ſujet du troiſiéme verre *RCR* dont la confuſion eſt ſi grande, qu'elle pourroit bien ſurpaſſer celle de l'objectif même, & partant obliger d'étendre la diſtance de foyer de l' objectif bien audelà des bornes, que la conſtruction des Lunettes ordinaires preſcrit, ce qui allongeroit très-conſidérablement cette eſpèce de Lunettes; & puiſqu'alors la quantité p devroit ſurpaſſer mk, la confuſion qui en réſulte deviendroit encore plus conſidérable, ſans qu'il fût à propos d'y remédier par l'augmentation du nombre n, ce qui retreciroit trop le champ apparent. Il

faut donc penſer à remédier à cet inconvénient d'une autre manière, qui puiſſe même contribuer à rendre ces Lunettes plus commodes.

XV. Pour cet effet je ne crois pas qu'il y ait un meilleur moyen que de doubler ce verre *RCR*, ou de le compoſer de deux verres immédiatement joints enſemble, ce qui ſe pourra exécuter d'autant plus aiſément, puiſque ce verre eſt très-petit, & que ſon épaiſſeur ne s'oppoſe pas à une telle jonction. Aiant donc déterminé la diſtance de foyer *r* que ce verre doit avoir, les deux verres dont il ſera bon de le compoſer, doivent être formés ſelon les meſures ſuivantes.

Du premier verre qui regarde l'objectif

le rayon de la face { d'avant $= 0,7481\,r$
de derrière $= 1,0225\,r$

De l'autre verre qui regarde l'œil

le rayon de la face { d'avant $= -0,5088\,r$
de derrière $= +0,6657\,r$

Ces deux verres étant joints enſemble laiſſeront un petit vuide entr'eux (*fig.* 2.), & on les pourra regarder comme un ſeul verre, dont la confuſion ſera inſenſible.

XVI. Aiant détruit de cette manière, ou au moins rendu inſenſible la confuſion, qui ſeroit à craindre de la part de ce troiſiéme verre, on pourra avec d'autant plus de ſuccès remédier à toute la confuſion cauſée par l'objectif, & tous les autres verres enſemble. On n'a qu'à compoſer l'objectif auſſi de deux verres, dont voici la conſtruction, la diſtance de foyer devant être $= p$

Du premier verre

le rayon de la face { d'avant $= 0,51467\,p$
de derrière $= 4,05851\,p$

De l'autre verre

le rayon de la face { de devant $= -0,59340\,p$
de derrière $= +0,74127\,p$

On mettra entre ces deux verres une telle diſtance, à déterminer par l'expérience, que l'on s'apperçoive le moins de toute confuſion. Quand cette conſtruction réuſſit bien, on pourra, peut être, prendre $p = \frac{m}{4}$ pouces ou encore plus petite, ce qui racourciroit très-conſidérablement ces Lunettes.

De Lunettes de cette eſpèce à 5 verres.

XVII. Ces Lunettes ne différent des précédentes, que parceque j'emploie ici deux verres oculaires, tant pour augmenter le champ apparent, que pour faire évanoüir les couleurs d'iris, dont la repréſentation des objets pourroit être troublée. Enſuite je nomme ces Lunettes à cinq verres, quand même on auroit doublé tant l'objectif que le troiſiéme petit verre RCR, puiſque cette duplication n'empêche pas qu'on ne puiſſe regarder dans le calcul ces verres comme ſimples. Mais quand il s'agit de fixer la diſtance de foyer l'objectif, que je nomme $= p$, & à laquelle l'intervalle des verres AB eſt toujours égale, il y faut faire attention à cauſe de la confuſion, qui pourroit réſulter de tous les verres. Car plus on réuſſit à diminuer cette confuſion, plus peut-on prendre petite la diſtance de foyer de l'objectif, laquelle doit pourtant être toujours au moins plus de quatre fois plus grande que le diamètre de ſon ouverture qui ſe détermine par le groſſiſſement exprimé par la lettre m.

XVIII. Poſant donc le lettres p, q, r, s & t pour les diſtances de foyer de nos 5 verres, ſoient les demidiamètres de leurs ouvertures:
$AP = x$, $BQ = \pi q$, $CR = \pi' r$, $DS = \pi'' s$ & $ET = \pi''' t$, & le demi-diamètre du champ apparent $= \varphi$. Cela poſé, puiſque le groſſiſſement eſt $= m$, & que les objets doi-

vent être repréſentés debout, mes formules générales me fourniſſent cette équation $\varphi = - \frac{\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m - 1}$; où comme j'ai remarqué cy-deſſus, la lettre π doit avoir une valeur poſitive $< \omega$, & $\pi = 0$. Donc pour rendre le champ auſſi grand qu'il eſt poſſible, je poſerai $\pi = \beta\omega$, $\pi' = 0$, $\pi'' = -\omega$, & $\pi''' = \omega$, pour avoir $\varphi = \frac{2 - \beta}{m - 1}\omega$, ou $\varphi = M\omega$, en poſant $M = \frac{2 - \beta}{m - 1}$.

XIX. Soient enſuite les nombres, qui déterminent dans mes formules tant les diſtances de foyer, que les intervalles des verres :

$$B = -1,\ C = \frac{c}{1 - c},\ D = -\frac{d}{1 + d},\ E = \infty$$

$$\mathfrak{B} = \infty,\ \mathfrak{C} = c,\ \mathfrak{D} = -d,\ \mathfrak{E} = 1$$

d'où nous tirons d'abord les valeurs ſuivantes :

$$\mathfrak{B}\pi - \varphi = \infty\beta\omega$$

$$\mathfrak{C}\pi' - \pi + \varphi = -(\beta - M)\omega$$

$$\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \varphi = +(d + \beta - M)\omega$$

$$\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = +(2 - \beta + M)\omega$$

& de là les diſtances de foyer avec les intervalles des verres :

$$q = \frac{M}{\beta}p$$

$$r = \frac{M}{\beta - M}p$$

$$s = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{dM}{d + \beta - M}p$$

$$t = \frac{cd}{(1 - c)(1 + d)} \cdot \frac{M}{2 - \beta + M}p$$

$$AB = p$$

$$BC = \frac{M}{\beta - M}p$$

$$CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{dM}{(\beta - M)(d + \beta - M)} p$$

$$DE = \frac{cd}{(1-c)(1+d)} \cdot \frac{(d+2)M}{(d+\beta - M)(2-\beta+M)} p$$

& pour le lieu de l'œil la diſtance $EO = \frac{t}{2-\beta+M}$.

XX. Pour abreger ces expreſſions, poſons $\beta = (n+1)M$, puiſqu'il faut néceſſairement qu'il ſoit $\beta > M$, ce qui fournit $M = \frac{2}{m+n}$, & partant le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{2}{m+n}\omega$, qui eſt le double du cas précédent, en donnant au nombre n la même valeur. Or nos formules deviendront :

$$q = \frac{1}{n+1} p$$

$$r = \frac{c}{n} p$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{dM}{d+nM} p$$

$$t = \frac{cd}{(1-c)(1+d)} \cdot \frac{M}{2-nM} p$$

$$AB = p$$

$$BC = \frac{1}{n} p$$

$$CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{n(d+nM)} p$$

$$DE = \frac{cd}{(1-c)(1+d)} \cdot \frac{(d+2)}{(d+nM)(2-nM)} p$$

& pour le lieu de l'œil $EO = \frac{t}{2-nM} = \frac{t}{mM}$, où les trois quantités c, d & n ſeroient arbitraires.

XXI. Mais il faut à cette heure tenir compte des couleurs d'iris, qui évanoüiront en satisfaisant à cette équation:

$$\frac{\pi}{B\pi - \varphi} + \frac{\pi'}{C\pi' - \pi + \varphi} + \frac{\pi''}{D\pi'' - \pi' + \pi - \varphi} + \frac{\pi'''}{E\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi} = 0$$

qui pour le cas présent se réduit à celle-ci :

$$-\frac{1}{d + nM} + \frac{1}{2 - nM} = 0$$

d'où nous trouvons $d = 2 - 2nM$ & $d + 2 = 2(2 - nM)$, & en substituant pour M sa valeur $\frac{2}{m+n}$, nous aurons $2 - nM = d + nM = \frac{2m}{m+n}$, $d = \frac{2(m-n)}{m+n}$ & $d + 2 = \frac{4m}{m+n}$, & partant:

$$q = \frac{1}{n+1}p \qquad AB = p$$

$$r = \frac{c}{n}p \qquad BC = \frac{1}{n}p$$

$$s = \frac{c}{1-c}\cdot\frac{2(m-n)}{m+n}\cdot\frac{p}{m}, \quad CD = \frac{c}{1-c}\cdot\frac{m-n}{n}\cdot\frac{p}{m}$$

$$t = \frac{c}{1-c}\cdot\frac{2(m-n)}{3m-n}\cdot\frac{p}{m}, \quad DE = \frac{c}{1-c}\cdot\frac{4(m-n)}{3m-n}\cdot\frac{p}{m}$$

& pour le lieu de l'œil $EO = \frac{m+n}{2m}t$

XXII. On peut rendre ces formules encore plus simples en posant $n = \frac{m}{i}$, de sorte que le demi-diamètre du champ apparent devienne $\varphi = \frac{2i}{m(i+1)}\omega$, & les autres déterminations seront :

$$q = \frac{i}{m+i} p \qquad AB = p$$

$$r = ci \cdot \frac{p}{m} \qquad BC = i \cdot \frac{p}{m}$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2(i-1)}{i+1} \cdot \frac{p}{m} \qquad CD = \frac{c}{1-c} \cdot (i-1) \cdot \frac{p}{m}$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2(i-1)}{3i-1} \cdot \frac{p}{m} \qquad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4(i-1)}{3i-1} \cdot \frac{p}{m}$$

& pour le lieu de l' œil la diſtance $EO = \frac{i+1}{2i} t$, où le champ apparent demande de grandes valeurs pour le nombre i, mais la longueur de la Lunette auſſi bien que la diſtinction en demande de petites, puiſque (§. XI.) la quantité $\frac{\lambda''}{nc^3} = \frac{\lambda'' i}{mc^3}$ doit être fort petite par raport à l'unité à moins qu'on ne remédie à la confuſion, en doublant le troiſiéme verre.

XXIII. Poſons outre cela $\frac{c}{1-c} \times \frac{p}{m} = z$, pour mieux ſoumettre les verres oculaires à notre volonté, de ſorte, que $\frac{c}{1-c} = \frac{mz}{p}$, & $c = \frac{mz}{mz+p}$, d' où la fraction $\frac{i}{m} (1 + \frac{p}{mz})^3$ devroit être aſsès petite, pour n' être pas obligé de doubler le troiſiéme verre. Donc les déterminations générales pour ces Lunettes ſeront :

$$q = \frac{i}{m+i} p \qquad AB = p$$

$$r = \frac{ipz}{mz+p} \qquad BC = \frac{i}{m} p$$

$$s = \frac{2(i-1)}{i+1} z \qquad CD = (i-1) z$$

$$t = \frac{2(i-1)}{3i-1} z \qquad DE = \frac{4(i-1)}{3i-1} z$$

pour le lieu de l'œil $EO = \frac{i+1}{2i}\,t$, & le demi-diamètre du champ apparent $\phi = \frac{2i}{m(i+1)}\,\omega$; où il est remarquable que les deux quantités i & z sont indépendantes du grossissement m, & de la distance de foyer de l'objectif p, & partant tant les deux verres D & E, que les distances CD, DE, & EO n'en dépendent pas non plus.

XXIV. Pour les ouvertures des verres, celles de l'objectif & du troisiéme sont déterminées par le dégré de clarté, & celles des autres par le champ apparent, de la manière suivante:

Demi-diamètres de l'ouverture des verres

$$AP = x = \frac{m}{60} \text{ ou } \frac{m}{50} \text{ pouces}$$

$$BQ = \frac{2i}{m(i+1)}\,\omega p$$

$$CR = \frac{i}{m}\,x = \frac{i}{60} \text{ ou } \frac{i}{50} \text{ pouces}$$

$$DS = \omega s = \frac{2(i-1)}{i+1}\,\omega z$$

$$ET = \omega t = \frac{2(i-1)}{3i-1}\,\omega z$$

où l'on peut prendre $\omega = \frac{1}{4}$, si l'on fait les verres B, D & E également convexes des deux côtés.

XXV. Si l'on vouloit se servir tant d'un objectif ordinaire, que du troisiéme verre simple, il seroit bon pour diminuer la confusion, de prendre z beaucoup plus grand que $\frac{p}{m}$; mais puisque alors la distance de foyer des verres D & E deviendroit asses considérable pour les grandes multiplications, ces verres devroient être trop grands. Il conviendra donc de prendre un milieu, en posant $z =$

$\frac{p}{m}$, & de donner plutôt au verre objectif une plus grande distance de foyer p pour rendre la confusion insensible. Alors aiant $c = \frac{1}{2}$, on n'aura qu'à déterminer la distance de foyer de l'objectif par cette formule $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 8i)}$ pouces, & lui donner une ouverture dont le demidiamètre $x = \frac{m}{60}$ pouces. Dans ce cas, le troisiéme verre C deviendra aussi également convexe des deux côtés. Or en supposant la raison de réfraction de l'air dans le verre, comme 1, 54 à 1, il sera bon de former l'objectif ensorte, que le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,60849\,p \\ \text{de derrière} = 4,79820\,p \end{cases}$
Pour les autres verres également convexes des deux côtés, la distance de foyer étant $= q$, on prendra le rayon de chaque face $= 1,08q$.

XXVI. Cela posé nous aurons les déterminations suivantes pour la construction de ces Lunettes, en prenant $\omega = \frac{1}{4}$.

Distance de foyer du verre	Demi-diamètre de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en A .. $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+8i)}$ pouces	$AP = x = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en B .. $q = \frac{i}{m+i} p$	$BQ = \frac{i}{2(i+1)} \cdot \frac{p}{m}$	$BC = i \cdot \frac{p}{m}$
en C .. $r = \frac{1}{2} i \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{i}{60}$ pouces	$CD = (i-1) \frac{p}{m}$
en D .. $s = \frac{2(i-1)}{i+1} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{i-1}{2(i+1)} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{4(i-1)}{3i-1} \cdot \frac{p}{m}$
en E .. $t = \frac{2(i-1)}{3i-1} \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{i-1}{2(3i-1)} \cdot \frac{p}{m}$	$EO = \frac{ii-1}{i(3i-1)} \cdot \frac{p}{m}$

la longueur de la Lunette $AO = p + \frac{6i^3 - 3i - 1}{i(3i - 1)} \cdot \frac{p}{m}$ & le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{i}{2m(i+1)}$, qui étant réduit en minutes, donne $\varphi = \frac{1718\,i}{m(i+1)}$ minutes. Or pour que le ſecond verre admette l'ouverture marquée, il faut qu'il ſoit $m > \frac{2i}{i-1}$.

XXVII. Le nombre i étant encore permis à notre choix à l' égard du champ apparent, il ſeroit bon de le prendre fort grand, cependant ſi on l'augmentoit à l'infini, on n'en tireroit que $\varphi = \frac{1}{2m}$, & la Lunette deviendroit à deux égards infiniment longue, puiſque la diſtance de foyer de l' objectif devroit auſſi être priſe infinie. Mais prenant $i = 2$, à cauſe de $\varphi = \frac{1}{3m}$, on perd bien daus le champ la ſixiéme partie, mais la Lunette devient auſſi plus courte à un double égard, ce qui eſt ſans doute bien préférable. Si l' on vouloit mettre $i = 3$, on gagneroit tant ſoit peu ſur le champ, mais la Lunette deviendroit aſsès conſidérablement plus longue. D' où je conclud qu'il eſt avantageux de ne pas ſuppoſer i plus grand que 2, attendu que ſi l' on ſouhaite un plus grand champ, on n' a qu'à ajouter encore un verre, qui l' augmentera de la moitié, pendant qu'en donnant ici au nombre i de plus grandes valeurs, les accroiſſemens du champ ſeroient inſenſibles.

XXVIII. Poſons donc $i = 2$, & prenant la diſtance de foyer de l'objectif $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 24)}$ pouces, nous aurons les déterminations ſuivantes :

Dist. de foyer du verre	Demi-diam. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p$	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en $B = \frac{2}{m+2} p$	$BQ = \frac{1}{3m} p$	$BC = \frac{2}{m} p$
en $C = \frac{1}{m} p$	$CR = \frac{1}{30}$ pouc.	$CD = \frac{1}{m} p$
en $D = \frac{2}{3m} p$	$DS = \frac{1}{6m} p$	$DE = \frac{4}{5m} p$
en $E = \frac{2}{5m} p$	$ET = \frac{1}{10m} p$	$EO = \frac{3}{10m} p$

donc la longueur de la Lunette $AO = p + \frac{41}{10m} p$, & le demi-diamètre du champ apparent $= \frac{1}{3m}$ ou de $\frac{1146}{m}$ minutes, d'où il eſt aiſé de tirer pour chaque multiplication propoſée les meſures exprimées en pouces, & d'y régler la conſtruction des Lunettes.

1° *Devis d'une telle Lunette qui groſſit 10 fois.*

XXIX. A' cauſe de $m = 10$, nous aurons $p = \frac{15}{2}\sqrt[3]{34} = 24, 3$ pouces, prenons donc $p = 25$ pouces, puiſqu'il vaut mieux de la prendre plus grande que plus petite, & nous obtiendrons les meſures ſuivantes en pouces.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 25, 00$	15, 21 119, 95	$AP = 0, 17$	$AB = 25, 00$
en $B = 4, 17$	4, 50	$BQ = 0, 83$	$BC = 5, 00$
en $C = 2, 50$	2, 70	$CR = 0, 03$	$CD = 2, 50$
en $D = 1, 67$	1, 80	$DS = 0, 42$	$DE = 2, 00$
en $E = 1, 00$	1, 09	$ET = 0, 25$	$EO = 0, 75$

la longueur de toute la Lunette $AO = 35, 25$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 114' = 1°, 54'$.

2° Devis d'une telle Lunette que grossit 20 fois.

XXX. La valeur $m = 20$ donne $p = 15 \sqrt[3]{44} = 53$, prenons donc $p = 55$ pouces, & nos mesures seront :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 55, 00$	33, 47 263, 90	$AP = 0, 33$	$AB = 25, 00$
en $B = 5, 00$	5, 40	$BQ = 0, 92$	$BC = 5, 50$
en $C = 2, 75$	2, 97	$CR = 0, 03$	$CD = 2, 75$
én $D = 1, 83$	1, 98	$DS = 0, 46$	$DE = 2, 20$
en $E = 1, 10$	1, 19	$ET = 0, 27\frac{1}{2}$	$EO = 0, 82$

la longueur de toute la Lunette $AO = 66, 27$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 57'$.

3° Devis d'une telle Lunette qui grossit 30 fois.

XXXI. La valeur $m = 30$ donne $p = \frac{45}{2} \sqrt[3]{54} = 85$; donc

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 88$	53, 55 422, 24	$AP = 0, 50$	$AB = 88, 00$
en $B = 6, 50$	5, 94	$BQ = 0, 98$	$BC = 5, 86$
en $C = 2, 93$	3, 16	$CR = 0, 03$	$CD = 2, 93$
en $D = 1, 95$	2, 11	$DS = 0, 49$	$DE = 2, 34$
en $E = 1, 17$	1, 26	$ET = 0, 29$	$EO = 0, 88$

la longueur de toute la Lunette $AO = 100, 01$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 38'$

XXXII. Si les verres objectifs quoique simples étoient si excellens, qu'ils admissent une plus grande ouverture, & qu'ils pûssent être employés à des plus grands grossissemens, alors on pourroit prendre pour les cas que je viens de développer, des objectifs d'une moindre distance de foyer que je n'ai marqué, & dans ces cas on n'aura qu'à diminuer toutes les mesures dans la même proportion, excepté les ouvertures de l'objectif, & du troisiéme verre. Or si l'on doubloit le troisiéme verre de la manière que j'ai indiquée dans le §. XV., pour diminuer la confusion, on pourroit bien donner à l'objectif une moindre distance de foyer, & ensuite conformément diminuer les autres mesures. Je dois encore remarquer que dans l'application à la pratique j'ai pris $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 24)}$ au lieu de $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 16)}$, que la position $i = 2$ donne, pour tenir compte de la confusion qui naît des deux verres oculaires, qui fournit à peu-près cet excès, mais on ne sauroit ici rien préscrire de précis, puisque tout dépend de l'adresse de l'Artiste.

XXXIII. Mais si l'Artiste est asses habile pour exécuter les objectifs composés, dont j'ai donné ci-dessus la description (§. XVI.), de sorte que toute confusion puisse être réduite à rien, alors la distance de foyer de l'objectif p se déterminera uniquement par son ouverture, dont le demi-diamètre étant $x = \frac{m}{60}$ pouces, ou même $x = \frac{m}{50}$ pouces, on pourra bien se contenter de prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{1}{2}$. Alors pour que le verre oculaire ne devienne pas trop petit, il sera bon de prendre

$c = \frac{3}{4}$, ou $\frac{c}{1-c} = 3$, & alors la confuſion du troiſiéme verre contenue dans la formule $\frac{\lambda'' i}{m c^3}$ ne ſera pas trop à craindre, quand même on prendroit ce verre ſimple, & également convexe des deux côtés, ſur tout en ſuppoſant comme auparavant $i = 2$, la conſtruction de l'objectif étant telle, qu'en approchant ou éloignant d'avantage les deux verres dont il eſt composé, cette confuſion avec celle des autres puiſſe être anéantie.

XXXIV. Poſant donc $p = \frac{m}{2}$ pouces, $c = \frac{3}{4}$ & $i = 2$, nous aurons les meſures ſuivantes pour la conſtruction de ces Lunettes :

Diſt. de foyer du verre	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$ pouces	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = \frac{m}{2}$ pouces
en $B = q = \frac{m}{m+2}$	$BQ = \frac{1}{6}$	$BC = 1$
en $C = r = \frac{3}{4}$	$CR = \frac{1}{20}$	$CD = \frac{3}{2}$
en $D = s = 1$	$DS = \frac{1}{4}$	$DE = \frac{6}{5}$
en $E = t = \frac{3}{5}$	$ET = \frac{3}{20}$	$EO = \frac{9}{20}$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 4\frac{3}{20}$ pouces, le demi-diamètre du champ apparent étant $= \frac{1146}{m}$ minutes.

XXXV. De là il eſt clair que nous pouvons bien donner à $\frac{c}{1-c}$ une valeur plus grande, & poſer $c = \frac{6}{7}$,

&

& alors rien n'empêche qu'on ne prenne $i = 3$ pour augmenter un peu le champ apparent. Or ces poſitions nous fourniſſent les meſures ſuivantes :

Diſt. de foyer du verre	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$ pouces	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = \frac{m}{2}$ pouces
en $B = q = \frac{3m}{2(m+3)}$	$BQ = \frac{3}{16}$	$BC = \frac{3}{2}$
en $C = r = \frac{9}{7}$	$CR = \frac{1}{20}$	$CD = 6$
en $D = s = 3$	$DS = \frac{3}{4}$	$DE = 3$
en $E = t = \frac{3}{2}$	$ET = \frac{3}{8}$	$EO = 1$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 11\frac{1}{2}$ pouces, & le demi-diamètre du champ apparent $= \frac{1289}{m}$ minutes.

Cette hypothéſe paroit de beaucoup préférable à la précédente, parceque tous les verres ont ici plus d' un pouce de foyer, & cauſent par conſéquent une d' autant plus petite confuſion, & celle du troiſiéme pouvant être détruite par la conſtruction de l'objectif enſeignée dans le §. XVI.

XXXVI. Au reſte je ne dois pas oublier de faire obſerver un très-grand avantage, que le troiſiéme verre procure à cette eſpèce de Lunettes par la très-petite ouverture, que ce verre admet ſans que le champ apparent en ſoit diminué. Car cette petite ouverture eſt le moyen le plus propre d' exclure les rayons étrangers, & il eſt ſans doute beaucoup plus efficace que les diphragmes, dont on ſe ſert ordinairement dans cette vue ; car on eſt obligé de les placer dans les lieux où les images ſont repréſentées, &

partant leurs trous ne ſauroient être plus petits que les images mêmes. Or comme le ſecond verre QBQ ſe trouve préciſément dans le lieu de la première image, il tient lieu d'un tel diaphragme, mais ſon ouverture qui répond au trou du diaphragme, eſt beaucoup plus grande que celle du troiſiéme verre. Par cette raiſon il eſt bon de ne donner à ce verre que la petite ouverture, que je lui viens d'aſſigner, quoiqu'à d'autres égards une plus grande ne causeroit aucun inconvénient.

Des Lunettes de cette eſpèce à 6 verres.

XXXVII. Je marquerai les diſtances de foyer de nos ſix verres par les lettres p, q, r, s, t & u, & les demi-diamètres de leurs ouvertures :
$AP = x$, $BQ = \pi q$, $CR = \pi' r$, $DS = \pi'' s$, $ET = \pi''' t$, $FU = \pi^{IV} u$;
puiſque le diamètre du champ eſt $\varphi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi''' - \pi^{IV}}{m-1}$
le groſſiſſement étant $= m$, poſons :
$\pi = \beta\omega$, $\pi' = 0$, $\pi'' = -\omega$, $\pi''' = \omega$ & $\pi^{IV} = -\omega$
pour avoir $\varphi = \frac{-\beta+3}{m-1}\omega$ ou bien $\varphi = M\omega$, en poſant
$M = \frac{3-\beta}{m-1}$. Enſuite ſoit:

$$B = -1,\ C = \frac{c}{1-c},\ D = -\frac{d}{1+d},\ E = -1,\ F = \infty$$
$$\mathrm{B} = \infty,\quad \mathrm{C} = c,\quad \mathrm{D} = -d,\quad \mathrm{E} = \infty,\quad \mathrm{F} = 1$$

& poſons les formules, qui en ſont formées :

$$Q = \mathrm{B}\pi - \varphi = \infty\pi$$
$$R = \mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi = -(\beta - M)\omega$$
$$S = \mathrm{D}\pi'' - \pi' + \pi - \varphi = (d + \beta - M)\omega$$
$$T = \mathrm{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = \infty$$
$$U = \mathrm{F}\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \varphi = -(3 - \beta + M)\omega$$

XXXVIII. Cela posé, les déterminations tant des distances de foyer que des intervalles des verres seront

$$q = \frac{B\varphi}{Q} p \qquad AB = p$$

$$r = B \cdot \frac{C\varphi}{R} p \qquad BC = B\varphi \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{R}\right) p$$

$$s = BC \cdot \frac{D\varphi}{S} p \qquad CD = BC\varphi \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right) p$$

$$t = BCD \cdot \frac{E\varphi}{T} p \qquad DE = BCD\varphi \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{T}\right) p$$

$$u = BCDE \cdot \frac{F\varphi}{U} p \qquad EF = BCDE\varphi \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{U}\right) p$$

& pour le lieu de l' œil $FO = \frac{1}{mM} u$; mais la destruction des coleurs d' iris exige cette condition :

$$\frac{\pi}{Q} + \frac{\pi'}{R} + \frac{\pi''}{S} + \frac{\pi'''}{T} + \frac{\pi^{IV}}{U} = 0$$

qui se réduit à celle-ci : $-\frac{1}{S} - \frac{1}{U} = 0$ ou $S = -U$ d' où nous tirons $d + \beta - M = 3 - \beta + M$, & $d = 3 - 2(\beta - M)$.

XXXIX. Soit maintenant $\beta = (n + 1) M$, de sorte que $M = \frac{3}{m+n}$, & $\beta - M = nM$. Or posons d' abord $n = \frac{m}{i}$, de sorte que $M = \frac{3i}{m(i+1)}$, $\beta - M = \frac{3}{i+1}$, $d = \frac{3(i-1)}{i+1}$, & $U = -\frac{3i}{i+1}\omega$, donc $S = \frac{3i}{i+1}\omega$, & puisque $\beta = \frac{3(m+i)}{m(i+1)}$, nous aurons:

$\frac{B\varphi}{Q} = \frac{M}{\beta} = \frac{i}{m+i}$, $R = -\frac{3}{i+1}\omega$, $\frac{\varphi}{R} = -\frac{i}{m}$,

$\frac{\varphi}{S} = \frac{1}{m}$, $\frac{\varphi}{T} = 0$; or $\frac{C\varphi}{T} = \frac{3i}{m(i+1)}$, & $\frac{\varphi}{U} = -\frac{1}{m}$, d' où nous tirons les déterminations ſuivantes :

$q = \frac{i}{m+i} p$ | $AB = p$

$r = \frac{ci}{m} p$. | $BC = \frac{i}{m} p$

$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{i+1} \cdot \frac{p}{m}$ | $CD = \frac{c}{1-c} (i-1) \frac{p}{m}$

$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m}$ | $DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m}$

$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m}$ | $EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m}$

& pour le lieu de l' œil $FO = \frac{i+1}{3i} u$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{3i}{m(i+1)} \omega$.

XL. Quand on ſe ſert d' un objectif ſimple, en faiſant les rayons des faces $\left\{\begin{array}{l}\text{de devant } = 0,60849\,p \\ \text{de derrière } = 4,79820\,p\end{array}\right.$, il faut prendre $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{i}{c^3})}$ pouces. Je m' en vais donc développer les hypothéſes ſuivantes :

1^re^ *Hipothéſe* $i = 2$ & $c = \frac{1}{2}$.

Diſt. de foyer des verres	Demid. de l' ouverture	Interval. entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+20)}$	$AP = \frac{m}{60} p$	$AB = p$
en $B = q = \frac{2}{m+2} p$	$BQ = \frac{1}{2m} p$	$BC = \frac{2}{m} p$
en $C = r = \frac{1}{m} p$	$CR = \frac{1}{30} p$	$CD = \frac{1}{m} p$

Dist. de foyer des verres	Demid. de l' ouverture	Interval. entre les verres
en $D = s = \frac{1}{m} p$	$DS = \frac{1}{4m} p$	$DE = \frac{1}{2m} p$
en $E = t = \frac{1}{m} p$	$ET = \frac{1}{4m} p$	$EF = \frac{1}{2m} p$
en $F = u = \frac{1}{2m} p$	$FU = \frac{1}{8m} p$	$FG = \frac{1}{4m} p$

donc la longueur de la Lunette $AO = p + \frac{17}{4m} p$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{1}{2m}$ ou bien $\varphi = \frac{1718}{m}$ minutes.

2[de] *Hipothése* $i = 3$ & $c = \frac{2}{3}$:

Dist. de foyer des verres	Demid. de l' ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+15)}$	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = p$
en $B = q = \frac{3}{m+3} p$	$BQ = \frac{9}{16m} p$	$BC = \frac{3}{m} p$
en $C = r = \frac{2}{m} p$	$CR = \frac{1}{20} p$	$CD = \frac{4}{m} p$
en $D = s = \frac{3}{m} p$	$DS = \frac{3}{4m} p$	$DE = \frac{6}{5m} p$
en $E = t = \frac{27}{10m} p$	$ET = \frac{27}{40m} p$	$EF = \frac{6}{5m} p$
en $F = u = \frac{6}{5m} p$	$FU = \frac{3}{10m} p$	$FO = \frac{8}{15m} p$

donc la longueur de toute la Lunette $AO = p + \frac{149}{15m} p$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{9}{16m}$ ou bien $\varphi = \frac{1933}{m}$ minutes.

XLI. Mais quand on veut employer un verre objectif composé, dont j'ai donné la description ci-dessus (16), de sorte qu'on puisse prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces, on peut se régler sur l'une des hypothéses suivantes :

1[re] *Hipothése* $i = 2$ & $c = \frac{4}{5}$.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$ pouces	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = \frac{m}{2}$ pouces
en $B = q = \frac{m}{m+2}$	$BQ = \frac{1}{4}$	$BC = 1$
en $C = r = \frac{4}{5}$	$CR = \frac{1}{30}$	$CD = 2$
en $D = s = 2$	$DS = \frac{1}{2}$	$DE = 1$
en $E = t = 2$	$ET = \frac{1}{2}$	$EF = 1$
en $F = u = 1$	$FU = \frac{1}{4}$	$FO = \frac{1}{2}$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 5\frac{1}{2}$ pouces, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{1}{2m}$, ou $\varphi = \frac{1718}{m}$ minutes.

2[de] *Hipothése* $i = 3$ & $c = \frac{5}{6}$.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$	$AP = \frac{m}{60}$ pouces	$AB = \frac{m}{2}$
en $B = q = \frac{3m}{2(m+3)}$	$BQ = \frac{3}{16}$	$BC = \frac{3}{2}$

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $C = r = \frac{5}{4}$	$CR = \frac{1}{20}$	$CD = 5$
en $D = s = \frac{15}{4}$	$DS = \frac{15}{16}$	$DE = \frac{3}{2}$
en $E = t = \frac{27}{8}$	$ET = \frac{27}{32}$	$EF = \frac{3}{2}$
en $F = u = \frac{3}{2}$	$FU = \frac{3}{8}$	$FO = \frac{2}{3}$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 10\frac{1}{6}$ pouces, & le demi-diamètre du champ $\phi = \frac{9}{16m}$ ou $\phi = \frac{1933}{m}$ minutes. Si ces Lunettes réussissoient, on les pourroit regarder comme les plus parfaites dans leur espèce.

Des Lunettes de cette espèce à 7 verres.

XLII. Les distances de foyer de nos 7 verres étant marquées par les lettres p, q, r, s, t, u, & v, & les demi-diamètres de leurs ouvertures :
$AP = x$, $BQ = \pi q$, $CR = \pi' r$, $DS = \pi'' s$, $ET = \pi''' t$, $FU = \pi^{\text{IV}} u$, $GV = \pi^{\text{V}} v$, puisque le demi-diamètre du champ est $\phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi''' - \pi^{\text{IV}} + \pi^{\text{V}}}{m - 1}$

posons $\pi = \beta\omega$, $\pi' = 0$, $\pi'' = -\omega$, $\pi''' = \omega$, $\pi^{\text{IV}} = -\omega$, & $\pi^{\text{V}} = +\omega$, pour avoir $\phi = \frac{-\beta + 4}{m - 1}\,\omega$, ou $\phi = M\omega$, en posant $M = \frac{4 - \beta}{m - 1}$. Soient ensuite:

$$B = -1,\ C = \frac{c}{1-c},\ D = \frac{-d}{1+c},$$
$$\mathrm{B} = \infty,\quad \mathrm{C} = c,\quad \mathrm{D} = -d,$$
$$E = \frac{-e}{1-e},\ F = \frac{-f}{f-1},\ G = \infty,$$
$$\mathrm{E} = -e,\ \mathrm{F} = f,\quad \mathrm{G} = 1;$$

d' où nous tirons les valeurs ſuivantes :

$Q = \mathrm{B}\pi - \omega = \mathrm{B}\beta\omega$

$R = \mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi = -(\beta - M)\,\omega$

$S = \mathrm{D}\pi'' - \pi' + \pi - \varphi = +(d + \beta - M)\,\omega$

$T = \mathrm{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = -(e - 1 + \beta - M)\,\omega$

$U = \mathrm{F}\pi^{\mathrm{IV}} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \varphi = -(f + 2 - \beta + M)\,\omega$

$V = \mathrm{G}\pi^{\mathrm{V}} - \pi^{\mathrm{IV}} + \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = (4 - \beta + M)\,\omega$

XLIII. De là la deſtruction des couleurs donne :

$$-\frac{\omega}{S} + \frac{\omega}{T} - \frac{\omega}{U} + \frac{\omega}{V} = 0$$

pour ſatisfaire à cette équation, puiſque $-T > S$, & $-U > V$, poſant $S = V$, & $-T = -U = \zeta V$, ou $\zeta > 1$. Soit pour abreger $\beta = (1 + n)\,M$, de ſorte que $\beta - M = nM$ & $M = \frac{4}{m+n}$, & ſoit $n = \frac{m}{i}$, pour avoir $M = \frac{4i}{m(i+1)}$, $\beta - M = \frac{4}{i+1}$ & $\beta = \frac{4(m+i)}{m(i+1)}$ de là nous aurons :

$V = \frac{4i}{i+1}$, $S = \left(d + \frac{4}{i+1}\right)\omega = \frac{4i}{i+1}$, donc $d = \frac{4(i-1)}{i+1}$

$-T = \left(e - 1 + \frac{4}{i+1}\right)\omega = \frac{4\zeta i}{i+1}\,\omega$, donc $e = \frac{(4\zeta+1)i-3}{i+1}$

$-U = \left(f + 2 - \frac{4}{i+1}\right)\omega = \frac{4\zeta i}{i+1}\,\omega$, donc $f = \frac{(4\zeta-2)\,i+2}{i+1}$

Enſuite $R = -\frac{4}{i+1}\,\omega$, & $Q = \frac{\mathrm{B}\,.\,4\,(m+i)}{m(i+1)}$, d'où nous tirons les valeurs ſuivantes:

$\frac{\varphi}{Q} =$

$\frac{\phi}{Q} = 0$, $\frac{B\phi}{Q} = \frac{i}{m+i}$, $\frac{\phi}{R} = -\frac{i}{m}$, $\frac{\phi}{S} = \frac{i}{m}$, $\frac{\phi}{T} = -\frac{1}{\zeta m} = \frac{\phi}{U}$, & $\frac{\phi}{V} = \frac{i}{m}$.

XLIV. De là résultent les déterminations suivantes :

$q = \frac{i}{m+i} p$, $\qquad AB = p$,

$r = ci \cdot \frac{p}{m}$, $\qquad BC = i \cdot \frac{p}{m}$,

$s = \frac{c}{1-c} \cdot d \cdot \frac{p}{m}$, $\qquad CD = \frac{c}{1-c}(i-1)\frac{p}{m}$,

$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot e \cdot \frac{p}{\zeta m}$, $\qquad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{\zeta-1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m}$,

$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot f \cdot \frac{p}{\zeta m}$,

$$EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{2}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{f}{f-1} \cdot \frac{p}{m}$,

$$FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{f}{f-1} \cdot \frac{\zeta-1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

& pour le lieu de l' œil $GO = \frac{i+1}{4i} v$, le demi-diamètre du champ apparent étant $\phi = \frac{4i}{m(i+1)} \omega$, où pour les hypothéses $i = 2$ & $i = 3$, il est bon de marquer les valeurs des lettres d, e & f.

1° $i = 2$, $d = \frac{4}{3}$, $e = \frac{8\zeta-1}{3}$, $f = \frac{8\zeta-2}{3}$, $\phi = \frac{8}{3m}\omega$

2° $i = 3$, $d = 2$, $e = 3\zeta$, $f = 3\zeta - 1$, $\phi = \frac{\zeta}{m}\omega$.

XLV. Soit donc pour la première hypothése $i = 2$ & $\zeta = 2$, de sorte que $e = 5$, & $f = \frac{14}{3}$, & nous aurons les déterminations suivantes:

$q = \frac{2}{m+2} p$, $BQ = \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{m}$, $AP = p$,

$r = 2c \cdot \frac{p}{m}$, $CR = \frac{1}{30}$ pouc., $BC = 2 \cdot \frac{p}{m}$,

$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{p}{m}$, $DS = \frac{1}{4} s$, $CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{p}{m}$,

$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{p}{m}$, $ET = \frac{1}{4} t$, $DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{p}{m}$,

$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{p}{m}$, $FU = \frac{1}{4} u$, $EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{21} \cdot \frac{p}{m}$,

$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{20}{33} \cdot \frac{p}{m}$, $GU = \frac{1}{4} v$, $FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{33} \cdot \frac{p}{m}$.

Pour le lieu de l'œil $GO = \frac{3}{8} v$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{2}{3m}$, ou bien $\varphi = \frac{2291}{m}$ minutes.

XLVI. L' autre hipothèse $i = 3$, en prenant $\zeta = \frac{8}{3}$, de ſorte que $c = 8$, & $f = 7$ donne les déterminations ſuivantes :

$q = \frac{3}{m+3} p$, $BQ = \frac{3}{4m} p$, $AB = p$

$r = c \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}$. $CR = \frac{1}{20}$, $BC = 3 \cdot \frac{p}{m}$

$s = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}$, $DS = \frac{1}{4} s$, $CD = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}$

$t = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}$, $ET = \frac{1}{4} t$, $DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{p}{m}$

$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{14}{9} \cdot \frac{p}{m}$, $FU = \frac{1}{4} u$, $EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{p}{m}$

$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{56}{81} \cdot \frac{p}{m}$, $GV = \frac{1}{4} v$, $FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{35}{81} \cdot \frac{p}{m}$

& pour le lieu de l' œil $GO = \frac{1}{3} v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{56}{243} \cdot \frac{p}{m}$,

& le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{3}{4m}\varphi$ ou $= \frac{2578}{m}$ minutes, où il faut au moins prendre $\frac{c}{1-c} = 2$, & $c = \frac{2}{3}$, pour prevenir une trop grande confuſion de la part du troiſiéme verre, d'où les verres oculaires deviendront paſſablement grands.

XLVII. Ici on peut encore conſidérer deux cas, ſelon qu'on ſe ſert d' un objectif ſimple ou composé, propre à détruire toute confuſion. Dans le premier cas d' un verre objectif ordinaire, il faut prendre pour l' hipothéſe $i = 2$, $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{2}{c^3})}$, & partant:

ſi l'on poſe $c = \frac{1}{2}$ on aura $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 16)}$, ou

ſi l'on poſe $c = \frac{3}{5}$ on aura $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 9)}$.

Dans l'autre hipothéſe $i = 3$, en prenant $c = \frac{2}{3}$, il faut mettre $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 11)}$, & je ne voudroit pas prendre $\frac{c}{1-c}$ plus grand, de pour que les oculaires ne dûſſent être trop grands. Or quand on ſe ſert d' un verre objectif composé, de ſorte qu'on puiſſe prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces, à cauſe de $\frac{p}{m} = \frac{1}{2}$, ſi voudrois poſer dans l'une & l' autre hipothéſe $c = \frac{3}{4}$, afin que le dernier oculaire ait environ un pouce de foyer. D' où il eſt aiſé de tirer des devis pour tous les groſſiſſemens, qu'on ſouhaitera.

Des Lunettes de cette espèce à 8 verres.

XLVIII. Posant les distances de foyer de nous 8 verres p, q, r, s, t, u, v & w, & les demi-diamètres de leurs ouvertures :
$AP = x$, $BQ = \pi q$, $CR = \pi' r$, $DS = \pi'' s$, $ET = \pi''' t$, $FU = \pi^{\text{IV}} u$, $GV = \pi^{\text{V}} v$, $HW \pi^{\text{VI}} w$, puisque le demi-diamètre du champ apparent est $\varphi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi''' - \pi^{\text{IV}} + \pi^{\text{V}} - \pi^{\text{VI}}}{m - 1}$, supposons

$\pi = \beta\omega$, $\pi' = 0$, $\pi'' = -\omega$, $\pi''' = \omega$, $\pi^{\text{IV}} = -\omega$, $\pi^{\text{V}} = \omega$, $\pi^{\text{VI}} = -\omega$,
pour avoir $\varphi = \frac{-\beta + 5}{m - 1}\omega$, ou bien $\varphi = M\omega$, posant $M = \frac{5 - \beta}{m - 1}$. Ensuite donnons aux indices des verres les valeurs suivantes :

$$B = -1,\ C = \frac{c}{1 - c},\ D = \frac{-d}{1 + d},$$
$$\mathrm{B} = \infty,\ \mathrm{C} = c,\ \mathrm{D} = -d,$$
$$E = \frac{-e}{1 + e},\ F = -1,\ G = \frac{-g}{g - 1},\ H = \infty,$$
$$\mathrm{E} = -e,\ \mathrm{F} = \infty,\ \mathrm{G} = g,\ \mathrm{H} = 1,$$

& de là formons les expressions suivantes :
$Q = \mathrm{B}\pi - \varphi = \mathrm{B}\beta\omega$, à cause de $\mathrm{B} = \infty$,
$R = \mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi = -(\beta - M)\omega$,
$S = \mathrm{D}\pi'' - \pi' + \pi - \varphi = +(d + \beta - M)\omega$,
$T = \mathrm{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = -(e - 1 + \beta - M)\omega$,
$U = \mathrm{F}\pi^{\text{IV}} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \varphi = -\mathrm{F}\omega$, à cause de $\mathrm{F} = \infty$,
$V = \mathrm{G}\pi^{\text{V}} - \pi^{\text{IV}} + \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = +(g + 3 - \beta + M)\omega$,
$W = \mathrm{H}\pi^{\text{VI}} - \pi^{\text{V}} + \pi^{\text{IV}} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \varphi = -(5 - \beta + M)\omega$.

XLIX. Cela posé la destruction des couleurs fournit cette équation :

$$-\frac{\omega}{S}+\frac{\omega}{T}+\frac{\omega}{V}-\frac{\omega}{W}=0,$$

à la quelle je satisferai en posant $S=-W$ & $-T=V=-\zeta W$. Soit ensuite comme ci-dessus $M=\frac{5i}{m(i+1)}$, $\beta-M=\frac{5}{i+1}$ & $\beta=\frac{5(m+i)}{m(i+1)}$, d' où nous tirons :

$W=-\frac{5i}{i+1}\omega$, $S=(d+\frac{5}{i+1})\omega=\frac{5i}{i+1}\omega$, donc $d=\frac{5(i-1)}{i+1}$

$-T=(e-\frac{i+4}{i+1})\omega=\frac{5\zeta i}{i+1}\omega$, donc $e=\frac{(5\zeta+1)i-4}{i+1}$

$V=(g+\frac{3i-2}{i+1})\omega=\frac{5\zeta i}{i+1}\omega$, donc $g=\frac{(5\zeta-3)i+2}{i+1}$

ensuite $R=-\frac{5}{i+1}\omega$ & $Q=\mathrm{B}\cdot\frac{5(m+i)}{m(i+1)}$, & après

$\frac{\varphi}{Q}=0$, $\frac{\mathrm{B}\varphi}{Q}=\frac{i}{m+i}$, $\frac{\varphi}{R}=-\frac{i}{m}$, $\frac{\varphi}{S}=\frac{1}{m}$, $\frac{\varphi}{T}=-\frac{1}{\zeta m}$, $\frac{\varphi}{U}=0$, or $\frac{\mathrm{F}\varphi}{U}=-\frac{5i}{m(i+1)}$, $\frac{\varphi}{V}=\frac{1}{\zeta m}$ & $\frac{\varphi}{W}=-\frac{1}{m}$,

d' où nous trouvons les déterminations suivantes :

$q=\frac{1}{m+1}p$, $\qquad AB=p$,

$r=ci\cdot\frac{p}{m}$, $\qquad BC=i\cdot\frac{p}{m}$,

$s=\frac{c}{1-c}\cdot d\cdot\frac{p}{m}$, $\qquad CD=\frac{c}{1-c}(i-1)\cdot\frac{p}{m}$,

$t=\frac{c}{1-c}\cdot\frac{d}{1+d}\cdot\frac{e}{\zeta}\cdot\frac{p}{m}$, $\qquad DE=\frac{c}{1-c}\cdot\frac{d}{1+d}\cdot\frac{\zeta-1}{\zeta}\cdot\frac{p}{m}$,

$u=\frac{c}{1-c}\cdot\frac{d}{1+d}\cdot\frac{e}{1+e}\cdot\frac{5i}{i+1}\cdot\frac{p}{m}$,

$$EF=\frac{c}{1-c}\cdot\frac{d}{1+d}\cdot\frac{e}{1+e}\cdot\frac{1}{\zeta}\cdot\frac{p}{m},$$

$$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{g}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

$$FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

$$w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{g}{g-1} \cdot \frac{p}{m},$$

$$GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{g}{1-g} \cdot \frac{\zeta-1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

& pour le lieu de l' œil la diſtance $HO = \frac{i+1}{5i}\, w$, le demi-diamètre du champ étant $\phi = \frac{5i}{m(i+1)}\,\omega$.

L. Conſidérons ici trois hipothéſes, puiſqu'il vaut bien la peine examiner auſſi le cas $i = 4$.

1° Si $i = 2$, on aura $d = \frac{5}{3}$, $e = \frac{10\zeta-2}{3}$,

$$g = \frac{10\zeta-4}{3},\ \phi = \frac{10}{3m}\,\omega.$$

2° Si $i = 3$, on aura $d = \frac{5}{2}$, $e = \frac{15\zeta-1}{4}$,

$$g = \frac{15\zeta-7}{4},\ \phi = \frac{15}{4m}\,\omega.$$

3° Si $i = 4$, on aura $d = 3$, $e = 4\zeta$,

$$g = 4\zeta-2,\ \phi = \frac{4}{m}\,\omega,$$

où la valeur de ζ doit être priſe enſorte, qu'aucune des diſtances entre les verres ne devienne trop petite, & cette condition eſt très-bien remplie en poſant $\zeta = 2$; donc ſi nous mettons enſuite $\omega = \frac{1}{4}$, nous aurons dans nos trois hypothéſes:

1° Si $i = 2$, $d = \frac{5}{3}$, $e = 6$, $g = \frac{16}{3}$,

$$\varphi = \frac{5}{6m}, \text{ ou } \varphi = \frac{2864}{m} \text{ min.}$$

2° Si $i = 3$, $d = \frac{5}{2}$, $e = \frac{29}{4}$, $g = \frac{23}{4}$,

$$\varphi = \frac{15}{16m}, \text{ ou } \varphi = \frac{3222}{m} \text{ min.}$$

3° Si $i = 4$, $d = 3$, $e = 8$, $g = 6$,

$$\varphi = \frac{1}{m}, \text{ ou } \varphi = \frac{3437}{m} \text{ min.}$$

1^re *Hipothése* $i = 2$ & $\zeta = 2$.

LI. Dans cette hypothése si l' on se sert d' un objectif simple, il faut prendre $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{2}{c^2})}$. Mais si l' on est pourvu d' un objectif composé, on pourra prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces. Dans l' un & l' autre cas les déterminations seront :

$$q = \frac{2}{m+2} p, \quad BQ = \frac{5}{6} \cdot \frac{p}{m} \quad AB = p.$$

$$r = c \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}, \quad CR = \frac{1}{30} \text{ pouc. } BC = 2 \cdot \frac{p}{m}$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{p}{m}, \quad DS = \frac{1}{4} s \quad CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{p}{m}$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{p}{m}, \quad ET = \frac{1}{4} t \quad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{p}{m}$$

$$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{25}{14} \cdot \frac{p}{m}, \quad FU = \frac{1}{4} u \quad EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{15}{56} \cdot \frac{p}{m}$$

$$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{p}{m}, \quad GV = \frac{1}{4} v \quad FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{15}{56} \cdot \frac{p}{m}$$

$$w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{60}{91} \cdot \frac{p}{m}, \quad HW = \frac{1}{4} w. \quad GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{30}{91} \cdot \frac{p}{m}$$

& pour le lieu de l'œil $HO = \frac{3}{10} w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{18}{91} \cdot \frac{p}{m}$, le demi-diamètre du champ étant de $\frac{2864}{m}$ minutes.

LII. Quand on se sert d'un objectif composé, il conviendra de prendre $c = \frac{3}{4}$; mais n'en employant qu'un ordinaire, je voudrois prendre $c = \frac{3}{5}$ ou $\frac{c}{1-c} = \frac{3}{2}$, & on aura les mesures suivantes :

Distances de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+10)}$	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = p$
en $B = q = \frac{2}{m+2} p$	$BQ = \frac{5}{6} \cdot \frac{p}{m}$	$BC = 2 \cdot \frac{p}{m}$
en $C = r = \frac{6}{5} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{30}$	$CD = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{m}$
en $D = s = \frac{5}{2} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{5}{8} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{15}{32} \cdot \frac{p}{m}$
en $E = t = \frac{45}{16} \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{45}{64} \cdot \frac{p}{m}$	$EF = \frac{45}{112} \cdot \frac{p}{m}$
en $F = u = \frac{75}{28} \cdot \frac{p}{m}$	$FU = \frac{75}{112} \cdot \frac{p}{m}$	$FG = \frac{45}{112} \cdot \frac{p}{m}$
en $G = v = \frac{15}{7} \cdot \frac{p}{m}$	$GV = \frac{15}{28} \cdot \frac{p}{m}$	$GH = \frac{45}{91} \cdot \frac{p}{m}$
en $H = w = \frac{90}{91} \cdot \frac{p}{m}$	$HW = \frac{45}{182} \cdot \frac{p}{m}$	$HO = \frac{27}{91} \cdot \frac{p}{m}$

qu'on appliquera aisément à chaque cas proposé.

2^de^ *Hipothése* $i = 3$ & $\zeta = 2$.

LIII. En se servant d'un objectif simple il faut prendre $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{3}{c^3})}$, pendant que la distance de

foyer

foyer d'un objectif composé, peut être prise $p = \frac{m}{2}$ pouces. En voici les déterminations pour l' un & l' autre cas:

$q = \frac{3}{m+3} p$	$BQ = \frac{15}{16} \cdot \frac{p}{m}$, $AB = p$	
$r = c \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{20}$ pouc., $BC = 3 \frac{p}{m}$	
$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4} s$,	$CD = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}$
$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{145}{56} \cdot \frac{p}{m}$	&c.	$DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{p}{m}$
$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{725}{308} \cdot \frac{p}{m}$		$EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{145}{462} \cdot \frac{p}{m}$
$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3335}{1848} \cdot \frac{p}{m}$		$FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{145}{462} \cdot \frac{p}{m}$
$w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3335}{4389} \cdot \frac{p}{m}$		$GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3335}{8778} \cdot \frac{p}{m}$

Pour le lieu de l' œil $HO = \frac{4}{15} w$ & $\phi = \frac{3222}{m}$ minutes.

LIV. Quand on se sert d' un objectif composé, où $\frac{p}{m} = \frac{1}{2}$ pouce, on prendra commodement $c = \frac{3}{4}$, mais en employant un objectif simple, je supposerai $c = \frac{2}{3}$, & on aura les mesures suivantes:

Dist. de foyer des verres	Demid. des ouvertures	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+12)}$	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en $B = q = \frac{3}{m+3} p$	$BQ = \frac{15}{16} \cdot \frac{p}{m}$	$BC = 3 \cdot \frac{p}{m}$
en $C = r = 2 \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{20}$ pouc.	$CD = 4 \cdot \frac{p}{m}$

Dist. de foyer des verres	Demid. des ouvertures	Interval. entre les verres
en $D = s = 5 \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{5}{4} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{5}{7} \cdot \frac{p}{m}$
en $E = t = \frac{145}{28} \cdot \frac{p}{m}$	&c.	$EF = \frac{145}{231} \cdot \frac{p}{m}$
en $F = u = \frac{725}{154} \cdot \frac{p}{m}$		$FG = \frac{145}{237} \cdot \frac{p}{m}$
en $G = v = \frac{3335}{924} \cdot \frac{p}{m}$		$GH = \frac{3335}{4389} \cdot \frac{p}{m}$
en $H = w = \frac{6670}{4389} \cdot \frac{p}{m}$		$HO = \frac{5336}{13167} \cdot \frac{p}{m}$

La ſeule difficulté qu'on rencontrera dans l'exécution, ſe trouvera dans la grandeur des verres oculaires, dont l'ouverture peut paſſer pluſieurs pouces dans les grands groſſiſſemens.

3^{me} *Hipothéſe* $i = 4$ & $\zeta = 2$.

LV. Lorſque l'objectif eſt ſimple, il faut prendre ſa diſtance de foyer $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{4}{c^3})}$ pouces, pendant que pour un compoſé il ſuffiroit de prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces. Les autres déterminations ſont :

$$q = \frac{4}{m+4} p, \qquad BQ = \frac{p}{m} \qquad AB = p$$

$$r = c \cdot 4 \cdot \frac{p}{m}, \qquad CR = \frac{1}{15} \text{ pouc.} \quad BC = 4 \cdot \frac{p}{m}$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}, \quad DS = \frac{1}{4} s \qquad CD = \frac{c}{1-c} \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}, \quad \&c. \qquad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{p}{m}$$

$$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{p}{m}, \qquad EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$$

$v = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}$, $FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$

$w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{p}{m}$, $GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{p}{m}$

Pour le lieu de l' œil la diſtance $HO = \frac{1}{4} w = \frac{c}{1-c} \times \frac{1}{5} \times \frac{p}{m}$, le demidiamètre du champ apparent étant $\varphi = \frac{1}{m}$, ou $\varphi = \frac{3437}{m}$ minutes.

LVI. Quand on ſe ſert d' un objectif composé, on pourra bien prendre $c = \frac{3}{4}$, ſans que les verres deviennent trop grands, mais pour les objectifs ordinaires il vaudra mieux d' augmenter la diſtance de foyer p, que d'admettre de trop grands oculaires ; je poſerai donc $c = \frac{1}{2}$.

Diſt. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{2}{4} m \sqrt[3]{(m + 32)}$	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en $B = q = \frac{4}{m+4} p$	$BQ = \frac{p}{m}$	$BC = 4 \cdot \frac{p}{m}$
en $C = r = 2 \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{15}$ pouc.	$CD = 3 \cdot \frac{p}{m}$
en $D = s = 3 \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{3}{4} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{3}{8} \cdot \frac{p}{m}$
en $E = t = 3 \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{3}{4} \cdot \frac{p}{m}$	$EF = \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$
en $F = u = \frac{8}{3} \cdot \frac{p}{m}$	$FU = \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{m}$	$FG = \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$
en $G = v = 2 \cdot \frac{p}{m}$	$GV = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{m}$	$GH = \frac{2}{5} \cdot \frac{p}{m}$
en $H = w = \frac{4}{5} \cdot \frac{p}{m}$	$HW = \frac{1}{5} \cdot \frac{p}{m}$	$HO = \frac{1}{5} \cdot \frac{p}{m}$

Donc la longueur de la Lunette $AO = p + 8 \frac{77}{120} \times \frac{p}{m}$; d' où je tirerai les devis ſuivans pour la pratique.

LVII. Mais j' obſerve avant toutes choſes que dans le cas de huit verre les deux premieres hypothéſes, où $i = 2$ & $i = 3$ ne ſauroient avoir lieu dans la pratique, puiſque le ſecond verre B devroit avoir une ouverture, dont le demi-diamètre ſurpaſsât la quatriéme partie de ſa diſtance de foyer. Ce même inconvénient a bien encore lieu dans la troiſiéme hypothéſe, mais dès que le groſſiſſement eſt conſidérable, la quantité BQ ſurpaſſe ſi peu $\frac{1}{4} q$, que la figure du verre pourroit bien admettre une telle ouverture. Suppoſons que ce verre puiſſe ſouffrir une ouverture dont le demi-diamètre $BQ = \frac{1}{3} q$, & nous aurons $\frac{p}{m} = \frac{4}{3(m+4)} p$, donc $m = 12$, ou dès que le groſſiſſement m ſurpaſſe 12, l' exécution ſera poſſible. Il en eſt de même des Lunettes à 7 verres, où l' hypothéſe $i = 2$ ne ſauroit avoir lieu, & poſant $i = 3$, il faut que le groſſiſſement m ſurpaſſe q pour que le demi-diamètre de l' ouverture BQ devienne plus petit que le tiers de la diſtance de foyer q. Or dans le cas de 6 verres l' hypothéſe $i = 2$ n' a lieu que lorſque $m > 6$, mais l' autre $i = 3$ donne toujours $BQ = < \frac{1}{3} q$, & même $BQ < \frac{1}{4} q$, ſi $m > 9$.

Devis d'une Lunette à 8 verres qui grossit 15 fois.

LVIII. Il faudra bien prendre $p = 40$ pouces, & alors les mesures seront exprimées en pouces.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 40,00$	24,34 191,93	0,25	$AB = 40,00$
en $B = 8,42$	9,09	2,67	$BC = 10,67$
en $C = 5,33$	5,76	0,07	$CD = 8,00$
en $D = 8,00$	8,64	2,00	$DE = 1,00$
en $E = 8,00$	8,64	2,00	$EF = 0,89$
en $F = 7,11$	7,68	1,78	$FG = 0,89$
en $G = 5,33$	5,76	1,33	$GH = 1,07$
en $H = 2,13$	2,30	0,53	$HO = 0,53$

la longueur de toute la Lunette $AO = 63,05$.
le demi-diamètre du champ apparent $= 3°, 49'$

Devis d'une Lunette à 8 verres qui grossit 25 fois.

LIX. On prendra $p = 75$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = 3$ pouces, & on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 75,00$	45,64 359,87	0,42	$AB = 75,00$
en $B = 10,34\frac{1}{2}$	11,17	3,00	$BC = 12,00$
en $C = 6,00$	6,48	0,07	$CD = 9,00$
en $D = 9,00$	9,72	2,25	$DE = 1,12\frac{1}{2}$
en $E = 9,00$	9,72	2,25	$EF = 1,00$
en $F = 8,00$	8,64	2,00	$FG = 1,00$
en $G = 6,00$	6,48	1,50	$GH = 1,20$
en $H = 2,40$	2,59	0,60	$HO = 0,60$

la longueur de toute la Lunette $AO = 100, 92\frac{1}{2}$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 2^\circ\ 17'$.

Devis d'une Lunette à 8 verres qui grossit 50 fois.

LX. On prendra $p = 166\frac{2}{3}$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{10}{3}$ pouces, & on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A =$ 166, 67	{ 101, 42 / 799, 70	0, 83	$AB =$ 166, 67
en $B =$ 12, 34	13, 33	3, 33	$BC =$ 13, 33
en $C =$ 6, 67	7, 20	0, 07	$CD =$ 10, 00
en $D =$ 10, 00	10, 80	2, 50	$DE =$ 1, 25
en $E =$ 10, 00	10, 80	2, 50	$EF =$ 1, 11
en $F =$ 8, 89	9, 60	2, 22	$FG =$ 1, 11
en $G =$ 6, 67	7, 20	1, 67	$GH =$ 1, 33
en $H =$ 2, 67	2, 88	0, 67	$HO =$ 0, 67

la longueur de toute la Lunette $AO = 195, 47$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 1^\circ, 8'$.

LXI. Comme la grandeur des verres pourroit arrêter l'exécution, en cas qu'on veuille se contenter d'un moindre champ qui surpasse pourtant encore le double de celui, qu'offrent les Lunettes ordinaires, les plus commodes de ces sortes de Lunettes semblent celles qui contiennent 6 verres, où posant $i = 3$, je prendrai $c = \frac{1}{2}$ pour éviter de grands verres, ce qui fournit ces déterminations.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l' ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+24)}$	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en $B = q = \frac{3}{m+3} p$	$BQ = \frac{9}{16} \cdot \frac{p}{m}$	$BC = 3 \frac{p}{m}$
en $C = r = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{20}$	$CD = 2 \frac{p}{m}$
en $D = s = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{3}{8} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{3}{5} \cdot \frac{p}{m}$
en $E = t = \frac{27}{20} \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{21}{80} \cdot \frac{p}{m}$	$EF = \frac{3}{5} \cdot \frac{p}{m}$
en $F = u = \frac{3}{5} \cdot \frac{p}{m}$	$FU = \frac{3}{20} \cdot \frac{p}{m}$	$FO = \frac{4}{15} \cdot \frac{p}{m}$,

& le demi-diamètre du champ apparent $= \frac{1933}{m}$ minutes.

Devis d' une Lunette à 6 verres qui grossit 10 fois.

LXII. On prendra ici $p = 25$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{5}{2}$ pouces, & on aura les mesures suivantes.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A =$ 25, 00	{ 15, 11 119, 95	0, 17	$AB =$ 25, 00
en $B =$ 5, 77	6, 23	1, 40	$BC =$ 7, 50
en $C =$ 3, 75	4, 05	0, 05	$CD =$ 5, 00
en $D =$ 3, 75	4, 05	0, 94	$DE =$ 1, 50
en $E =$ 3, 37 $\frac{1}{2}$	3, 64 $\frac{1}{2}$	0, 84	$EF =$ 1, 50
en $F =$ 1, 50	1, 62	0, 38	$FO =$ 0, 67

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = 41, 17$ pouces, & le demi-diamètre du champ apparent 3°, 13'.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 15 fois.

LXIII. Je prendrai $p = 40$, d'où $\frac{p}{m} = \frac{8}{3}$, & les mesures seront :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en A = 40, 00	{ 24, 34 { 191, 93	0, 25	AB = 40, 00
en B = 6, 67	7, 20	1, 50	BC = 8, 00
en C = 4, 00	4, 32	0, 05	CD = 5, 33
en D = 4, 00	4, 32	1, 00	DE = 1, 60
en E = 3, 60	3, 89	0, 90	EF = 1, 60
en F = 1, 60	1, 73	0, 40	FO = 0, 71

la longueur de toute la Lunette AO = 57, 24 pouces, & le demi-diamètre du champ apparent = 2°, 9.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 20 fois.

LXIV. Je prendrai $p = 55$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = \frac{11}{4}$, & les mesures sont :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en A = 55, 00	{ 33, 46 { 263, 90	0, 33	AB = 55, 00
en B = 7, 18	7, 75	1, 55	BC = 8, 25
en C = 4, 12 $\frac{1}{2}$	4, 45	0, 05	CD = 5, 50
en D = 4, 12 $\frac{1}{2}$	4, 45	1, 03	DE = 1, 65
en E = 3, 71	4, 05	0, 93	EF = 1, 65
en F = 1, 65	1, 78	0, 41	FO = 0, 73

la longueur de toute la Lunette AO = 72, 78, & le demi-diamètre du champ apparent = 1°, 36′.

Devis

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 25 fois.

LXV. Je prendrai ici $p = 70$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = \frac{14}{5}$, &

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 70, 00$	42, 59 / 335, 87	0, 42	$AB = 70, 00$
en $B = 7, 50$	8, 10	1, 57	$BC = 8, 40$
en $C = 4, 20$	4, 54	0, 05	$CD = 5, 60$
en $D = 4, 20$	4, 54	1, 05	$DE = 1, 68$
en $E = 3, 78$	4, 09	0, 95	$EF = 1, 68$
en $F = 1, 68$	1, 81	0, 42	$FO = 0, 75$

la longueur de toute la Lunette $AO = 88, 11$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 1°, 17'$

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 30 fois.

LXVI. Je prendrai ici $p = 90$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = 3$ pouces, & les mesures seront

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 90, 00$	54, 77 / 431, 84	0, 50	$AB = 90, 00$
en $B = 8, 18$	8, 84	1, 69	$BC = 9, 00$
en $C = 4, 50$	4, 86	0, 05	$CD = 6, 00$
en $D = 4, 50$	4, 86	1, 13	$DE = 1, 80$
en $E = 4, 05$	4, 37	1, 01	$EF = 1, 80$
en $F = 1, 80$	1, 94	0, 45	$FO = 0, 80$

la longueur de la Lunette $AO = 109, 40$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 1°, 4'$.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 40 fois.

LXVII. Je prendrai ici $p = 120$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = 3$ pouces &c.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = 120,00$	73,02 575,78	0,67	$AB = 120$
en $B = 8,37$	9,04	1,69	$BC = 9,00$
en $C = 4,50$	4,86	0,05	$CD = 6,00$
en $D = 4,50$	4,86	1,13	$DE = 1,80$
en $E = 4,05$	4,37	1,01	$EF = 1,80$
en $F = 1,80$	1,94	0,45	$FO = 0,80$

la longueur de toute la Lunette $AO = 139, 40$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 48'$.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 50 fois.

LXVIII. Je prendrai ici $p = 160$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = \frac{16}{5}$ &c.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 160,00$	97,36 767,71	0,83	$AB = 160,00$
en $B = 9,06$	9,79	1,80	$BC = 9,60$
en $C = 4,80$	5,18	0,05	$CD = 6,40$
en $D = 4,80$	5,18	1,20	$DE = 1,92$
en $E = 4,32$	4,66	1,08	$EF = 1,92$
en $F = 1,92$	2,07	0,48	$FO = 0,85$

Donc la longueur de la Lunette $AO = 180, 69$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 39'$.

LXIX. J'ajouterai encore de ſemblables devis pour des Lunettes à 7 verres, en évitant les cas, où les verres deviendroieut trop grands. Pour cet effet je ſuppoſerai dans les déterminations du §. XLVI. la lettre $c = \frac{1}{2}$, où à cauſe de $i = 3$, la diſtance de foyer de l'objectif doit être priſe $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 24)}$, & les meſures, pour chaque groſſiſſement $= m$, doivent être tirées des formules ſuivantes:

en $B = q = \frac{3}{m+3} p$, $BQ = \frac{3}{4m} p$, $AB = p$

en $C = r = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{m}$, $CR = \frac{1}{20}$, $BC = 3 \cdot \frac{p}{m}$

en $D = s = 2 \cdot \frac{p}{m}$, $DS = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{m}$, $CD = 2 \cdot \frac{p}{m}$

en $E = t = 2 \cdot \frac{p}{m}$, $ET = \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{m}$, $DE = \frac{5}{12} \cdot \frac{p}{m}$

en $F = u = \frac{14}{9} \cdot \frac{p}{m}$, $FU = \frac{7}{18} \cdot \frac{p}{m}$, $EF = \frac{4}{9} \cdot \frac{p}{m}$

en $G = v = \frac{56}{81} \cdot \frac{p}{m}$, $GV = \frac{14}{81} \cdot \frac{p}{m}$, $FG = \frac{35}{81} \cdot \frac{p}{m}$

& pour le lieu de l'œil la diſtance $GO = \frac{56}{243} \cdot \frac{p}{m}$.

Or le demi-diamètre du champ apparent $= \frac{2578}{m}$ minutes, d'où je déduis les devis ſuivans.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui groſſit 10 fois.

LXX. En prenant donc ici $p = 25$ pouces, de ſorte que $\frac{p}{m} = \frac{5}{2}$, on aura les meſures ſuivantes en pouces:

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en A = 25, 00	15, 21 / 119, 95	0, 17	AB = 25, 00
en B = 5, 77	6, 23	1, 87	BC = 7, 50
en C = 3, 75	4, 05	0, 05	CD = 5, 00
en D = 5, 00	5, 40	1, 25	DE = 1, 04
en E = 5, 00	5, 40	1, 25	EF = 1, 11
en F = 3, 89	4, 20	0, 97	FG = 1, 08
en G = 1, 73	1, 87	0, 43	GO = 0, 58

Donc la longueur de toute la Lunette AO = 41, 31, & le demi-diamètre du champ apparent = 4°, 18′.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 15 fois.

LXXI. Je pose pour ce grossissement, comme auparavant $p = 40$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{8}{3}$, & de là on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en A = 40, 00	24, 34 / 191, 93	0, 25	AB = 40, 00
en B = 6, 67	7, 20	2, 00	BC = 8, 00
en C = 4, 00	4, 32	0, 05	CD = 5, 33
en D = 5, 33	5, 76	1, 33	DE = 1, 11
en E = 5, 33	5, 76	1, 33	EF = 1, 18
en F = 4, 15	4, 48	1, 04	FO = 1, 15
en G = 1, 85	2, 00	0, 46	GO = 0, 62

la longueur de toute la Lunette AO = 57, 39, & le demi-diamètre du champ apparent = 2°, 52′.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 20 fois.

LXXII. En prenant ici $p = 55$ pouces, d'où l'on a $\frac{p}{m} = \frac{11}{4}$, on aura les mesures suivantes:

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 55,00$	{ 33, 46 / 263, 90	0, 33	$AB = 55, 00$
en $B = 7, 18$	7, 75	2, 06	$BC = 8, 25$
en $C = 4, 12\frac{1}{2}$	4, 45	0, 05	$CD = 5, 50$
en $D = 5, 50$	5, 94	1, 38	$DE = 1, 15$
en $E = 5, 50$	5, 94	1, 38	$EF = 1, 22$
en $F = 4, 28$	4, 62	1, 07	$FG = 1, 19$
en $G = 1, 90$	2, 05	0, 48	$GO = 0, 63$

la longueur de toute la Lunette $AO = 72, 94$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 2°, 9'$.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 25 fois.

LXXIII. En supposant comme auparavant $p = 70$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{14}{5}$, nous aurons les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 70, 00$	{ 42, 59 / 336, 87	0, 42	$AB = 70, 00$
en $B = 7, 50$	8, 10	2, 10	$BC = 8, 40$
en $C = 4, 20$	4, 54	0, 05	$CD = 5, 60$
en $D = 5, 60$	6, 05	1, 40	$DE = 1, 17$
en $E = 5, 60$	6, 05	1, 40	$EF = 1, 24$
en $F = 4, 36$	4, 71	1, 09	$FO = 1, 21$
en $G = 1, 94$	2, 10	0, 49	$GO = 0, 65$

la longueur de toute la Lunette $AO = 88, 27$, & le demi-diamètre du champ apparent $1°, 43'$.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 30 fois.

LXXIV. La distance de foyer de l'objectif étant prise $p = 90$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = 3$, on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres		Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A =$	90, 00	54, 77 431, 84	0,50	$AB =$ 90, 00
en $B =$	8, 18	8, 84	2, 25	$BC =$ 9, 00
en $C =$	4, 50	4, 86	0, 05	$CD =$ 6, 00
en $D =$	6, 00	6, 48	1, 50	$DE =$ 1, 25
en $E =$	6, 00	6, 48	1, 50	$EF =$ 1, 33
en $F =$	4, 67	5, 04	1, 17	$FO =$ 1, 29
en $G =$	2, 07	2, 24	0, 52	$GO =$ 0, 69

la longueur de toute la Lunette $AO = 109, 56$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 1°, 26'$.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 40 fois.

LXXV. En prenant ici, comme ci-dessus, $p = 120$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m}$ soit $= 3$, on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres		Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A =$	120, 00	73, 02 575, 78	0, 67	$AB =$ 120, 00
en $B =$	8, 37	9, 04	2, 25	$BC =$ 9, 00
en $C =$	4, 50	4, 86	0, 05	$CD =$ 6, 00

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $D =$ 6, 00	6, 48	1, 50	$DE =$ 1, 25
en $E =$ 6, 00	6, 48	1, 50	$EF =$ 1, 33
en $F =$ 4, 67	5, 04	1, 17	$FG =$ 1, 29
en $G =$ 2, 07	2, 24	0, 52	$GO =$ 0, 69

la longueur de toute la Lunette $AO =$ 139, 56, & le demi-diamètre de l' ouverture $= 1^\circ, 5'$.

Devis d' une Lunette à 7 verres qui grossit 50 fois.

LXXVI. Je prendrai ici, comme auparavant, $p = 160$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{16}{5}$, & j'en trouve les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A =$ 160, 00	{ 97, 36 / 767, 71	0, 83	$AB =$ 160, 00
en $B =$ 9, 06	9, 79	2, 40	$BC =$ 9, 60
en $C =$ 4, 80	5, 18	0, 05	$CD =$ 6, 40
en $D =$ 6, 40	6, 91	1, 60	$DE =$ 1, 33
en $E =$ 6, 40	6, 91	1, 60	$EF =$ 1, 42
en $F =$ 4, 98	3, 38	1, 25	$FG =$ 1, 38
en $G =$ 2, 22	2, 40	0, 56	$GO =$ 0, 67

Donc la longueur de toute la Lunette $AO =$ 180, 80, & le demidiamètre du champ apparent $= 51'$.

De la construction de ces Lunettes en y employant un verre objectif composé.

LXXVII. De la manière que j' ai ici considéré la confusion, celle qui résulte du troisiéme verre est repré-

ſentée par cette formule $\frac{i}{mc^3}$, laquelle étant indiquée par la lettre M, j'ai fait voir ailleurs que pour détruire cette confuſion auſſi bien que celle de l'objectif, celui-ci doit être compoſé de deux verres l'un convexe, & l'autre concave enſorte qu'il ſoit, poſant p pour la diſtance de foyer de l'objectif entier :

Du premier verre

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,51467\,p \\ \text{de derrière} = 4,05851\,p \end{cases}$

De l'autre verre

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = -0,73978\,p + 0,7319\,Mp \\ \text{de derrier} = +1,01897\,p - 1,3885\,Mp \end{cases}$

Cependant il faut ici remarquer, que comme les autres verres produiſent auſſi quelque confuſion, il faut prendre $M > \frac{i}{mc^3}$, & il eſt même bon d'en prendre la valeur un peu trop grande, puiſqu'on eſt en état de redreſſer cette faute, en éloignant les deux verres l'un de l'autre plus que je ne l'ai ſuppoſé dans le calcul, où leur diſtance a été ſuppoſée $= \frac{1}{80}\,p$.

LXXVIII. Je n'appliquerai ces objectifs qu'au cas de ſix verres, & à l'hypothéſe, où j'ai ſuppoſé $i = 3$ & $c = \frac{5}{6}$; de là j'aurai donc $\frac{i}{mc^3} = 5$, & partant, pour tenir compte des autres verres, je ſuppoſerai $M = \frac{10}{m}$, d'où l'on comprend aiſément que cette hypothéſe ne ſauroit être appliquée qu'aux cas, où le groſſiſſement eſt très-conſidérable, ou $\frac{10}{m}$ une fraction aſsès petite. Donc ſi nous prenons

$p =$

$p = \frac{m}{2}$, la construction de notre objectif composé pour le grossissement $= m$ sera en pouces.

Du premier verre

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,25734\, m \\ \text{de derrière} = 2,02926\, m \end{cases}$

De l' autre verre

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = -(0,36989\, m - 3,659) \\ \text{de derrière} = +(0,50948\, m - 6,942) \end{cases}$

ce dernier verre est donc un menisque tournant sa face concave vers le premier verre.

Table pour la construction de ces Lunettes.

Objectif composé

Grossissement	Premier verre, Rayon de sa face d'avant	Premier verre, Rayon de sa face de derrière	L'autre verre, Rayon de sa face de devant	L'autre verre, Rayon de sa face de derrière	Dist. de foyer du 2nd verre	Rayon de ses deux faces	Demid. du champ apparent
m	+	+	—	+	—	+	
30	7, 72	60, 88	7, 44	8, 34	1, 36	1, 47	1°, 4′
40	10, 29	81, 17	11, 14	13, 44	1, 39	1, 50	48′
50	12, 87	101, 46	14, 84	18, 53	1, 42	1, 53	38
60	15, 44	121, 75	18, 53	23, 63	1, 43	1, 54	32
70	18, 01	142, 05	22, 23	28, 72	1, 44	1, 55	28
80	20, 59	162, 34	25, 93	33, 82	1, 44	1, 55	24
90	23, 16	182, 63	29, 63	38, 91	1, 45	1, 56	21
100	25, 73	202, 93	33, 33	44, 00	1, 45	1, 56	19
125	32, 17	253, 66	42, 58	56, 74	1, 46	1, 57	16
150	38, 60	304, 39	51, 83	69, 48	1, 46	1, 57	13
175	45, 03	355, 12	61, 07	82, 22	1, 47	1, 58	11
200	51, 47	405, 85	70, 32	94, 95	1, 47	1, 58	9
250	64, 34	507, 32	88, 82	120, 43	1, 47	1, 58	7 ½
300	77, 20	608, 78	107, 31	145, 90	1, 48	1, 59	6
350	90, 07	710, 24	125, 81	171, 38	1, 48	1, 59	5 ½
400	102, 94	811, 70	144, 30	196, 85	1, 48	1, 59	5
450	115, 80	913, 17	162, 80	222, 32	1, 49	1, 60	4 ½
500	128, 67	1014, 63	181, 29	247, 80	1, 49	1, 60	4

Le ſecond verre B; dont la conſtruction eſt donnée ici, doit toujours être mis dans le foyer de l' objectif, & le demidiamètre de ſon ouverture eſt $\frac{3}{16}$ pouces, & de là juſqu'au troiſiéme verre C, la diſtance eſt $BC = 1 \frac{1}{2}$ pouce.

Du troiſiéme verre C la diſtance de foyer eſt $= 1, 25$; donc le rayon de ſes deux faces $= 1, 35$, le demi-diamètre de ſon ouverture $= \frac{1}{20}$ pouce, & la diſtance $CD = 5$.

Du quatriéme verre D la diſtance de foyer eſt $= 3, 75$; donc le rayon de ſes faces $= 3, 89$, le demi-diamètre de ſon ouverture $= 0, 94$, & la diſtance $DE = 1, 5$.

Du cinquiéme verre E la diſtance de foyer eſt $= 3, 37 \frac{1}{2}$; donc le rayon de ſes faces $= 3, 48$, le demi-diamètre de ſon ouverture $= 0, 84$, & la diſtance $EF = 1, 5$.

Du ſixiéme verre F la diſtance de foyer eſt $= 1, 50$; donc le rayon de ſes faces $= 1, 62$, le demidiamètre de ſon ouverture eſt $= 0, 37 \frac{1}{2}$, & la diſtance de l' œil $FO = 0, 61$.

LXXIX. Mais en cas qu'on ne réuſſiſſe pas ſi heureuſement dans la conſtruction de ces objectis compoſés, qu'on puiſſe prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces, il ſera bon de donner des régles plus générales pour les Lunettes, qu'on ſera en état d'en faire. Pour cet effet je poſe $p = nm$, afin qu'on puiſſe prendre pour n un nombre tel, que les circonſtances le permettront.

Je commencerai donc par le cas de 5 verres, en regardant la distance de foyer du dernier oculaire comme connue:

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$ pouces	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{i}{m+i} nm$	$BQ = \frac{in}{2(i+1)}$	$BC = in$
en C	$r = cin$	$CR = \frac{i}{m} x$	$CD = \frac{3i-1}{2} t$
en D	$s = \frac{3i-1}{i+1} t$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DE = 2t$
en E	$t = t$	$ET = \frac{1}{4} t$	$EO = \frac{i+1}{2i} t$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = n(m+i) + \frac{(i+1)(3i+1)}{2i} t$, & le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{i}{2(i+1)m}$; or $\frac{c}{1-c} = \frac{3i-1}{2n(i-1)} t$; ce qui donne la valeur de c, & par conséquent celle de r.

Pour le cas de 6 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$ pouces	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{i}{m+i} nm$	$BQ = \frac{3in}{4(i+1)}$	$BC = in$
en C	$r = cin$	$CR = \frac{i}{m} x$	$CD = \frac{4i-2}{3} u$
en D	$s = \frac{4i-2}{i+1} u$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DE = u$
en E	$t = \frac{3i}{i+1} u$	$ET = \frac{1}{4} t$	$EF = u$
en F	$u = u$	$FU = \frac{1}{4} u$	$FO = \frac{i+1}{3i} u$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = n(m+i) + \frac{(i+1)(4i+1)}{3i} u$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{3i}{4(i+1)m}$; or pour la diſtance de foyer r on a $\frac{c}{1-c} = \frac{4i-2}{3n(i-1)}$, d' où l' on doit tirer la valeur de c.

Pour le cas de 7 verres.

Poſant comme ci-deſſus $\zeta = 2$, nous aurons $\frac{c}{1-c} = \frac{5i-3}{4i-4} \times \frac{10i-2}{9i-3} \times \frac{5i+1}{6i+2} \times \frac{v}{n}$, d' où l' on doit tirer la valeur de c, alors on aura:

Du verre	Diſtance de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{i}{m+i} nm$	$BQ = \frac{in}{i+1}$	$BC = in$
en C	$r = cin$	$CR = \frac{i}{m} x$	$CD = \frac{5i-3}{4} \cdot \frac{10i-2}{9i-3} \cdot \frac{5i+1}{6i+2} \cdot v$
en D	$s = \frac{5i-3}{i+1} \cdot \frac{10i-2}{9i-3} \cdot \frac{5i+1}{6i+2} \cdot v$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DE = \frac{10i-2}{9i-3} \cdot \frac{5i+1}{6i+2} \cdot \frac{v}{2}$
en E	$t = \frac{10i-2}{i+i} \cdot \frac{5i+1}{6i+2} \cdot \frac{v}{2}$	$ET = \frac{1}{4} t$	$EF = \frac{5i+1}{6i+2} \cdot v$
en F	$u = \frac{5i+1}{i+1} \cdot \frac{v}{2}$	$FU = \frac{1}{4} u$	$FG = \frac{1}{2} \cdot v$
en G	$v = v$	$GV = \frac{1}{4} v$	$GO = \frac{i+1}{4i} \cdot v$

où le demi-diamètre du champ apparent ſera $\varphi = \frac{1}{(i+1)m}$; or afin que BQ ne ſurpaſſe point $\frac{1}{4} q$, il faut prendre $i > \frac{3m}{m-4}$.

LXXX. Donnons à i des valeurs convenables pour diminuer l'ouverture du second verre, & pour augmenter en même tems le champ apparent, & nous aurons les régles suivantes plus particulières.

Pour le cas de 5 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{3nm}{m+3}$	$BQ = \frac{3n}{8}$	$BC = 3n$
en C	$r = \frac{6nt}{2t+n}$	$CR = \frac{3x}{m}$	$CD = 4t$
en D	$s = 2t$	$DS = \frac{1}{2}t$	$DE = 2t$
en E	$t = t$	$ET = \frac{1}{4}t$	$EO = \frac{2}{3}t$

Donc la longueur de la Lunette $AO = n(m+3) + \frac{20}{3}t$, & le demidiamètre du champ apparent $\varphi = \frac{3}{8m}$, ou bien $\varphi = \frac{1289}{m}$ minutes.

Pour le cas de 6 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{5nm}{m+5}$	$BQ = \frac{5n}{8}$	$BC = 5n$
en C	$r = \frac{15nu}{3u+2n}$	$CR = \frac{5x}{m}$	$CD = 6u$

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en D	$s = 3u$	$DS = \frac{3}{4}u$	$DE = u$
en E	$t = \frac{5}{2}u$	$ET = \frac{5}{8}u$	$EF = u$
en F	$u = u$	$FU = \frac{1}{4}u$	$FO = \frac{2}{5}u$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = n(m + 5) + \frac{42}{5}u$, & le demidiamètre du champ apparent $\varphi = \frac{5}{8m}$ ou bien $\varphi = \frac{2148}{m}$ minutes.

Pour le cas de 7 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{7nm}{m+7}$	$BQ = \frac{7n}{8}$	$BC = 7n$
en C	$r = \frac{476nv}{68v+55n}$	$CR = \frac{7x}{m}$	$CD = \frac{408}{55}v$
en D	$s = \frac{204}{55}v$	$DS = \frac{51}{55}v$	$DE = \frac{51}{110}v$
en E	$t = \frac{153}{44}v$	$ET = \frac{153}{176}v$	$EF = \frac{9}{11}v$
en F	$u = \frac{9}{4}v$	$FU = \frac{9}{16}v$	$FG = \frac{1}{2}v$
en G	$v = v$	$GV = \frac{1}{4}v$	$GO = \frac{2}{7}v$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = n(m + 7) + \frac{332}{25}v$, & le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{7}{8m}$ ou bien $\varphi = \frac{3007}{m}$ minutes.

LXXXI. Si nous traitons de la même manière nos formules pour le cas de 8 verres, en ſuppoſant $i = 9$, & introduiſant la diſtance de foyer du dernier oculaire, nous trouvons les formules ſuivantes, dont la connexion avec les cas précédens eſt remarquable.

Pour le cas de 8 verres.

Du verre	Diſt. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{9nm}{m+9}$	$BQ = \frac{9n}{8}$	$BC = 9n$
en C	$r = \frac{9.1155nw}{1155w+988n}$	$CR = \frac{9x}{m}$	$CD = \frac{2310}{247}w$
en D	$s = \frac{1155}{247}w$	$DS = \frac{1155}{988}w$	$DE = \frac{231}{494}w$
en E	$t = \frac{231}{52}w$	$ET = \frac{231}{208}w$	$EF = \frac{11}{26}w$
en F	$u = \frac{99}{26}w$	$FU = \frac{99}{104}w$	$FG = \frac{11}{26}w$
en G	$v = \frac{11}{4}w$	$GV = \frac{11}{16}w$	$GH = \frac{1}{2}w$
en H	$w = w$	$HW = \frac{1}{4}w$	$HO = \frac{2}{9}w$

& le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{9}{8m}$ ou $\varphi = \frac{3867}{m}$ minutes. De là on voit que la longueur de la Lunette croît à meſure qu'on augmente le champ apparent.

AVERTISSEMENT.

Comme le Mémoire précédent ſuppoſe celui que l'Auteur a donné dans le XIII. Volume de l'Académie de Berlin, on a cru devoir en extraire les formules principales, pour les mettre ici ſous les yeux de nos Lecteurs.

FORMULES DE DIOPTRIQUE NÉCESSAIRES POUR L'INTELLIGENCE DU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

SOIENT (*fig.* * *plan.* 3) autant de lentilles qu'on voudra PP, QQ, RR &c. rangées ſur le même axe $a\,o$, de manière qu'elles forment une Lunette quelconque. Imaginons que $a\alpha$ ſoit un objet donné, & que $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$, $e\,\varepsilon$ &c. ſoient les différentes images de cet objet formées par les lentilles PP, QQ, RR &c., de ſorte que les points de l'axe b, c, d &c. ſoient les foyers des rayons qui partent du point a, & les points β, γ, δ &c., (qui ſe déterminent en tirant les perpendiculaires $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ &c., & menant enſuite les droites $\alpha A\beta$, $\beta B\gamma$, $\gamma c\delta$ &c.) ſoient les foyers des rayons qui partent du point α placé hors de l'axe. On voit aiſément que le rayon αA, qui paſſe par le centre de la lentille PP, & qui doit être regardé comme le principal de tous ceux qui partent du point α, ira rencontrer la lentille QQ en Q, que de là il paſſera par γ, & rencontrera la lentille RR en R, enſuite la lentille SS en S &c., & enfin la lentille XX en X, d'où il ſortira parallélement au rayon ηG, à cauſe que tous

tous les rayons doivent ſe trouver paralléles entr'eux au ſortir de la dernière lentille.

Soit maintenant O le point où le rayon XO coupera l'axe, ce point ſera celui où il faudra placer l'œil pour voir le point α, c'eſt-à-dire pour pouvoir découvrir un champ apparent égal à l'angle $\alpha A a$; l'angle $XOG = \eta G g$, comparé à l'angle $\alpha A a$, déterminera le groſſiſſement de la Lunette; & les parties BQ, CR, DS &c. des lentilles ſeront les ouvertures qu'il faudra leur donner pour pouvoir joüir de tout le champ $a A \alpha$.

Cela poſé ſoit: $a A \alpha = \varphi$, $a A = \infty$, $GO = k$; enſuite $\frac{Bc}{bB} = B$, $\frac{Cd}{c\mathrm{C}} = C$, $\frac{Dе}{d\mathrm{D}} = D$, $\frac{Ef}{e\mathrm{E}} = E$ &c.

Soient de plus p, q, r, s &c. les diſtances focales des lentilles PP, QQ, RR, SS &c., & πq, $\pi' r$, $\pi'' s$ &c. les demi-diamètres BQ, CR, DS &c. des ouvertures des verres QQ, RR, SS &c. en tant qu'elles contribuent au champ apparent, on aura, en faiſant pour abreger

$$\mathrm{B} = \frac{B}{B+1},\ \mathrm{C} = \frac{C}{C+1},\ \mathrm{D} = \frac{D}{D+1}\ \text{\&c.}$$

Diſtances focales
$$\begin{cases} q = \dfrac{\mathrm{B}\varphi}{\mathrm{B}\pi - \varphi}\, p \\ r = \dfrac{B\mathrm{C}\varphi}{\mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi}\, p \\ s = \dfrac{BC\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}\pi'' - \pi' + \pi - \varphi}\, p \\ \text{\&c.} \end{cases}$$

Intervalles entre les verres
$$\begin{cases} AB = \dfrac{\mathrm{B}\pi}{\mathrm{B}\pi - \varphi}\, p \\ BC = \dfrac{(B\mathrm{C}\pi' - \mathrm{B}\pi)\varphi}{(\mathrm{B}\pi - \varphi)(\mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi)}\, p \\ CD = \dfrac{B(C\mathrm{D}\pi'' - \mathrm{C}\pi')\varphi}{(\mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi)(\mathrm{D}\pi'' - \pi' + \pi - \varphi)}\, p \\ \text{\&c.} \end{cases}$$

Distances de l'œil

Pour un seul verre $\quad k = o$

Pour 2 verres $\quad k = \frac{\varphi\pi}{(B\pi - \varphi)}\, p$

Pour 3 verres $\quad k = \frac{B\varphi\pi'}{(C\pi' - \pi + \varphi)^2}\, p$

Pour 4 verres $\quad k = \frac{BC\varphi\pi''}{(D\pi'' - \pi' + \pi - \varphi)^2}\, p$

&c.

Enfin soit m le nombre qui exprime la multiplication des diamètres apparens des objets, on aura l'équation

$$\pm m = \frac{\varphi - \pi + \pi' - \pi'' + \&c.}{}$$

le signe $+$ est pour le cas, où les objets sont représentés debout, & le signe $-$ pour le cas opposé, de sorte que l'on aura :

pour le premier cas . . . $\varphi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' \,\&c.}{m - 1}$

& pour le second cas . . . $\varphi = \frac{+\pi - \pi' + \pi'' \,\&c.}{m + 1}$

Pour ce qui est de l'aberration des lentilles, on trouve;

1° Que celle qui vient de la diverse refrangibilité des rayons sera anéantie en satisfaisant à cette équation

$$o = \frac{\pi}{B\pi - \varphi} + \frac{\pi'}{C\pi' - \pi + \varphi} + \frac{\pi''}{D\pi'' - \pi' + \pi - \varphi} + \&c.$$

2° Que l'autre aberration, celle qui vient de la figure sphérique des verres, est exprimée pour chaque lentille par la formule suivante :

$$\frac{\mu x^2}{p}\left(\lambda (A + 1)^2 + \nu A\right)$$

x étant le demidiamètre de l'ouverture, A le raport de la distance entre le point rayonnant & la lentille, à la distance entre le foyer des rayons rompus & la même

lentille, μ, ν des nombres dépendans du raport de refraction dans le verre, & λ un nombre $=$ ou $>$ 1.

3° Que l' aberration étant donnée, la figure de la lentille doit être telle que l' on ait :

Rayon de la ſurface tournée vers le point lumineux $\left\{ \dfrac{p}{\rho A + \sigma(1-A) \pm \tau \sqrt{(\lambda - 1)}} \right.$

Rayon de la ſurface oppoſée $\left\{ \dfrac{p}{\sigma A + \rho(1-A) \mp \tau \sqrt{(\lambda - 1)}} \right.$

où p eſt la diſtance focale, A eſt $= \dfrac{A}{A+1}$, & ρ, σ, τ ſont des nombres, qui dépendent de la raiſon de refraction ; d' où l' on voit qu'il y a toujours deux figures à donner à une lentille, pour qu'elle produiſe une aberration donnée, excepté dans le cas où $\lambda = 1$, qui eſt celui où l'aberration eſt la moindre ; on voit de plus que le nombre λ ne peut être pris moindre que l' unité, ſans que les rayons des faces deviennent imaginaires.

4° Que l' aberration qui réſulte de toutes les lentilles enſemble eſt exprimée par

$$\frac{\mu m x^3}{4p} \times \left\{ \begin{array}{l} \lambda + \dfrac{(B+1)^2 (\lambda'(B+1) + \nu B)\varphi}{B^3 (B\pi - \varphi)} \\ \quad + \dfrac{(C+1)^2 (\lambda''(C+1) + \nu C)\varphi}{B^3 C^3 (C\pi - \pi + \varphi)} \\ \quad + \text{\&c.} \end{array} \right\}$$

λ, λ', λ'' &c. étant les valeurs de λ qui conviennent aux lentilles *PP*, *QQ*, *RR* &c.

5° Qu'enfin cette aberration ne doit pas s' étendre au delà de la fraction $\dfrac{\mu}{4 \cdot 30^3}$.

OBSERVATIONES

Circa integralia formularum

$$\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$$

Posito post integrationem $x=1$

Auctore

L. EULERO.

I. FORMULAM integralem $\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$, seu hoc modo expressam $\int\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, hic consideraturus, assumo exponentes n, p, & q esse numeros integros positivos, quandoquidem si tales non essent, facile ad hanc formam perduci possent. Deinde hujus formulæ integrale non in genere hic perpendere constitui, sed ejus tantum valorem, quem recipit, si post integrationem statuatur $x=1$, postquam scilicet integratio ita fuerit instituta, ut integrale evanescat posito $x=0$. Primum enim nullum est dubium, quin, hoc casu $x=1$, integrale multo simplicius exprimatur; ac præterea quoties in analysi ad hujusmodi formulas pervenitur, plerumque non tam integrale indefinitum, pro quocunque valore ipsius x, quam definitum valori $x=1$, utpote præcipuo desiderari solet.

II. Constat autem casu, quo post integrationem ponitur $x=1$, integrale $\int\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, hoc modo per productum infinitorum factorum exprimi, ut sit:

$$\frac{p+q}{pq}\cdot\frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)}\cdot\frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)}\cdot\frac{3n(p+q+3n)}{(p+3n)(q+3n)}\cdot\text{\&c.}$$

cujus quidem primus factor $\frac{p+q}{pq}$ non legi sequentium adstringitur. Hoc tamen non obstante perspicuum est exponentes p & q inter se esse commutabiles, ita ut sit:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$$

quæ quidem æqualitas etiam facile per se ostenditur. Verum productum istud infinitum nos ad alia multo majora perducet, quibus hæc integralia magis illustrabuntur.

III. Ut autem brevitati in scribendo consulam, neque opus habeam scripturam hujus formulæ $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ toties repetere, pro quovis exponente n ejus loco scribam $(\frac{p}{q})$, ita ut $(\frac{p}{q})$ denotet valorem formulæ integralis $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, casu quo post integrationem ponitur $x = 1$. Et quoniam vidimus esse hoc casu:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$$

manifestum est fore $(\frac{p}{q}) = (\frac{q}{p})$, ita ut pro quovis valore exponentis n, hæ expressiones $(\frac{p}{q})$ & $(\frac{q}{p})$ eandem significent quantitatem. Ita si fuerit exempli gratia $n = 4$, erit:

$$(\frac{3}{2}) = (\frac{2}{3}) = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}$$

Per productum autem infinitum habebitur.

$$(\frac{3}{2}) = (\frac{2}{3}) = \frac{5}{2.3} \cdot \frac{4.9}{6.7} \cdot \frac{8.13}{10.11} \cdot \frac{12.17}{14.15} \cdot \&c.$$

IV. Jam primum observo, si exponentes p & q fuerint majores exponente n, formulam integralem semper ad aliam

reduci posse, in qua hi exponentes infra n deprimantur. Cum enim sit:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{p-n}{p+q-n}\int \frac{x^{p-n-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$

erit, recepto hic scribendi more:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p-n}{p+q-n}\left(\frac{p-n}{q}\right)$$

quo si fuerit $p > n$, formula ad aliam, in qua exponens p minor sit quam n revocatur, quod etiam ob commutabilitatem de altero exponente q est tenendum. Quamobrem nobis has formulas examinaturis sufficiet pro quovis exponente n exponentes p & q ipso n minores accipere, quoniam his expeditis, omnes casus quibus majores habituri essent valores, eo reduci possunt.

V. Statim autem patet casus, quibus est vel $p = n$, vel $q = n$, absolute seu algebraice esse integrabiles. Si enim fuerit $q = n$, ob $\left(\frac{p}{n}\right) = \int x^{p-1}dx = \frac{x^p}{p}$, posito $x = 1$, erit $\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{p}$; similique modo $\left(\frac{n}{q}\right) = \frac{1}{q}$. Atque hi soli sunt casus, quibus integrale nostræ formulæ absolute exhiberi potest, si quidem p & q exponentem n non excedant. Reliquis casibus omnibus integratio vel quadraturam circuli, vel adeo altiores quadraturas implicabit; quas hic accuratius perpendere animus est. Post eas igitur formulas $\left(\frac{p}{n}\right)$, seu $\left(\frac{n}{p}\right)$, quarum valor absolute est $= \frac{1}{p}$, veniunt eæ, quarum valor per solam circuli quadraturam exprimitur; tum vero sequentur eæ, quæ altiorem quandam quadraturam postulant, atque has altiores quadraturas tam ad simplicissimam formam, quam ad minimum numerum revocare conabor.

VI. Cum numeri p & q exponente n minores ponantur, eæ formulæ $(\frac{p}{q})$ per ſolam circuli quadraturam integrabiles exiſtunt, in quibus eſt $p + q = n$. Sit enim $q = n - p$, & formula noſtra:

$$(\frac{p}{n-p}) = (\frac{n-p}{p}) = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^p}} = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^q}}$$

hoc producto infinito exprimetur:

$$\frac{n}{p(n-p)} \cdot \frac{n \cdot 2n}{(n+p)(2n-p)} \cdot \frac{2n \cdot 3n}{(2n+p)(3n-p)} \cdot \frac{3n \cdot 4n}{(3n+p)(4n-p)} \;\&c.$$

quod hoc modo repræſentatum:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{nn}{nn-pp} \cdot \frac{4nn}{4nn-pp} \cdot \frac{9nn}{9nn-pp} \;\&c.$$

congruit cum eo producto, quo *ſinus* angulorum expreſſi: Quare ſi π ſumatur ad ſemicirconferentiam circuli cujus radius ſit $= 1$, ſimulque menſuram duorum angulorum rectorum exhibeat, erit:

$$(\frac{p}{n-p}) = (\frac{n-p}{p}) = \frac{\pi}{n \text{ ſin. } \frac{p\pi}{n}} = \frac{\pi}{n \text{ ſin. } \frac{q\pi}{n}}.$$

VII. Ceteris caſibus, quibus neque $p = n$, neque $q = n$, neque $p + q = n$, integrale etiam neque abſolute, neque per quadraturam circuli exhiberi poteſt, ſed aliam quandam altiorem quadraturam complectitur. Neque vero ſinguli caſus diverſi peculiarem hujuſmodi quadraturam exigunt, ſed plures dantur reductiones, quibus diverſas formulas inter ſe comparare licet. Hæ autem reductiones derivantur ex producto infinito ſupra exhibito cum enim ſit:

$$(\frac{p}{q}) = \frac{p+q}{pq} \cdot \frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)} \cdot \frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)} \;\&c.$$

erit ſimili modo:

$$(\frac{p+q}{r}) = \frac{p+q+r}{(p+q)r} \cdot \frac{n(p+q+r+n)}{(p+n+n)(r+n)} \cdot \frac{2n(p+q+r+2n)}{(p+q+2n)(r+2n)} \;\&c.$$

quibus in ſe invicem ductis obtinetur:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \frac{p+q+r}{pqr}\cdot\frac{nn(p+q+r+n)}{(p+n)(q+n)(r+n)}\cdot\frac{4nn(p+q+r+2n)}{(p+2n)(q+2n)(r+2n)}\ \&c.$$

ubi ternæ quantitates p, q, r ſunt inter ſe permutabiles.

VIII. Hinc ergo permutandis his quantitatibus p, q, r conſequimur ſequentes reductiones.

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right) = \left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right).$$

unde ex datis aliquot formulis plures aliæ determinari poſſunt. Veluti ſi ſit $q+r=n$, ſeu $r=n-q$, ob $\left(\frac{q+r}{p}\right)=\frac{1}{p}$ & $\left(\frac{q}{r}\right)=\frac{\pi}{n\ \text{ſin.}\ \frac{q\pi}{n}}$ erit: $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{n-q}\right)$

$$=\frac{\pi}{n.p\ \text{ſin.}\ \frac{q\pi}{n}},$$ nec non $\left(\frac{p}{n-q}\right)\left(\frac{n+p-q}{q}\right)=\frac{\pi}{np\,\text{ſin.}\,\frac{q\pi}{n}}$

Deinde ſi ſit $p+q+r=n$, ſeu $r=n-p-q$, erit:

$$\frac{\pi}{n\ \text{ſin.}\ \frac{r\pi}{n}}\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\pi}{n\ \text{ſin.}\ \frac{q\pi}{n}}\left(\frac{p}{r}\right)=\frac{\pi}{n\ \text{ſin.}\ \frac{p\pi}{n}}\left(\frac{q}{r}\right)$$

unde inſignes reductiones aliarum ad alias oriuntur, quibus multitudo quadraturarum ad noſtrum ſcopum neceſſariarum vehementer diminuitur.

IX. Præterea vero pro p, q, r numeris determinatis aſſumendis, ſequentes adipiſcimur productorum ex binis formulis æqualitates;

$$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{2}\right)=\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)$$

$$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{1}\right)$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{3}\right)=\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{1}\right)$$

$$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$$

$\left(\frac{3}{1}\right)$

$$(\frac{3}{1})(\frac{4}{3}) = (\frac{3}{3})(\frac{6}{1})$$
$$(\frac{3}{2})(\frac{5}{3}) = (\frac{3}{3})(\frac{6}{2})$$
$$(\frac{2}{2})(\frac{4}{4}) = (\frac{4}{2})(\frac{6}{2})$$
$$(\frac{3}{1})(\frac{4}{4}) = (\frac{4}{1})(\frac{5}{3}) = (\frac{4}{3})(\frac{7}{1})$$
$$(\frac{2}{1})(\frac{5}{3}) = (\frac{5}{1})(\frac{6}{2}) = (\frac{5}{2})(\frac{7}{1})$$
$$(\frac{1}{1})(\frac{6}{2}) = (\frac{6}{1})(\frac{7}{1})$$
&c.

ubi quidem plures occurrunt, quæ jam in reliquis continentur.

X. His quaſi principiis præmiſſis formulam generalem $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, in qua numeros p & q exponentem n non ſuperare aſſumo, in claſſes ex exponente n petitas diſtinguam, ita ut valores $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ &c. claſſes primam, ſecundam, tertiam &c. ſint præbituri.

Ac prima quidem claſſis, qua $n = 1$, unicam formulam complectitur $(\frac{1}{1})$, cujus valor eſt $= 1$. Secunda claſſis, qua $n = 2$, has formulas $(\frac{1}{1})$, $(\frac{2}{1})$ & $(\frac{2}{2})$ continet, quarum evolutio per ſe eſt manifeſta. Tertia claſſis, qua $n = 3$ has habet:

$$(\frac{1}{1}), (\frac{2}{1}), (\frac{3}{1}), (\frac{2}{2}), (\frac{3}{2}), (\frac{3}{3}).$$

Quarta vero claſſis, qua $n = 4$, iſtas:

$$(\frac{1}{1}), (\frac{2}{1}), (\frac{3}{1}), (\frac{4}{1}), (\frac{2}{2}), (\frac{3}{2}), (\frac{4}{2}), (\frac{3}{3}), (\frac{4}{3}), (\frac{4}{4});$$

ſicque in ſequentibus claſſibus formularum numerus ſecun-

dum numeros trigonales crescit. Has igitur classes ordine percurramus.

$$\textit{Classis } 2^{dæ} \textit{ formæ } \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[2]{(1-x^2)^{2-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

Perspicuum hic quidem est istas formulas vel absolute, vel per quadraturam circuli exprimi: nam hæ $\left(\frac{2}{1}\right)$ & $\left(\frac{2}{2}\right)$ absolute dantur, & reliqua $\left(\frac{1}{1}\right)$ ob $1 + 1 = 2$ est $\frac{\pi}{2 \sin. \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$; si ergo brevitatis causa ponamus $\frac{\pi}{2} = \alpha$, uti scilicet in sequentibus classibus faciemus, omnes formulæ hujus classis ita definiuntur:

$$\left(\frac{2}{1}\right) = 1, \quad \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \alpha.$$

$$\textit{Classis } 3^{a} \textit{ formæ } \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

Cum hic sit $n = 3$, formula quadraturam circuli involvens est $\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\pi}{3 \sin. \frac{\pi}{3}}$, ponamus ergo $\left(\frac{2}{1}\right) = \alpha$ reliquæ autem formulæ, quæ non absolute dantur, altiorem quadraturam involvunt, & quidem unicam $\left(\frac{1}{1}\right)$, quam littera A indicemus, qua concessa valores omnium formularum hujus classis assignari poterimus:

$$\left(\frac{3}{1}\right) = 1, \quad \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{2}{1}\right) = \alpha, \quad \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\alpha}{A}$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) = A.$$

Classis 4^{ta} *formæ* $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$

Cum hic ſit $n = 4$, duas habemus formulas a quadratura circuli pendentes, quarum valores, quia ſunt cogniti, ita indicemus

$$\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{\pi}{4 \text{ ſin. } \frac{\pi}{4}} = \alpha \quad \& \quad \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4 \text{ ſin. } \frac{2\pi}{4}} = \beta.$$

Præterea vero unica opus eſt formula altiorem quadraturam involvente, qua conceſſa reliquas omnes cognoſcemus. Ponamus enim $\left(\frac{2}{1}\right) = A$, & omnes formulæ hujus claſſis ita determinabuntur:

$$\left(\frac{4}{1}\right) = 1, \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{1}{2}, \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}, \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

$$\left(\frac{3}{1}\right) = \alpha, \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\beta}{A}, \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\alpha}{2A}$$

$$\left(\frac{2}{1}\right) = A, \left(\frac{2}{2}\right) = \beta$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta}.$$

Classis $5^{tæ}$ *formæ* $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-q}}} = (\frac{p}{q})$.

Cum hic ſit $n = 5$, notemus ſtatim formulas a quadratura circuli pendentes :

$$(\frac{4}{1}) = \frac{\pi}{5 \text{ ſin. } \frac{\pi}{5}} = \alpha,\ (\frac{3}{2}) = \frac{\pi}{5 \text{ ſin. } \frac{2\pi}{5}} = \beta$$

Duabus autem inſuper novis quadraturis opus eſt huic claſſi peculiaribus, quas ita deſignemus :

$$(\frac{3}{1}) = A, \ \& \ (\frac{2}{2}) = B$$

ex quibus reliquæ omnes ita definientur :

$$(\frac{5}{1}) = 1,\ (\frac{5}{2}) = \frac{1}{2},\ (\frac{5}{3}) = \frac{1}{3},\ (\frac{5}{4}) = \frac{1}{4},\ (\frac{5}{5}) = \frac{1}{5}$$

$$(\frac{4}{1}) = \alpha,\ (\frac{4}{2}) = \frac{\beta}{A},\ (\frac{4}{3}) = \frac{\beta}{2B},\ (\frac{4}{4}) = \frac{\alpha}{3A},$$

$$(\frac{3}{1}) = A,\ (\frac{3}{2}) = \beta,\ (\frac{3}{3}) = \frac{\beta\beta}{\alpha B},$$

$$(\frac{2}{1}) = \frac{\alpha B}{\beta},\ (\frac{2}{2}) = B,$$

$$(\frac{1}{1}) = \frac{\alpha A}{\beta}.$$

Classis $6^{tæ}$ *formæ* $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^{6-q}}} = (\frac{p}{q})$.

Hic eſt $n = 6$, & formulæ quadraturam circuli involventes ſunt :

$$(\frac{5}{1}) = \frac{\pi}{6 \text{ ſin. } \frac{\pi}{6}} = \alpha,\ (\frac{4}{2}) = \frac{\pi}{6 \text{ ſin. } \frac{2\pi}{6}} = \beta,\ (\frac{3}{3}) = \frac{\pi}{6 \text{ ſin. } \frac{3\pi}{6}} = \gamma.$$

Reliquarum vero omnium valores inſuper a binis hiſce quadraturis pendent :

$$(\frac{4}{1}) = A \ \& \ (\frac{3}{2}) = B,$$

atque ita se habere deprehenduntur:

$(\frac{6}{1}) = 1, (\frac{6}{2}) = \frac{1}{2}, (\frac{6}{3}) = \frac{1}{3}, (\frac{6}{4}) = \frac{1}{4}, (\frac{6}{5}) = \frac{1}{5}, (\frac{6}{6}) = \frac{1}{6}$

$(\frac{5}{1}) = \alpha, (\frac{5}{2}) = \frac{\beta}{A}, (\frac{5}{3}) = \frac{\gamma}{2B}, (\frac{5}{4}) = \frac{\beta}{3B}, (\frac{5}{5}) = \frac{\alpha}{4A},$

$(\frac{4}{1}) = A, (\frac{4}{2}) = \beta, (\frac{4}{3}) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}, (\frac{4}{4}) = \frac{\beta\gamma A}{2\alpha BB},$

$(\frac{3}{1}) = \frac{\alpha B}{\beta}, (\frac{3}{2}) = B, (\frac{3}{3}) = \gamma,$

$(\frac{2}{1}) = \frac{\alpha B}{\gamma}, (\frac{2}{2}) = \frac{\alpha BB}{\gamma A},$

$(\frac{1}{1}) = \frac{\alpha A}{\beta}.$

Classis $7^{mæ}$ *formæ* $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[7]{(1-x^7)^{7-q}}} = (\frac{p}{q}).$

Quia $n = 7$, formulæ a quadratura circuli pendentes ita designentur:

$$(\frac{6}{1}) = \frac{\pi}{7 \text{ sin. } \frac{\pi}{7}} = \alpha, (\frac{5}{2}) = \frac{\pi}{7 \text{ sin. } \frac{2\pi}{7}} = \beta, (\frac{4}{3}) = \frac{\pi}{7 \text{ sin. } \frac{3\pi}{7}} = \gamma$$

præterea vero hæ quadraturæ introducantur:

$$(\frac{5}{1}) = A, (\frac{4}{2}) = B, (\frac{3}{3}) = C$$

quibus datis omnes formulæ ita determinabuntur:

$(\frac{7}{1}) = 1, (\frac{7}{2}) = \frac{1}{2}, (\frac{7}{3}) = \frac{1}{3}, (\frac{7}{4}) = \frac{1}{4}, (\frac{7}{5}) = \frac{1}{5}, (\frac{7}{6}) = \frac{1}{6}, (\frac{7}{7}) = \frac{1}{7},$

$(\frac{6}{1}) = \alpha, (\frac{6}{2}) = \frac{\beta}{A}, (\frac{6}{3}) = \frac{\gamma}{2B}, (\frac{6}{4}) = \frac{\gamma}{3C}, (\frac{6}{5}) = \frac{\beta}{4B}, (\frac{6}{6}) = \frac{\alpha}{5A},$

$(\frac{5}{1}) = A, (\frac{5}{2}) = \beta, (\frac{5}{3}) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}, (\frac{5}{4}) = \frac{\gamma\gamma A}{2\alpha BC}, (\frac{5}{5}) = \frac{\beta\gamma A}{3\alpha BC},$

$(\frac{4}{1}) = \frac{\alpha B}{\beta}, (\frac{4}{2}) = B, (\frac{4}{3}) = \gamma, (\frac{4}{4}) = \frac{\gamma\gamma}{\alpha C};$

$(\frac{3}{1}) = \frac{\alpha C}{\gamma}, (\frac{3}{2}) = \frac{\alpha BC}{\gamma A}, (\frac{3}{3}) = C;$

$(\frac{2}{1}) = \frac{\alpha B}{\gamma}, (\frac{2}{2}) = \frac{\alpha\beta BC}{\gamma\gamma A};$

$(\frac{1}{1}) = \frac{\alpha A}{\beta}.$

Classis 8^{vae} *formæ* $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[8]{(1-x^8)^{8-q}}} = (\frac{p}{q})$

Quia hic eſt $n = 8$, formula quadraturam circuli implicantes erunt:

$$(\frac{7}{1}) = \frac{\pi}{8 \text{ ſin. } \frac{\pi}{8}} = \alpha, (\frac{6}{2}) = \frac{\pi}{8 \text{ ſin. } \frac{2\pi}{8}} = \beta,$$

$$(\frac{5}{3}) = \frac{\pi}{8 \text{ ſin. } \frac{3\pi}{8}} = \gamma, (\frac{4}{4}) = \frac{\pi}{8 \text{ ſin. } \frac{4\pi}{8}} = \delta$$

Nunc vero tres frequentes formulæ tanquam cognitæ ſpectentur:

$$(\frac{6}{1}) = A, (\frac{5}{2}) = B, \& (\frac{4}{3}) = C$$

atque ex his omnes formulæ hujus claſſis ita determinabuntur.

$$(\frac{8}{1}) = 1, (\frac{8}{2}) = \frac{1}{2}, (\frac{8}{3}) = \frac{1}{3}, (\frac{8}{4}) = \frac{1}{4}, (\frac{8}{5}) = \frac{1}{5},$$

$$(\frac{8}{6}) = \frac{1}{6}, (\frac{8}{7}) = \frac{1}{7}, (\frac{8}{8}) = \frac{1}{8};$$

$$(\frac{7}{1}) = \alpha, (\frac{7}{2}) = \frac{\beta}{A}, (\frac{7}{3}) = \frac{\gamma}{2B}, (\frac{7}{4}) = \frac{\delta}{3C}, (\frac{7}{5}) = \frac{\gamma}{4C},$$

$$(\frac{7}{6}) = \frac{\beta}{5B}, (\frac{7}{7}) = \frac{\alpha}{6A};$$

$$\left(\frac{6}{1}\right)=A,\ \left(\frac{6}{2}\right)=\beta,\ \left(\frac{6}{3}\right)=\frac{\beta\gamma}{\alpha B},\ \left(\frac{6}{4}\right)=\frac{\gamma\delta A}{2\alpha BC},\ \left(\frac{6}{5}\right)=\frac{\gamma\delta A}{3\alpha CC},$$

$$\left(\frac{6}{6}\right)=\frac{\beta\gamma A}{4\alpha BC};$$

$$\left(\frac{5}{1}\right)=\frac{\alpha B}{\beta},\ \left(\frac{5}{2}\right)=B,\ \left(\frac{5}{3}\right)=\gamma,\ \left(\frac{5}{4}\right)=\frac{\gamma\delta}{\alpha C},\ \left(\frac{5}{5}\right)=\frac{\gamma\gamma\delta A}{2\alpha\beta CC};$$

$$\left(\frac{4}{1}\right)=\frac{\alpha C}{\beta},\ \left(\frac{4}{2}\right)=\frac{\alpha BC}{\gamma A},\ \left(\frac{4}{3}\right)=C,\ \left(\frac{4}{4}\right)=\delta;$$

$$\left(\frac{3}{1}\right)=\frac{\alpha C}{\delta},\ \left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\alpha\beta CC}{\gamma\delta A},\ \left(\frac{3}{3}\right)=\frac{\alpha CC}{\delta A};$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)=\frac{\alpha B}{\gamma},\ \left(\frac{2}{2}\right)=\frac{\alpha\beta BC}{\gamma\delta A};$$

$$\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\alpha A}{\beta};$$

Hinc iſtas reductiones ad ſequentes claſſes, quouſque libuerit , continuare licet. Quemadmodum ergo hinc in genere ſingularum formularum integralia ſe ſint habitura exponamus.

Evolutio formæ generalis $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$

Primo ergo abſolute integrabiles ſunt hæ formulæ :

$$\left(\frac{n}{1}\right)=1,\ \left(\frac{n}{2}\right)=\frac{1}{2},\ \left(\frac{n}{3}\right)=\frac{1}{3},\ \left(\frac{n}{4}\right)=\frac{1}{4},\ \text{\&c.}$$

deinde formulæ a quadratura circuli pendentes ſunt :

$$\left(\frac{n-1}{1}\right)=\alpha,\ \left(\frac{n-2}{2}\right)=\beta,\ \left(\frac{n-3}{3}\right)=\gamma,\ \left(\frac{n-4}{4}\right)=\delta\ \text{\&c.}$$

quarum quantitatum progreſſio tandem in ſe revertitur cum ſit etiam :

$$\left(\frac{4}{n-4}\right)=\delta,\ \left(\frac{3}{n-3}\right)=\gamma,\ \left(\frac{2}{n-2}\right)=\beta,\ \left(\frac{1}{n-1}\right)=\alpha.$$

Præterea vero altiores quadraturæ in ſubſidium vocari debent , quæ ita repræſententur :

$(\frac{n-2}{1}) = A, (\frac{n-3}{2}) = B, (\frac{n-4}{3}) = C, (\frac{n-5}{4}) = D$ &c.

quarum numerum quovis casu sponte determinatur, quia hæ formulæ tandem in se revertuntur.

His autem formulis admissis omnes omnino ad eandem classem pertinentes definiri poterunt. Habebimus autem a formula $(\frac{n-1}{1}) = \alpha$, uti supra istas formulas ordinavimus, deorsum descendendo:

$$(\frac{n-1}{1}) = \alpha, (\frac{n-2}{1}) = A, (\frac{n-3}{1}) = \frac{\alpha B}{\beta}, (\frac{n-4}{1}) = \frac{\alpha C}{\gamma},$$
$$(\frac{n-5}{1}) = \frac{\alpha D}{\delta}, (\frac{n-6}{1}) = \frac{\alpha E}{\varepsilon} \text{ \&c.}$$

qui valores retro sumti ita se habent:

$$(\frac{1}{1}) = \frac{\alpha A}{\beta}, (\frac{2}{1}) = \frac{\alpha B}{\gamma}, (\frac{3}{1}) = \frac{\alpha C}{\delta}, \text{ \&c.}$$

Tum vero ab eadem formula $(\frac{n-1}{1}) = \alpha$ horizontaliter progrediendo definiuntur istæ formulæ:

$$(\frac{n-1}{1}) = \alpha, (\frac{n-1}{2}) = \frac{\beta}{A}, (\frac{n-1}{3}) = \frac{\gamma}{2B}, (\frac{n-1}{4}) = \frac{\delta}{3C} \text{ \&c.}$$

quarum ultima erit $(\frac{n-1}{n-1}) = \frac{\alpha}{(n-2)A}$, penultima $(\frac{n-1}{n-2}) = \frac{\beta}{(n-3)B}$, antepenultima $(\frac{n-1}{n-3}) = \frac{\gamma}{(n-4)C}$ &c.

Simili modo a formula $(\frac{n-2}{2}) = \beta$ tam descendendo, quam progrediendo horizontaliter valores aliarum impetrabimus, ac descendendo quidem:

$$(\frac{n-2}{2}) = \beta, (\frac{n-3}{2}) = B, (\frac{n-4}{2}) = \frac{\alpha BC}{\gamma A}, (\frac{n-5}{2}) = \frac{\alpha\beta CD}{\gamma\delta A},$$
$$(\frac{n-6}{2}) = \frac{\alpha\beta DE}{\delta\varepsilon A}, (\frac{n-7}{2}) = \frac{\alpha\beta EF}{\varepsilon\zeta A} \text{ \&c.}$$

ubi

ubi erit ultima $(\frac{2}{2}) = \frac{\alpha\beta BC}{\gamma\delta A}$, penultima $(\frac{3}{2}) = \frac{\alpha\beta CD}{\delta\epsilon A}$ &c.; at horizontaliter progrediendo:

$$(\frac{n-2}{2}) = \beta,\ (\frac{n-2}{3}) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B},\ (\frac{n-2}{4}) = \frac{\gamma\delta A}{2\alpha BC},\ (\frac{n-2}{5}) = \frac{\delta\epsilon A}{3\alpha CD},\ (\frac{n-2}{6}) = \frac{\epsilon\zeta A}{4\alpha DE},\ (\frac{n-2}{7}) = \frac{\zeta\eta A}{5\alpha EF}\ \&c.$$

quarum erit ultima $(\frac{n-2}{n-2}) = \frac{\beta\gamma A}{(n-4)\alpha BC}$, penultima $(\frac{n-2}{n-3}) = \frac{\gamma\delta A}{(n-5)\alpha CD}$ &c.

Porro a formula $(\frac{n-3}{n-3}) = \gamma$ descendendo pervenimus ad has formulas:

$$(\frac{n-3}{3}) = \gamma,\ (\frac{n-4}{3}) = C,\ (\frac{n-5}{3}) = \frac{\alpha CD}{\delta A},\ (\frac{n-6}{3}) = \frac{\alpha\beta CDE}{\delta\epsilon AB},$$
$$(\frac{n-7}{3}) = \frac{\alpha\beta\gamma DEF}{\delta\epsilon\zeta AB},\ (\frac{n-8}{3}) = \frac{\alpha\beta\gamma EFG}{\epsilon\zeta\eta AB}\ \&c.$$

& horizontaliter progrediendo:

$$(\frac{n-3}{3}) = \gamma,\ (\frac{n-3}{4}) = \frac{\gamma\delta}{\alpha C},\ (\frac{n-3}{5}) = \frac{\gamma\delta\epsilon A}{2\alpha\beta CD},\ (\frac{n-3}{6}) = \frac{\delta\epsilon\zeta AB}{3\alpha\beta CDE},$$
$$(\frac{n-3}{7}) = \frac{\epsilon\zeta\eta AB}{4\alpha\beta DEF},\ (\frac{n-3}{8}) = \frac{\zeta\eta\theta AB}{5\alpha\beta EFG}\ \&c.$$

Pari modo a formula $(\frac{n-4}{4}) = \delta$ descendendo nanciscimur:

$$(\frac{n-4}{4}) = \delta,\ (\frac{n-5}{4}) = D,\ (\frac{n-6}{4}) = \frac{\alpha DE}{\epsilon A},\ (\frac{n-7}{4}) = \frac{\alpha\beta DEF}{\epsilon\zeta AB},$$
$$(\frac{n-8}{4}) = \frac{\alpha\beta\gamma DEFG}{\epsilon\zeta\eta ABC},\ (\frac{n-9}{4}) = \frac{\alpha\beta\gamma\delta EFGH}{\epsilon\zeta\eta\theta ABC}\ \&c.$$

& horizontaliter progrediendo:

$$(\frac{n-4}{4}) = \delta,\ (\frac{n-4}{5}) = \frac{\delta\epsilon}{\alpha D},\ (\frac{n-4}{6}) = \frac{\delta\epsilon\zeta A}{2\alpha\beta DE},\ (\frac{n-4}{7}) = \frac{\delta\epsilon\zeta\eta AB}{3\alpha\beta\gamma DEF},$$

$$(\frac{n-4}{8}) = \frac{\varepsilon\zeta\eta\theta ABC}{4\alpha\beta\gamma DEFG}, (\frac{n-4}{9}) = \frac{\zeta\eta\theta\iota ABC}{5\alpha\beta\gamma EFGH} \text{ \&c.}$$

Atque hac ratione tandem omnium formularum valores reperiuntur.

Accommodemus has generales reductiones ad

$$\textit{Classem } 9^{na} \textit{ formulæ } \int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[9]{(1-x^9)^{9-q}}} = (\frac{p}{q})$$

Ubi ob $n = 9$ formulæ quadraturam circuli involventes erunt:

$$(\frac{8}{1}) = \alpha, (\frac{7}{2}) = \beta, (\frac{6}{3}) = \gamma, (\frac{5}{4}) = \delta;$$

hinc $\varepsilon = \delta$, $\zeta = \gamma$, $\eta = \beta$, $\theta = \alpha$.

Deinde novæ quadraturæ huc requisitæ ponantur:

$$(\frac{7}{1}) = A, (\frac{6}{2}) = B, (\frac{5}{3}) = C, (\frac{4}{4}) = D;$$

sicque erit $E = C$, $F = B$, & $G = A$; atque his quatuor valoribus concessis omnium formularum nonæ classis valores assignari poterunt, quos simili ordine, ut hactenus fecimus, repræsentemus.

$$(\frac{9}{1}) = 1, (\frac{9}{2}) = \frac{1}{2}, (\frac{9}{3}) = \frac{1}{3}, (\frac{9}{4}) = \frac{1}{4}, (\frac{9}{5}) = \frac{1}{5},$$

$$(\frac{9}{6}) = \frac{1}{6}, (\frac{9}{7}) = \frac{1}{7}, (\frac{9}{8}) = \frac{1}{8}, (\frac{9}{9}) = \frac{1}{9};$$

$$(\frac{8}{1}) = \alpha, (\frac{8}{2}) = \frac{\beta}{A}, (\frac{8}{3}) = \frac{\gamma}{2B}, (\frac{8}{4}) = \frac{\delta}{3C}, (\frac{8}{5}) = \frac{\delta}{4D},$$

$$(\frac{8}{6}) = \frac{\gamma}{5C}, (\frac{8}{7}) = \frac{\beta}{6B}, (\frac{8}{8}) = \frac{\alpha}{7A};$$

$$(\frac{7}{1}) = A, (\frac{7}{2}) = \beta, (\frac{7}{3}) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}, (\frac{7}{4}) = \frac{\gamma\delta A}{2\alpha BC}, (\frac{7}{5}) = \frac{\delta\delta A}{3\alpha CD},$$

$$(\frac{7}{6}) = \frac{\gamma\delta A}{4\alpha CD}, (\frac{7}{7}) = \frac{\beta\gamma\alpha}{5\alpha BC};$$

$$(\frac{6}{1}) = \frac{\alpha B}{\beta},\ (\frac{6}{2}) = B,\ (\frac{6}{3}) = \gamma,\ (\frac{6}{4}) = \frac{\gamma\delta}{\alpha C},\ (\frac{6}{5}) = \frac{\gamma\delta\delta A}{2\alpha\beta CD},$$

$$(\frac{6}{6}) = \frac{\gamma\delta\delta AB}{3\alpha\beta CCD};$$

$$(\frac{5}{1}) = \frac{\alpha C}{\gamma},\ (\frac{5}{2}) = \frac{\alpha BC}{\gamma A},\ (\frac{5}{3}) = C,\ (\frac{5}{4}) = \delta,\ (\frac{5}{5}) = \frac{\delta\delta}{\alpha D};$$

$$(\frac{4}{1}) = \frac{\alpha D}{\delta},\ (\frac{4}{2}) = \frac{\alpha\beta CD}{\gamma\delta A},\ (\frac{4}{3}) = \frac{\alpha CD}{\delta A},\ (\frac{4}{4}) = D;$$

$$(\frac{3}{1}) = \frac{\alpha C}{\delta},\ (\frac{3}{2}) = \frac{\alpha\beta CD}{\delta\delta A},\ (\frac{3}{3}) = \frac{\alpha\beta CCD}{\delta\delta AB};$$

$$(\frac{2}{1}) = \frac{\alpha B}{\gamma},\ (\frac{2}{2}) = \frac{\alpha\beta BC}{\gamma\delta A};$$

$$(\frac{1}{1}) = \frac{\alpha A}{\beta}.$$

Ordo harum formularum etiam in genere diagonaliter a ſiniſtra ad dextram procedendo notari meretur, ubi quidem duo genera progreſſionum occurrunt, prout vel a prima ſerie verticali, vel a ſuprema horizontali incipimus; hoc modo primum a ſerie verticali incipiendo:

$$(\frac{n-1}{1}) = \alpha,\ (\frac{n-2}{2}) = \frac{\beta}{\alpha}\times(\frac{n-1}{1}),\ (\frac{n-3}{3}) = \frac{\gamma}{\beta}\times(\frac{n-2}{2}),\ (\frac{n-4}{4}) = \frac{\delta}{\gamma}\times(\frac{n-3}{3})\ \text{\&c.}$$

$$(\frac{n-2}{1}) = A,\ (\frac{n-3}{2}) = \frac{B}{A}\times(\frac{n-2}{1}),\ (\frac{n-4}{3}) = \frac{C}{B}\times(\frac{n-3}{2}),\ (\frac{n-5}{4}) = \frac{D}{C}\times(\frac{n-4}{3})$$

$$(\frac{n-3}{1}) = \frac{\alpha B}{\beta},\ (\frac{n-4}{2}) = \frac{\beta C}{\gamma A}\times(\frac{n-3}{1}),\ (\frac{n-5}{3}) = \frac{\gamma D}{\delta B}\times(\frac{n-4}{2}),\ (\frac{n-6}{4}) = \frac{\delta E}{\varepsilon C}\times(\frac{n-5}{3})$$

$$(\frac{n-4}{1}) = \frac{\alpha C}{\gamma},\ (\frac{n-5}{2}) = \frac{\beta D}{\delta A}\times(\frac{n-4}{1}),\ (\frac{n-6}{3}) = \frac{\gamma E}{\varepsilon B}\times(\frac{n-5}{2}),\ (\frac{n-7}{4}) = \frac{\delta F}{\zeta C}\times(\frac{n-6}{3})$$

$$(\frac{n-5}{1}) = \frac{\alpha D}{\delta},\ (\frac{n-6}{2}) = \frac{\beta E}{\varepsilon A}\times(\frac{n-5}{1}),\ (\frac{n-7}{3}) = \frac{\gamma F}{\zeta B}\times(\frac{n-6}{2}),\ (\frac{n-8}{4}) = \frac{\delta G}{\eta C}\times(\frac{n-7}{3})$$

$$(\frac{n-6}{1}) = \frac{\alpha E}{\varepsilon},\ (\frac{n-7}{2}) = \frac{\beta F}{\zeta A}\times(\frac{n-6}{1}),\ (\frac{n-8}{3}) = \frac{\gamma G}{\eta B}\times(\frac{n-7}{2}),\ (\frac{n-9}{4}) = \frac{\delta H}{\theta C}\times(\frac{n-8}{3})$$

&c.

Deinde a ſuprema horizontali incipiendo:

$$\left(\frac{n}{1}\right) = 1,\ \left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{\beta}{A}\times\left(\frac{n}{1}\right), \left(\frac{n-2}{3}\right) = \frac{\gamma A}{\alpha B}\times\left(\frac{n-1}{2}\right), \left(\frac{n-3}{4}\right) = \frac{\delta B}{\beta C}\times\left(\frac{n-2}{3}\right)$$

$$\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2},\ \left(\frac{n-1}{3}\right) = \frac{\gamma}{B}\times\left(\frac{n}{2}\right), \left(\frac{n-2}{4}\right) = \frac{\delta A}{\alpha C}\times\left(\frac{n-1}{3}\right), \left(\frac{n-3}{5}\right) = \frac{\varepsilon B}{\beta D}\times\left(\frac{n-2}{4}\right)$$

$$\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{1}{3},\ \left(\frac{n-1}{4}\right) = \frac{\delta}{C}\times\left(\frac{n}{3}\right), \left(\frac{n-2}{5}\right) = \frac{\varepsilon A}{\alpha D}\times\left(\frac{n-1}{4}\right), \left(\frac{n-3}{6}\right) = \frac{\zeta B}{\beta E}\times\left(\frac{n-2}{5}\right)$$

$$\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{1}{4},\ \left(\frac{n-1}{5}\right) = \frac{\varepsilon}{D}\times\left(\frac{n}{4}\right), \left(\frac{n-2}{6}\right) = \frac{\zeta A}{\alpha E}\times\left(\frac{n-1}{5}\right), \left(\frac{n-3}{7}\right) = \frac{\eta B}{\beta F}\times\left(\frac{n-2}{6}\right)$$

$$\left(\frac{n}{5}\right) = \frac{1}{5},\ \left(\frac{n-1}{6}\right) = \frac{\zeta}{E}\times\left(\frac{n}{5}\right), \left(\frac{n-2}{7}\right) = \frac{\eta A}{\alpha F}\times\left(\frac{n-1}{6}\right), \left(\frac{n-3}{8}\right) = \frac{\theta B}{\beta G}\times\left(\frac{n-2}{7}\right)$$

&c.

Ubi lex, qua hæ formulæ a ſe invicem pendent, ſatis eſt perſpicua; ſi modo notemus, in utraque litterarum ſerie α, β, γ, δ &c. & A, B, C, D &c. terminos primum antecedentes inter ſe eſſe æquales.

Concluſio.

Cum igitur formulas ſecundæ claſſis, ſola conceſſa circuli quadratura, exhibere valeamus, formulæ tertiæ claſſis inſuper requirunt quadraturam contentam vel hac formula
$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = A, \text{ vel hac } \int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{\alpha}{A}$$
quandoquidem, data una, ſimul altera datur. Quod ſi iſtas formulas per productum infinitum exprimamus, earum valor reperitur:
$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{2}{1}\cdot\frac{3.5}{4.4}\cdot\frac{6.8}{7.7}\cdot\frac{9.11}{10.10}\cdot\frac{12.14}{13.13}\ \&c.$$
unde ejus quantitas vero proxime ſatis expedite colligi poteſt; ſimili modo eſt:
$$\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = 1\cdot\frac{3.7}{5.5}\cdot\frac{6.10}{8.8}\cdot\frac{9.13}{11.11}\cdot\frac{12.16}{14.14}\ \&c.$$

Deinde omnes formulas quartæ classis integrare poterimus si modo, præter circuli quadraturam, una ex his quatuor formulis fuerit cognita: $(\frac{2}{1})$, $(\frac{1}{1})$, $(\frac{3}{2})$, $(\frac{3}{3})$, quæ præbent has formas:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = A;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{\alpha A}{\beta}; \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} = \frac{\alpha}{2A};$$

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)}} = \frac{\beta}{A};$$

at per productum infinitum erit

$$A = \frac{3}{1.2} \cdot \frac{4.7}{5.6} \cdot \frac{8.11}{9.10} \cdot \frac{12.15}{13.14} \cdot \frac{16.19}{17.18} \ \&c.$$

Quinta classis postulat duas quadraturas altiores: $(\frac{3}{1}) = A$, & $(\frac{2}{2}) = B$, quarum loco aliæ binæ ab his pendentes assumi possunt, quæ quidem faciliores videantur, etsi ob 5 numerum primum aliæ aliis vix simpliciores reputari queant.

Pro sexta classe etiam duæ quadraturæ requiruntur: $(\frac{4}{1}) = A$ & $(\frac{3}{2}) = B$. Verum hic loco alterius ea, quæ in tertia classe opus erat, assumi potest, ut unica tantum nova sit adhibenda. Cum enim sit

$$(\frac{2}{2}) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{\alpha BB}{\gamma A}$$

erit $\frac{2\alpha BB}{\gamma A} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$, quæ est formula ad classem tertiam requisita. Hac ergo data, si insuper innotescat formula:

$(\frac{3}{2}) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = B$, vel etiam hæc $(\frac{4}{3}) = \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)}} = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}$, quæ ſunt ſimpliciſſimæ in hoc genere, reliquæ omnes per has definiri poterunt. His autem combinatis patet fore:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)}} = \frac{6\beta\gamma}{\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Simili modo ex formulis quartæ claſſis colligitur:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2}$$

cujuſmodi Theorematum ingens multitudo hinc deduci poteſt: inter quæ hoc imprimis eſt notabile:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{(1-x^n)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)}} = \frac{\pi \,\text{ſin.}\, \frac{(m-n)\pi}{mn}}{(m-n)\,\text{ſin.}\,\frac{\pi}{m} \cdot \text{ſin.}\,\frac{\pi}{n}}$$

quod, ſi m & n ſint numeri fracti, in hanc formam tranſmutatur:

$$\int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[r]{(1-x^p)^s}} \cdot \int \frac{x^{s-1}\,dx}{\sqrt[p]{(1-x^r)^q}} = \frac{\pi \,\text{ſin.}\, (\frac{s}{r} - \frac{q}{p})\,\pi}{(ps-qr)\,\text{ſin.}\,\frac{q}{p}\pi \cdot \text{ſin.}\,\frac{s}{p}\,\pi}$$

In genere vero eſt;

$$(\frac{n-p}{q}) \cdot (\frac{n-q}{p}) = \frac{(\frac{n-p}{p})\;(\frac{n-q}{q})}{(q-p)\;(\frac{n-q+p}{q-p})}$$

quod hanc formam præbet:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^q}} \cdot \int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^p}} = \frac{\pi \text{ſin.} \frac{(q-p)\pi}{n}}{n(q-p)\,\text{ſin.} \frac{p\pi}{n} \cdot \text{ſin.} \frac{q\pi}{n}}$$

unde non ſolum præcedentia Theoremata, ſed alia plura facile derivantur. Poſito enim $n = \frac{pq}{m}$ habebimus:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[p]{(1-x^q)^m}} \cdot \int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[q]{(1-x^p)^m}} = \frac{\pi \text{ſin.} \left(\frac{m}{p} - \frac{m}{q}\right)\pi}{m(q-p)\,\text{ſin.} \frac{m\pi}{q} \cdot \text{ſin.} \frac{m\pi}{p}}$$

quam ita latius extendere licet:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^q}} \cdot \int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[m]{(1-x^n)^p}} = \frac{\pi \text{ſin.} \left(\frac{q}{n} - \frac{p}{m}\right)\pi}{(mq-np)\,\text{ſin.} \frac{p}{m}\pi \cdot \text{ſin.} \frac{q}{n}\pi}$$

in qua ſi ponatur $n = 2q$ erit:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^m)}} \cdot \int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[m]{(1-x^{2q})^p}} = \frac{\pi \text{coſ.} \frac{p}{m}\pi}{q(m-2p)\,\text{ſin.} \frac{p}{m}\pi}$$

At in poſteriori formula integrali ſi ponatur $x^{2q} = 1 - y^m$ erit: $\int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[m]{(1-x^{2q})^p}} = \frac{m}{2q} \int \frac{y^{m-p-1}\,dy}{\sqrt{(1-y^m)}}$, unde ſcripto x pro y

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^m)}} \cdot \int \frac{x^{m-p-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^m)}} = \frac{2\pi \text{coſ.} \frac{p}{m}\pi}{m(m-2p)\,\text{ſin.} \frac{p}{m}\pi}$$

Simili modo ſi in genere ponatur, pro altera formula integrali, $1 - x^n = y^m$, fiet: $\int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[m]{(1-x^n)^p}} = \frac{m}{n} \int \frac{y^{m-p-1}\,dy}{\sqrt[n]{(1-y^m)^{n-q}}}$; unde, ſcripto iterum x pro y, obtinebitur:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^q}} \cdot \int \frac{x^{m-p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^{n-q}}} = \frac{n\pi \,\text{ſin.}\, (\frac{q}{n} - \frac{p}{m})\,\pi}{m(mq-np)\,\text{ſin.}\,\frac{p}{m}\pi \cdot \text{ſin.}\,\frac{q}{n}\pi}$$

qui valor reducitur ad: $\frac{n\pi}{m(mq-np)} (\text{cot.}\,\frac{p}{m}\pi - \text{cot.}\,\frac{q}{n}\pi)$.

Atque hinc iſta forma concinnior reſultat:

$$\int \frac{x^{\frac{m-r}{2}-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^{\frac{n-s}{2}}}} \cdot \int \frac{x^{\frac{m+r}{2}-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^{\frac{n+s}{2}}}} = \frac{2\,n\,\pi\,(\text{tang.}\,\frac{r\pi}{2m} - \text{tang.}\,\frac{s\pi}{2n})}{m\,(nr-ms)}$$

Cum fundamentum harum reductionum ſitum ſit in hac æqualitate: $(\frac{n-p}{q})\,(\frac{n-q}{p}) = \frac{(\frac{n-p}{p})\,(\frac{n-q}{q})}{(q-p)\,(\frac{n-q+p}{q-p})}$,

quæ ad hanc formam reducitur:

$$(\frac{n-p}{q})\,(\frac{n-q}{p})\,(\frac{n-q+p}{q-p}) = (\frac{n}{q-p})\,(\frac{n-p}{p})\,(\frac{n-q}{q})$$

ejus veritas hoc modo directe oſtendi poteſt.

Sumtis in reductione §. VIII. tradita pro numeris ternis p, q, r his $n-q$, $q-p$, q habebimus:

$$(\frac{n-q}{q-p})\,(\frac{n-p}{q}) = (\frac{n-q}{q})\,(\frac{n}{q-p})$$

tum vero ſumtis eorum loco $n-q$, $q-p$, p erit

$$(\frac{n-q}{p})\,(\frac{n-q+p}{q-p}) = (\frac{n-q}{q-p})\,(\frac{n-p}{p})$$

quibus

quibus æquationibus in ſe invicem ductis, & formula $(\frac{n-q}{q-p})$ utrinque communi per diviſionem ſublata, erit:

$$(\frac{n-p}{q})\cdot(\frac{n-q}{p})(\frac{n-q+p}{q-p})=(\frac{n}{q-p})(\frac{n-p}{p})(\frac{n-q}{q}).$$

Quin etiam hujuſmodi ternarum æqualitas ab exponente n non pendens exhiberi poteſt, ſcilicet:

$$(\frac{s}{p})(\frac{r+s}{q})(\frac{p+s}{r})=(\frac{r+s}{p})(\frac{s}{q})(\frac{q+s}{r})=(\frac{r}{p})(\frac{r+s}{q})$$
$$(\frac{p+r}{s})=(\frac{r+s}{p})(\frac{r}{q})(\frac{q+r}{s}),$$ quæ quatuor adeo litteras ab n non pendentes involvit, ac ſimili eſt æqualitati inter binarum formularum producta:

$$(\frac{r}{p})(\frac{p+r}{q})=(\frac{q+r}{p})(\frac{r}{q})=(\frac{q}{p})(\frac{p+q}{r}).$$

Æqualitas autem inter ternarum formularum producta habetur etiam iſta:

$$(\frac{p}{q})(\frac{r}{s})(\frac{p+q}{r+s})=(\frac{q}{r})(\frac{s}{p})(\frac{q+r}{p+s})=(\frac{p}{r})(\frac{q}{s})(\frac{p+r}{q+s})=$$
$$(\frac{p}{q})(\frac{p+q}{r})(\frac{p+q+r}{s})=(\frac{p}{q})(\frac{p+q}{s})(\frac{p+q+s}{r})\ \&c.$$

In his enim litteræ p, q, r, s utrumque inter ſe permutari poſſunt.

Fautes à corriger dans les Mémoires précédens.

Page 1 ligne 8 après *fig.* 1. ajoutez *Pl.* 1.
P. 15 l. 19 au lieu de $\Delta : (x + ct)$ lisez $\Delta : (x - ct)$.
P. 22 l. 3 à compter d'en bas à la fin mettez o au lieu de σ.
P. 25 l. 4 au lieu de *plusieurs* lisez *différens*.
P. 27 l. 10 après *fig.* 1. ajout. *Pl.* 11.
P. 38 l. 2 à compter d'en bas au lieu de $5n + \beta$ lisez $5n + 6$.
P. 40 dans la troisiéme colonne au lieu de $n + 1$ au dénom. lisez $2n + 1$,

Ibid. dern. ligne au lieu de $\frac{1}{\gamma}$ lisez $\frac{1}{\lambda}$.

P. 42 ligne dern. au lieu de $(2\mu - 5)$ au numer. lisez $(2\mu - 6)$.
P. 46 l. 8 à compter d'en bas au lieu de $x(\Delta - x\Gamma)$ lisez $x(x\Delta - x\Gamma)$.
P. 47 l. 5 à compt. d'en bas au lieu de $(x'\delta' = x''\gamma'')$ lis. $(x'\delta' - x''\gamma'')$.
P. 52 l. 18 au lieu de $- v . x\Delta$ lisez $- v . x\Gamma + v . x\Delta$.
P. 53 l. 5 à compt. d'en bas au lieu de $- ib(\beta v - x\Delta)$ lis. $- ib(bv - x\Delta)$.
P. 54 l. 3 à compter d'en bas au lieu de $2m'x''\gamma''$ lisez $amx''\gamma'$.
P. 58 l. 4 au lieu de $18\pi\pi$ au numer. lisez $13\pi\pi$, & ligne suiv. au lieu de 36π au dénom. lisez $36\pi^3$.
P. 66 l. 6 à la fin ajoutez *AC*.

P. 79 l. 15 au lieu de $M = \frac{1}{2}\Gamma : (p - 2x)$ lisez $M = \frac{1}{2}\Gamma : p + \frac{1}{2}\Gamma : (p - 2x)$.

P. 94 l. 8 au lieu de $- \frac{\pi + \pi' - \pi''}{m - 1}$ lisez $\frac{- \pi + \pi' - \pi''}{m - 1}$, & l. 4 à compt. d'en bas au lieu de $- \pi\varphi$ lisez $- \pi + \varphi$.
P. 96 l. 2 au commenc. au lieu de *t* lisez *s*.

P. 102 l. 2 au lieu de $- \frac{\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m - 1}$ lisez $\frac{- \pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m - 1}$, & ligne 4 au lieu de π mettez π'.
P. 103 l. 3 à compter d'en bas après $(d + 2)$ au numer. ajoutez *M*.

P. 116 dans la colonne du milieu au lieu de $\frac{m}{60}p$ lisez $\frac{m}{60}$ *pouces*, & au lieu de $\frac{1}{30}p$ lisez $\frac{1}{30}$.

P. 117 dans la colonne du milieu au lieu de $\frac{1}{20}p$ lisez $\frac{1}{20}$.

P. 120 l. 3 à compter d'en bas au commencem. au lieu de $=$ mettez $-$.
P. 123 ligne prem. au lieu de φ *ou* lisez *ou* φ.
P. 138 lignes 3 & 16 au lieu de *&c.* lisez *&*.
P. 154 l. 9. au dessous de la barre écrivez φ.

P. 167 l. 4 au lieu de $\frac{\alpha C}{\beta}$ lisez $\frac{\alpha C}{\gamma}$.

SOLUTION

DE DIFFÉRENS PROBLÊMES DE CALCUL INTÉGRAL

PAR M. DE LA GRANGE.

Sur l'intégration de l'équation $Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T \ldots (A)$, *dans laquelle* L, M, N &c. T *sont des fonctions de* t.

I. JE multiplie cette équation par $z\,dt$, z étant une variable indéterminée, j'en prends l'intégrale, j'ai

$$\int Lzy\,dt + \int Mz\frac{dy}{dt}dt + \int Nz\frac{d^2y}{dt^2}dt + \int Pz\frac{d^3y}{dt^3}dt + \&c. = \int Tz\,dt;$$

je change les expressions $\int Mz\frac{dy}{dt}dt$, $\int Nz\frac{d^2y}{dt^2}dt$, $\int Pz\frac{d^3y}{dt^3}dt$ &c. en leurs égales, $Mzy - \int\frac{d\cdot Mz}{dt}ydt$, $Nz\frac{dy}{dt} - \frac{d\cdot Nz}{dt}y + \int\frac{d^2\cdot Nz}{dt^2}y\,dt$, $Pz\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d\cdot Pz}{dt}\times\frac{dy}{dt} + \frac{d^2\cdot Pz}{dt^2}y - \int\frac{d^3\cdot Pz}{dt^3}y\,dt$ &c.; j'ai, en ordonnant les termes par rapport à y,

$$y\left(M z - \frac{d\cdot Nz}{dt} + \frac{d^2\cdot Pz}{dt^2} - \&c.\right) +$$
$$\frac{dy}{dt}\left(N z - \frac{d\cdot Pz}{dt} + \&c.\right) +$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}\left(P z - \&c.\right) + \&c. +$$
$$\int\left(L z - \frac{d\cdot Mz}{dt} + \frac{d^2\cdot Nz}{dt^2} - \frac{d^3\cdot Pz}{dt^3} + \&c.\right) y\,dt =$$
$$\int T z\,dt.$$

Soit maintenant

$$L z - \frac{d\cdot Mz}{dt} + \frac{d^2\cdot Nz}{dt^2} - \frac{d^3\cdot Pz}{dt^3}\ \&c. = 0 \ldots (B),$$

& l' équation précédente ſe réduira à celle-ci

$$y\left(M z - \frac{d\cdot Nz}{dt} + \frac{d^2\cdot Pz}{dt^2} - \&c.\right) +$$
$$\frac{dy}{dt}\left(N z - \frac{d\cdot Pz}{dt} + \&c.\right) +$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}\left(P z - \&c.\right) + \&c. = \int T z\,dt \ \ldots\ldots (C),$$

laquelle eſt d' un ordre moins élévé d' une unité que l' équation propoſée (*A*).

II. Donc 1.° ſi on peut trouver une valeur de z, laquelle ſatisfaſſe à l' équation (*B*), on aura tout de ſuite l' intégrale de l' équation propoſée (*A*), en mettant cette valeur dans l' équation (*C*). 2.° Si on avoit deux valeurs différentes de z, leſquelles ſatisfiſſent également à l' équation (*B*), on auroit, par la ſubſtitution ſucceſſive de ces valeurs dans l' équation (*C*), deux intégrales de l'équation (*A*), à l' aide deſquelles on élimineroit la plus haute différentielle de y; & l' équation réſultante ſeroit l' intégrale ſeconde de la propoſée. (J' entends par intégrale première ou intégrale ſimplement, une équation qui eſt d' un ordre moins élevé d' une unité que la propoſée; par intégrale ſeconde une équation qui eſt d'un ordre moins élevé

de deux unités ; & ainsi de suite) 3.° De même si on avoit trois valeurs différentes de z, on trouveroit trois équations intégrales ; d'où éliminant les deux plus hautes différentielles de y, on auroit une équation qui seroit l'intégrale troisiéme de la proposée ; & ainsi de suite. D'où il est aisé de conclure, qu'en connoissant un nombre de valeurs de z égal à celui de l'exposant de l'ordre de l'équation (A), on pourra trouver l'intégrale finie, & algébrique de cette même équation.

III. Qu'on multiplie l'équation (B) par $y dt$, & qu'on en prenne l'intégrale, en faisant disparoitre de dessous le signe $\int$ toutes les différences de z, par des intégrations par parties, comme nous l'avons pratiqué sur l'équation (A), on aura, en changeant les signes,

$$y\left(Mz - \frac{d \cdot Nz}{dt} + \frac{d^2 \cdot Pz}{dt^2} - \&c.\right) +$$
$$\frac{dy}{dt}\left(Nz - \frac{d \cdot Pz}{dt} + \&c.\right) +$$
$$\frac{d^2y}{dt}\left(Pz - \&c.\right) + \&c. -$$
$$\int\left(Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{d^3y}{dt^3} + \&c.\right) z\,dt = \text{const.}$$

Donc si on fait

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = 0 \quad . \; . \; . \; (D)$$

& qu'on ordonne l'équation restante par rapport à z, on aura

$$z\left\{\left(M - \frac{dN}{dt} + \frac{d^2P}{dt^2} - \&c.\right) y + \left(N - \frac{dP}{dt} + \&c.\right)\frac{dy}{dt}\right.$$
$$\left. + \left(P - \&c.\right)\frac{d^2y}{dt} + \&c.\right\} -$$
$$\frac{dz}{dt}\left\{\left(N - 2\frac{dP}{dt} + \&c.\right) y + \left(P - \&c.\right)\frac{dy}{dt} + \&c.\right\} +$$

$\frac{d^2z}{dt} \left\{ (P - \&c.)\, y + \&c. \right\} - \&c. = \text{conft.} \quad . \quad (E)$

IV. Donc, ſi on peut trouver une valeur de y qui ſatisfaſſe à l' équation (D), on aura l' intégrale première de l' équation (B) ; ſi on a deux valeurs différentes de y, qui ſatisfaſſent à la même équation (D), on aura l' intégrale ſeconde de l' équation (B) ; & ainſi de ſuite ; de ſorte que, ſi on connoiſſoit un nombre de valeurs de y égal à celui de l' expoſant de l' équation (B), on pourroit trouver l' intégrale finie & algébrique de cette même équation (*Art. II.*).

V. Cette dernière intégrale contiendra, comme l' on voit, autant de conſtantes arbitraires qu'il y a d' unités dans l'expoſant de l'ordre de l'équation différentielle (B) ; car les équations (E), d' où elle réſulte, contiennent chacune une conſtante arbitraire. Donc ſi on fait ſucceſſivement toutes ces conſtantes, moins une, égales à zero, on aura autant d' intégrales particulières, & par conſéquent autant de valeurs différentes de z, qu'il y a d'unités dans l' expoſant de l' ordre de l' équation (B) ; or il eſt facile de voir que cette équation eſt du même ordre que l'équation (A) (*Art. I.*) ; donc on trouvera auſſi l' intégrale finie, & algébrique de cette dernière équation (*Art. II.*).

VI. Donc l' équation (A), ſavoir

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T$$

ſera intégrable algébriquement toutes les fois qu' on aura m valeurs de y en t dans le cas de $T = 0$, m étant l'expoſant de l' ordre de cette équation.

VII. Si on ne connoiſſoit que $m - 1$ valeurs de y, dans le cas de $T = 0$, on pourroit néanmoins trouver l' intégrale algébrique de l' équation (A). Car on auroit dans ce cas $m - 1$ équations (E) ; d' où éliminant les

plus hautes différences de z, on parviendroit à une équation de cette forme $V z + X \frac{dz}{dt} = Y$, ($V$, X, & Y étant des fonctions de t) laquelle donneroit

$$z = e^{-\int \frac{V}{X} dt} (\text{conft.} + \int \frac{Y e^{\int \frac{V}{X} dt}}{X} dt); \text{ donc \&c.}$$

VIII. Donc l'équation (A) fera auffi intégrable algébriquement, toutes les fois qu'on aura $m - 1$ valeurs de y dans le cas de $T = 0$.

IX. Si les valeurs connues de y n'étoient qu'au nombre de $m - 2$, alors il faudroit, pour avoir les m valeurs de z, intégrer une équation de cette forme $V z + X \frac{dz}{dt} + Y \frac{d^2z}{dt^2} = Z$, laquelle n'eft intégrable que dans quelques cas particuliers; & ainfi de fuite.

X. Au refte, fi on ne connoiffoit pas d'avance les valeurs particuliers de y dans le cas de $T = 0$, il vaudroit mieux chercher directement les valeurs de z par la réfolution de l'équation (B), laquelle n'eft guere plus compliquée que l'équation (D).

XI. Soit l'équation

$$Ly + M \frac{dy}{dt} + N \frac{d^2y}{dt} = T,$$

pour laquelle on connoit deux valeurs particulières de y, dans le cas de $T = 0$.

On aura d'abord l'équation en z (*Art. III.*)

$$z \left\{ (M - \frac{dN}{dt}) v + N \frac{dy}{dt} \right\} - \frac{dz}{dt} Ny = \text{conft.}$$

donc fuppofant que $y\,1$, & $y\,2$ foient les deux valeurs de y qui fatisfont à l'équation $Ly + M \frac{dy}{dt} + N \frac{d^2y}{dt^2} = 0$, on aura

$$z \left\{ (M - {}^{dN}) y_1 + N \frac{d \cdot y_1}{d} \right\} - \frac{dz}{dt} N y_1 = A,$$

$$z \left\{ (M - \frac{dN}{dt}) y_2 + N \frac{d \cdot y_2}{dt} \right\} - \frac{dz}{dt} N y_2 = B,$$

A, & B étant deux conſtantes arbitraires.

On tire de ces deux équations

$$z = \frac{Ay_2 - By_1}{N(y_2 \frac{d\, y_1}{dt} - y_1 \frac{d \cdot y_2}{dt})}$$

Soit d' abord $A = o$, on aura

$$z = -\frac{B}{N} \times \frac{y_1}{y_2 \frac{d\, y_1}{dt} - y_1 \frac{d\, y_2}{dt}} = z_1$$

Soit enſuite $B = o$, on aura

$$z = \frac{A}{N} \times \frac{y_2}{y_2 \frac{d \cdot y_1}{dt} - y_1 \frac{d \cdot y_2}{dt}} = z_2.$$

Ayant deux valeurs de z, ſavoir z_1, & z_2, on les ſubſtituera ſucceſſivement dans l' équation (C), & l'on aura

$$y(Mz_1 - \frac{d \cdot Nz_1}{dt}) + \frac{dy}{dt} Nz_1 = \int Tz_1 dt,$$

$$y(Mz_2 - \frac{d \cdot Nz_2}{dt}) + \frac{dy}{dt} Nz_2 = \int Tz_2 dt;$$

d' où l' on tire :

$$y = \frac{z_2 \int Tz_1 dt - z_1 \int Tz_2 dt}{N(z_1 \frac{d \cdot z_2}{dt} - z_2 \frac{d \cdot z_1}{dt})} \quad \ldots\ldots (F)$$

C' eſt la valeur générale, & complete de y qui ſatisfait à l' équation propoſée.

Si on ne connoiſſoit que la valeur y_1, on auroit ſimplement l' équation

$$z \left\{ (M - \frac{dN}{dt}) y_1 + N \frac{d \cdot y_1}{dt} \right\} - \frac{dz}{dt} N y_1 = A;$$

laquelle

laquelle étant intégrée donneroit

$$z = e^{\int \left(\frac{M}{N} - \frac{dN}{N\,dt} + \frac{d.y1}{y1\,dt}\right) dt}$$

$$\times \left\{ \text{conſt.} - A \int \frac{e^{-\int \left(\frac{M}{N} - \frac{dN}{N\,dt} + \frac{d.y1}{y1\,dt}\right) dt}}{Ny1}\, dt \right\}.$$

ou bien

$$z = \frac{y1}{N}\, e^{\int \frac{M}{N} dt} \left\{ C - A \int \frac{e^{-\int \frac{M}{N} dt}}{(y1)^2}\, dt \right\}.$$

Donc, en faiſant $A = 0$, on auroit

$$z = \frac{Cy1}{N}\, e^{\int \frac{M}{N} dt} = z1,$$

& en faiſant $C = 0$

$$z = -\frac{Ay1}{N}\, e^{\int \frac{M}{N} dt} \int \frac{e^{-\int \frac{M}{N} dt}}{(y1)^2}\, dt = z2.$$

Suppoſons que les quantités L, M, N ſoient conſtantes, on aura, comme l' on ſait, pour les deux valeurs de y qui ſatisfont à l' équation $Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, e^{k1t}, & e^{k2t}; $k1$, & $k2$, étant les racines de l' équation $L + Mk + Nk^2 = 0$; donc $y1 = e^{k1t}$, $y2 = e^{k2t}$; & par conſéquent $z1 = -\frac{B}{N} \times \frac{e^{-k2t}}{k1 - k2}$, $z2 = \frac{A}{N} \times \frac{e^{-k1t}}{k1 - k2}$; donc

$$y = \frac{e^{k2t}\int Te^{-k2t}dt - e^{k1t}\int Te^{-k1t}dt}{N(k2 - k1)}$$

Si on vouloit employer les valeurs de $z1$, & de $z2$ trouvées à la fin de l' Article précédent, on auroit

$$z1 = \frac{Cy1}{N} e^{\frac{M}{N}t}, \ \& \ z2 = -\frac{Ay1}{N} e^{\frac{M}{N}t} \int \frac{e^{-\frac{M}{N}t}}{(y1)^2} dt$$

ou bien, en mettant pour $y1$ sa valeur e^{k1t}, $z1 = \frac{C}{N}$ $e^{(k1 + \frac{M}{N})t}$, & $z2 = \frac{A}{M + 2Nk1} e^{-k1t}$. Or $k1$, & $k2$ étant les racines de l'équation $L + Mk + Nk^2 = 0$, on aura $k1 + k2 = -\frac{M}{N}$; donc $k1 + \frac{M}{N} = -k2$, & $M + 2Nk1 = N(k1 - k2)$; donc en faisant $C = -\frac{B}{k1 - k2}$, les valeurs de $z1$, & de $z2$ seront les mêmes que ci-dessus.

Ces valeurs pourroient encore se trouver d'une manière plus simple par la remarque de l' Article X. Car l' équation (B) sera dans le cas présent $Lz - M\frac{dz}{dt} + N\frac{d^2z}{dt^2} = 0$; d'où l'on tire $z = Fe^{h1t} = z1$, & $z = Ge^{h2t} = z2$, F, G étant deux constantes arbitraires, & $h1$, $h2$ les racines de l' équation $L - Mh + Nh^2 = 0$; de sorte qu'on aura $h1 = -k1$, & $h2 = -k2$.

Recherche des cas d' intégration de l' équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ayt^m = T.$$

XII. On aura ici $L = at^{2m}$, $M = 0$, & $N = 1$; donc l' équation (B) deviendra

$$azt^{2m} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (G).$$

Supposons dt variable, nous aurons au lieu du terme

$\frac{d^2z}{dt^2}$, ces deux-ci $\frac{d^2z}{dt} - \frac{dz\,d^2t}{dt^3}$; donc faisant cette substitution, & divisant toute l'équation par t^{2m}, on aura la transformée

$$\frac{d^2z}{t^{2m}dt^2} - \frac{dz\,d^2t}{t^{2m}dt^3} + az = 0.$$

Soit maintenant $t^m dt = du$, c'est-à-dire $u = \frac{t^{m+1}}{m+1}$; on aura, en prenant du pour constante, $\frac{d^2t}{dt} + m\frac{dt}{t} = 0$, c'est-à-dire, à cause de $dt = t^{-m}du$, $\frac{d^2t}{dt} = -mt^{-m-1}du = -\frac{m}{m+1} \times \frac{du}{u}$; donc, substituant ces valeurs dans l'équation précédente, & faisant pour abreger $\frac{m}{m+1} = n$, on aura

$$\frac{d^2z}{du^2} + n\frac{dz}{udu} + az = 0.$$

Si n étoit $= 0$ on auroit $\frac{d^2z}{du^2} + az = 0$, par conséquent $z = e^{ku}$, k étant une des racines de l'équation $k^2 + a = 0$.

Supposons donc $z = xe^{ku}$, on aura après les substitutions & les réductions

$$\frac{d^2x}{du^2} + \left(2k + \frac{n}{u}\right)\frac{dx}{du} + \frac{nkx}{u} = 0.$$

Qu'on fasse $x = Au^r + Bu^{r+1} + Cu^{r+2} +$ &c.; on trouvera, en égalant à zero les termes homogénes, les équations suivantes

$r(r-1)A + nrA = 0$

$(r+1)rB + 2krA + n(r+1)B + nkA = 0$

$(r+2)(r+1)C + 2k(r+1)B + n(r+2)C + nkB = 0$,

& ainsi de suite.

D'où l'on tire premiérement, ou $r = 0$, ou $r - 1 + n = 0$, favoir $r = 1 - n$, enfuite

$$B = - \frac{2r + n}{(r+1)(r+n)} kA$$

$$C = - \frac{2(r+1)+n}{(r+2)(r+1+n)} kB$$

$$D = - \frac{3(r+2)+n}{(r+3)(r+2+n)} kC$$

&c.

En combinant les deux cas de $r = 0$, & de $r = 1 - n$, & faifant $1 - n = \nu$, & $A = 1$, on aura

$$A = 1$$

$$B = - k$$

$$C = \frac{3 \mp \nu}{2(2 \mp \nu)} k^2$$

$$D = - \frac{(3 \mp \nu)(5 \mp \nu)}{2.3(2 \mp \nu)(3 \mp \nu)} k^3$$

$$E = \frac{(3 \mp \nu)(5 \mp \nu)(7 \mp \nu)}{2.3.4(2 \mp \nu)(3 \mp \nu)(4 \mp \nu)} k^4$$

&c.

le figne fupérieur étant pour le premier cas, & le figne inférieur pour le fecond cas; d'où l'on voit que la ferie fe terminera toutes les fois que $\nu =$ à un nombre quelconque impair pofitif ou négatif, à l'exception de ± 1.

Ayant ainfi la valeur de x, on aura celle de z, par la fuppofition de $z = x e^{ku}$; & comme l'équation $k + a = 0$ donne deux valeurs de k, favoir $k = \pm \sqrt{-a}$, on aura auffi deux valeurs de z, qu'on nommera, comme ci-deffus, $z1$, & $z2$, & qui étant fubftituées dans la formule (F) de l'Article précédent donneront la valeur de y.

Si a eft une quantité pofitive, les deux valeurs de k feront imaginaires. Dans ce cas la valeur de x fera de cette forme $P \pm Q \sqrt{-1}$; & par conféquent on aura

$z = (P \pm Q\sqrt{-1})\, e^{\pm u\sqrt{a}.\sqrt{-1}} =$ (en mettant au lieu de $e^{\pm u\sqrt{a}.\sqrt{-1}}$ sa valeur, cos. $u\sqrt{a} \pm$ sin. $u\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$) P cos. $u\sqrt{a} - Q$ sin. $u\sqrt{a} \pm (P$ sin. $u\sqrt{a} + Q$ cos. $u\sqrt{a})\sqrt{-1}$.

Soit donc, pour abreger

$$P \text{ cos. } u\sqrt{a} - Q \text{ sin. } u\sqrt{a} = R$$
$$P \text{ sin. } u\sqrt{a} - Q \text{ cos. } u\sqrt{a} = S,$$

on aura $R + S\sqrt{-1} = z1$, & $R - S\sqrt{-1} = z2$, & la valeur de y deviendra

$$y = \frac{R\int TS\,dt - S\int TR\,dt}{N\left(S\frac{dR}{dt} - R\frac{dS}{dt}\right)}.$$

XIII. Si $m = 1$, on aura $n = \infty$, & la valeur de x sera exprimée par une suite infinie ; mais en reprenant l' équation (G), on aura

$$\frac{az}{t^2} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

laquelle en faisant $z = t^r$, se change en

$$a + r(r-1) = 0,$$

d' où l' on tire $r = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4} - a\right)}$.

Ainsi l' on aura les deux valeurs de z.

XIV. Soit $T = 0$ & $y = e^{\int q\,dt}$, l' équation proposée se changera en celle-ci

$$\frac{dq}{dt} + q + a t^{2m} = 0,$$

laquelle est connue sous le nom d' équation de Riccati ; on trouvera donc par la métode précédente l'intégrale de cette même équation.

Intégration de l'équation

$$Ay + B(h + kt)\frac{dy}{dt} + C(h + kt)^2\frac{d^2y}{dt^2} +$$

$$D(h + kt)^3\frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T \quad . \quad . \quad . \quad (H)$$

A, B, C &c. *étant des coéficiens constans.*

XV. En comparant cette équation avec la formule générale (A), on aura

$L = A$, $M = B(h + kt)$, $N = C(h + kt)^2$

$P = D(h + kt)^3$ &c.

Donc les équations (B) & (C) deviendront

$$Az - B\frac{d.(h + kt)z}{dt} + C\frac{d^2.(h + kt)^2z}{dt^2} -$$

$$D\frac{d^3.(h + kt)^3z}{dt^3} + \&c. = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

$$y\left\{B(h + kt)z - C\frac{d.(h + kt)^2z}{dt} + \right.$$

$$\left. D\frac{d^2.(h + kt)^3z}{dt^2} - \&c. \right\} +$$

$$\frac{dy}{dt}\left\{C(h + kt)^2z - D\frac{d.(h + kt)z}{dt} + \&c. \right\} +$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\left\{D(h + kt)^3z - \&c. \right\} + \&c.$$

$$= \int Tz\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (K).$$

Soit maintenant $z = (h + kt)^r$, & l'équation (I) étant divisée par $(h + kt)^r$ se réduira à celle-ci

$$A - Bk(r + 1) + Ck^2(r + 1)(r + 2) -$$
$$Dk^3(r + 1)(r + 2)(r + 3) + \&c. = 0 \;.\; (L)$$

laquelle étant ordonnée par rapport à r montera à un dégré, dont l'exposant sera le même que celui de l'ordre de l'équation proposée (H).

Faisant la même substitution dans l'équation (K), on aura, après avoir divisé par $(h + kt)^{r+1}$

$$y \left\{ B - Ck(r+2) + Dk^2(r+2)(r+3) - \&c. \right\} +$$
$$\frac{dy}{dt} \left\{ C - Dk(r+3) + \&c. \right\} (h+kt) +$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} \left\{ D - \&c. \right\} (h+kt)^2 + \&c.$$
$$= (h+kt)^{-r-1} \int T (h+kt)^r dt;$$
équation qui devra avoir lieu, en mettant pour r chacune des racines de l'équation (L).

Soit pour abreger
$$B - Ck(r+2) + Dk^2(r+2)(r+3) - \&c. = \alpha$$
$$C - Dk(r+3) + \&c. = \beta$$
$$D - \&c. = \gamma$$
&c.
$$(h+kt)^{-r-1} \int T (h+kt)^r dt = \theta,$$
l'équation dont il s'agit se réduira à celle-ci
$$\alpha y + \beta (h+kt) \frac{dy}{dt} + \gamma (h+kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \&c. = \theta \quad (M).$$

Supposons que $r1$, $r2$, $r3$ &c. soient les racines de l'équation (L), & que $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$ &c. $\beta 1$, $\beta 2$, $\beta 3$ &c. &c. soient ce que deviennent les quantités α, β &c., lorsque r devient successivement $r1$, $r2$, $r3$ &c.; au lieu de l'équation (M), on aura celles-ci

$$\alpha 1 y + \beta 1 (h+kt) \frac{dy}{dt} + \gamma 1 (h+kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \&c. = \theta 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (M1)$$
$$\alpha 2 y + \beta 2 (h+kt) \frac{dy}{dt} + \gamma 2 (h+kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \&c. = \theta 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (M2)$$
$$\alpha 3 y + \beta 3 (h+kt) \frac{dy}{dt} + \gamma 3 (h+kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \&c. = \theta 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (M3)$$
&c.

dont le nombre sera le même que celui des quantités in-

connues y, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ &c., comme il est facile de s'en assurer. Ainsi en éliminant les quantités $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ &c., on aura la valeur de y.

Pour cet effet je multiplie l'équation ($M1$) par M', l'équation ($M2$) par M'', & ainsi de suite; après quoi je les ajoute ensemble, j'ai

$$(\alpha 1 M' + \alpha 2 M'' + \alpha 3 M''' + \text{\&c.})\, y +$$
$$(\beta 1 M' + \beta 2 M'' + \beta 3 M''' + \text{\&c.})(h + kt)\frac{dy}{dt} +$$
$$(\gamma 1 M' + \gamma 2 M'' + \gamma 3 M''' + \text{\&c.})(h + kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \text{\&c.}$$
$$= M'\theta 1 + M''\theta 2 + M'''\theta 3 + \text{\&c.}$$

Je suppose

$$\left.\begin{array}{l} \beta 1 M' + \beta 2 M'' + \beta 3 M''' + \text{\&c.} = 0 \\ \gamma 1 M' + \gamma 2 M' + \gamma 3 M''' + \text{\&c.} = 0 \\ \text{\&c.} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (N)$$

j'aurai

$$y = \frac{M'\theta 1 + M''\theta 2 + M'''\theta 3 + \text{\&c.}}{M\alpha 1 + M'\alpha 2 + M'\alpha 3 + \text{\&c.}} \quad \ldots \ldots \quad (P)$$

& toute la difficulté se réduira à déterminer les quantités M, M', M'' &c., par le moyen des équations (N).

Or si on substitue dans ces équations, les valeurs de $\beta 1$, $\gamma 1$, &c. $\beta 2$, $\gamma 2$ &c. &c., & qu'on ordonne les termes par rapport aux puissances de r, on verra qu'elles se réduisent à celles-ci

$$M' + M'' + M'' + \text{\&c.} + M^m = 0$$
$$M'r1 + M'r2 + M''r3 + \text{\&c.} + M^m (rm) = 0$$
$$M'(r1)^2 + M''(r2)^2 + M'''(r3)^2 + \text{\&c.} + M^m (rm)^2 = 0$$
$$M'(r1)^3 + M''(r2)^3 + M'''(r3)^3 + \text{\&c.} + M^m (rm)^3 = 0$$
&c.
$$M'(r1)^{m-2} + M''(r2)^{m-2} + M''(r3)^{m-2} + \text{\&c.} + M^m (rm)^{m-2} = 0$$

m étant

m étant l'expoſant de l'ordre de l'équation propoſée (H), & la quantité $M' \alpha 1 + M'' \alpha 2 + M''' \alpha 3 +$ &c. deviendra

$$\pm V k^{m-1} \left[M' (r1)^{m-1} + M'' (r2)^{m-1} + M''' (r3)^{m-1} + \&c. + M^m (rm)^{m-1} \right]$$

dans laquelle V eſt le coéficient du terme $(h + kt)^m \frac{d^m y}{dt^m}$ de la même équation, le ſigne ſupérieur étant pour le cas de m impair, & le ſigne inférieur pour celui de m pair.

Telles ſont les équations, par leſquelles il faudra déterminer les inconnues M', M', M'' &c. M^m.

Pour rendre cette recherche plus générale nous ſuppoſerons que l'on ait les équations ſuivantes

$$M' + M'' + M''' + \&c. + M^m = R$$

$$M' r1 + M'' r2 + M''' r3 + \&c. + M^m (rm) = R'$$

$$M' (r1)^2 + M'' (r2)^2 + M'' (r3)^2 + \&c. + M^m (rm)^2 = R''$$

$$M' (r1)^3 + M'' (r2)^3 + M''' (r3)^3 + \&c. + M^m (rm)^3 = R'''$$

&c.

$$M' (r1)^{m-1} + M'' (r2)^{m-1} + M''' (r3)^{m-1} + \&c. + M^m (rm)^{m-1} = R^{m-1}.$$

(Je prends ici une équation de plus afin que l'on ait autant d'équations que d'inconnues).

On multipliera la première de ces équations par N, la ſeconde par N', la troiſiéme par N'', & ainſi des autres; on les ajoutera enſemble, & l'on aura

$$M' [N + N' r1 + N'' (r1)^2 + N''' (r1)^3 + \&c. + N^{m-1} (r1)^{m-1}] +$$

$$M'' [N + N r2 + N' (r2)^2 + N''' (r2)^3 + \&c. + N^{m-1} (r2)^{m-1}] +$$

$$M''' [N + N r3 + N' (r3)^2 + N''' (r3)^3 + \&c. + N^{m-1} (r3)^{m-1}] + \&c. +$$

$$M^m [N + N' (rm) + N' (rm)^2 + N''' (rm)^3 + \&c. + N^{m-1} (rm)^{m-1}] =$$

$$NR + N'R' + N''R'' + N'''R''' + \&c. + N^{m-1} R^{m-1}.$$

Maintenant pour avoir la valeur d' une M quelconque ; comme M^{μ}, il n' y aura qu'à supposer $= 0$ les quantités qui multiplient toutes les autres M, & l' on aura

$$M^{\mu} = \frac{NR + N'R' + N''R'' + N'''R''' + \&c. + N^{m-1}R^{m-1}}{N + N'(r\mu) + N''(r\mu)^2 + N'''(r\mu)^3 + \&c. + N^{m-1}(r\mu)^{m-1}} \quad (Q)$$

Et les quantités N, N', N'' &c. N^{m-1} seront déterminées par ces équations

$$N + N'r1 + N''(r1)^2 + \&c. + N^{m-1}(r1)^{m-1} = 0$$

$$N + N'r2 + N''(r2)^2 + \&c. + N^{m-1}(r2)^{m-1} = 0$$

& ainsi de suite jusqu'à

$$N + N'(rm) + N''(rm)^2 + \&c. + N^{m-1}(rm)^{m-1} = 0$$

à l' exception de

$$N + N'(r\mu) + N''(r\mu)^2 + \&c. + N^{m-1}(r\mu)^{m-1} = 0.$$

c'est-à-dire qu'on aura l' équation

$$N + N'r + N''r^2 + N'''r^3 + \&c. + N^{m-1}r^{m-1} = 0$$

laquelle devra avoir lieu en mettant successivement, au lieu de r, $r1$, $r2$, $r3$, &c. (rm) à l'exception de $(r\mu)$.

Or comme $r1$, $r2$, $r3$ &c. (rm), sont les racines de l' équation (L), si on représente cette équation par $a + br + cr^2 + dr^3 + \&c. + tu^{m-1} + ur^m$, on aura par la théorie des équations

$$1 + \frac{N'}{N}r + \frac{N''}{N}r^2 + \frac{N'''}{N}r^3 + \&c. + \frac{N^{m-1}}{N}r^{m-1}$$

$$= \frac{1 + \frac{b}{a}r + \frac{c}{a}r^2 + \frac{d}{a}r^3 + \&c. + \frac{u}{a}r^m}{1 - \frac{r}{(r\mu)}};$$

donc, multipliant par $1 - \frac{r}{(r\mu)}$, & comparant les termes, on aura

$$\frac{N'}{N} - \frac{1}{(r\mu)} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{N''}{N} - \frac{1}{(r\mu)} \cdot \frac{N'}{N} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{N'''}{N} - \frac{1}{(r\mu)} \cdot \frac{N''}{N} = \frac{d}{a}$$

&c.

d' où l' on tire

$$N' = \frac{N}{a\,(r\mu)} \times \left\{ a + b\,(r\mu) \right\}$$

$$N'' = \frac{N}{a\,(r\mu)^2} \times \left\{ a + b\,(r\mu) + c\,(r\mu)^2 \right\}$$

$$N''' = \frac{N}{a\,(r\mu)^3} \times \left\{ a + b\,(r\mu) + c\,(r\mu)^2 + d\,(r\mu)^3 \right\}$$

&c.

$$N^{m-1} = \frac{N}{a\,(r\mu)^{m-1}} \times \left\{ a + b\,(r\mu) + c\,(r\mu)^2 + d\,(r\mu)^3 + \&c. + t\,(r\mu)^{m-1} \right\}.$$

Faiſant ces ſubſtitutions dans la formule (Q), on verra que la quantité N diſparoitra d' elle même ; de ſorte que l' on aura la valeur de chacun des coéficiens M.

Soit maintenant $R = 0$, $R' = 0$, $R'' = 0$, &c. $R^{m-2} = 0$, on aura

$$M^{\mu} = \frac{N^{m-1} R^{m-1}}{N + N'(r\mu) + N''(r\mu)^2 + \&c. + N^{m-1}\,(r\mu)^{m-1}}$$

Or $N^{m-1} = \frac{N}{a\,(r\mu)^{m-1}} \times \left\{ a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 + \&c. + t\,(r\mu)^{m-1} \right\}$; & comme $a + br + cr^2 + \&c. + t\,r^{m-1} + u\,r^m = 0$, on a, en mettant $(r\mu)$ au lieu de r, $a + b\,(r\mu) + c\,(r\mu)^2 + \&c. + t\,(r\mu)^{m-1} = -\,u\,(r\mu)^m$; donc

$$N^{m-1} = \frac{N}{a\,(r\mu)^{m-1}} \times -\,u\,(r\mu)^m = -\frac{Nu}{a}\,(r\mu)$$

De plus on a

$$\frac{N + N' r + N'' r + \&c. + N^{m-1} r^{m-1}}{N} = \frac{a + br + cr^2 + \&c. + ur^m}{a\left[1 - \frac{r}{(r\mu)}\right]}$$

donc, si on fait pareillement $r = (r\mu)$, on aura, en prenant la différence du numérateur & du dénominateur, à cause que l'un & l'autre s'évanouissent dans ce cas,

$$\frac{N + N'(r\mu) + N''(r\mu)^2 + \&c. + N^{m-1}(r\mu)^{m-1}}{N} = -\frac{b + 2c(r\mu) + 3d(r\mu)^2 + \&c. + mu(r\mu)^{m-1}}{\frac{a}{(r\mu)}};$$

donc $M^\mu = \frac{uR^{m-1}}{b + 2c(r\mu) + 3d(r\mu)^2 + \&c.}$.

Soit

$$A - Bk(r+1) + Ck^2(r+1)(r+2) - \&c.$$
$$\mp Vk^m(r+1)(r+2)\ldots(r+m) = P,$$

de sorte que l'équation (L) soit représentée par $P = 0$; on aura

$$a + br + cr^2 + \&c. + ur^m = P;$$

donc $u = \mp Vk^m$, (le signe supérieur étant pour le cas de m impair, & l'inférieur pour celui de m pair);

& $$b + 2cr + 3dr^2 + \&c. = \frac{dP}{dr}.$$

Donc, si on fait $\frac{dP}{dr} = Q$, & qu'on dénote par $Q1$, $Q2$, $Q3$ &c. le valeurs de Q, lorsque r devient $r1$, $r2$, $r3$ &c., aura

$$M' = \frac{\pm Vk^m R^{m-1}}{Q1},\ M'' = \frac{\pm Vk^m R^{m-1}}{Q2}\ \&c.$$

Substituant donc ces valeurs dans la formule (P), & faisant attention que

$M'\alpha 1 + M''\alpha 2 + M'''\alpha 3 +$ &c. $= \pm V k^{m-1}$ $\times [M'(r1)^{m-1} + M''(r2)^{m-1} + M'''(r3)^{m-1} +$ &c.$]$ $= \pm V k^{m-1} R^{m-1}$, on aura enfin

$$y = -k \left\{ \frac{\theta 1}{Q 1} + \frac{\theta 2}{Q 2} + \frac{\theta 3}{Q 3} + \text{\&c.} \right\} \quad . \quad (R)$$

D'où l'on voit que chaque racine de l'équation $P = 0$ donne dans la valeur de y un terme correſpondant tel que $- k \frac{\theta}{Q}$.

XVI. Toute la difficulté ſe réduit donc à réſoudre l'équation $P = 0$; or il peut arriver deux cas qu'il eſt bon d'examiner; le premier eſt celui où cette équation auroit des racines égales, le ſecond celui où elle auroit des racines imaginaires.

1.° Suppoſons que l'on trouve deux racines égales, par exemple, $r2 = r1$; on fera $r2 = r1 + \omega$, ω étant une quantité évanouiſſante, & comme P peut être repréſenté en général par $(r - r1)(r - r2)\Pi$, on aura $Q = \frac{dP}{dr} = (r - r2)\Pi + (r - r1)\Pi + (r - r1)(r - r2)\frac{d\Pi}{dr}$; donc faiſant ſucceſſivement $r = r1$, & $= r2$, & ſubſtituant $r1 + \omega$ au lieu de $r2$, on aura $Q1 = -\omega\Pi 1$, & $Q2 = \omega\Pi 1$, $\Pi 1$ étant la valeur de Π, lorſque $r = r1$. Pour trouver cette valeur on remarquera que, puiſque $r2 = r1$, on a $(r - r1)^2\Pi = P$; d'où l'on tire, en différentiant deux fois, $2\Pi + 4(r - r1)\frac{d\Pi}{dr} + (r - r1)^2\frac{d^2\Pi}{dr^2} = \frac{d^2P}{dr^2} = R$; & par conſéquent, en faiſant $r = r1$, $2\Pi 1 = R1$, & $\Pi 1 = \frac{R1}{2}$; donc $Q1 = -\frac{\omega}{2}R1$, & $Q2 = \frac{\omega}{2}R1$. Maintenant on a

$\theta 1 = (h + kt)^{-r1-1} \int T\,(h + kt)^{r1} dt$, &
$\theta 2 = (h + kt)^{-r2-1} \int T\,(h + kt)^{r2} dt$;
or $(h + kt)^{-r2-1} = (h + kt)^{-r1-1-\omega} = (h + kt)^{-r1-1} [1 - \omega\, l(h + kt)$ &c.], & de même $(h + kt)^{r2} = (h + kt)^{r1} [1 + \omega\, l(h + kt)]$; donc négligeant les ω^2 on aura $\theta 2 = \theta 1 + \omega\,(h + kt)^{-r1-1} \times [\int T\,(h + kt)^{r1}\, l(h + kt)\, dt - l(h + kt) \times \int T\,(h + kt)^{r1} dt]$, ou bien

$$\theta 2 = \theta 1 - \omega\,(h + kt)^{-r1-1} \int \frac{k\,dt}{h + kt} \int T\,(h + kt)^{r1} dt;$$

donc faisant ces substitutions dans les termes $-k\frac{\theta 1}{Q1} - k\frac{\theta 2}{Q2}$ de la valeur de y, lesquels répondent aux racines égales $r1$, $r2$, & effaçant ce qui se détruit, on aura

$$-k\frac{\theta 1}{Q1} - k\frac{\theta 2}{Q2} = k\frac{2\,(h + kt)^{-r1-1}}{R1} \int \frac{k\,dt}{h + kt} \int T\,(h + kt)^{r1} dt.$$

On résoudroit de même le cas de trois racines égales, en faisant $r2 = r1 + \omega$, $r3 = r1 + \eta$, ω, η étant deux quantités infiniment petites, & ayant égard aux quantités du second ordre. De cette manière on trouvera que les trois termes $-k\frac{\theta 1}{Q1} - k\frac{\theta 2}{Q2} - k\frac{\theta 3}{Q3}$ deviendront

$$-k\frac{6\,(h + kt)^{-r1-1}}{S1} \int \frac{k\,dt}{h + kt} \int \frac{k\,dt}{h + kt} \int T\,(h + kt)^{r1} dt;$$

S étant $= \frac{d^3P}{dr^3}$, & $S1$ exprimant la valeur de S, lorsque $r = r1$; & ainsi de suite.

2.° Supposons maintenant que les deux racines $r1$, & $r2$ soient imaginaires, ensorte que $r1 = F + G\sqrt{-1}$, & $r2 = F - G\sqrt{-1}$; il est facile de voir que les quantités $Q1$, & $Q2$ seront de cette forme $Q1 = M + N\sqrt{-1}$, $Q2 = M - N\sqrt{-1}$; de plus les quan-

tités $(h + kt)^{-r1-1}$, & $(h + kt)^{r1}$ deviendront $(h + kt)^{-F-1}(h + kt)^{-G\sqrt{-1}}$, & $(h + kt)^{F}$ X $(h + kt)^{G\sqrt{-1}}$. Or soit $(h + kt)^{G\sqrt{-1}} = \lambda$ $(\text{cos.}\ \varphi + \text{sin.}\ \varphi \sqrt{-1})$, on aura par les logarithmes $G\sqrt{-1}\ l(h+kt) = l\lambda + \varphi\sqrt{-1}$, donc $l\lambda = 0$, savoir $\lambda = 1$, & $\varphi = G\,l(h+kt)$, donc $(h+kt)^{G\sqrt{-1}}$ $= \text{cos.}\ G\,l(h+kt) + \text{sin.}\ G\,l(h+kt)\cdot\sqrt{-1}$, & prenant le radical $\sqrt{-1}$ en $-$, $(h+kt)^{-G\sqrt{-1}}$ $= \text{cos.}\ G\,l(h+kt) - \text{sin.}\ G\,l(h+kt)\cdot\sqrt{-1}$; par ces substitutions on réduira les quantités $\theta 1$, & $\theta 2$ à la forme $X + Y\sqrt{-1}$, de sorte que les deux termes $-k\frac{\theta 1}{Q1} - k\frac{\theta 2}{Q2}$ de l'expression de y se changeront en $-k\frac{X+Y\sqrt{-1}}{M+N\sqrt{-1}} - k\frac{X-Y\sqrt{-1}}{M-N\sqrt{-1}} = -2\frac{MX+NY}{M^2+N^2}$;

Application à l'équation

$$Ay + B\frac{dy}{dt} + C\frac{d^2y}{dt^2} + D\frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T.$$

XVI. On aura dans ce cas $h = 1$, & $k = 0$, mais comme la supposition de $k = 0$ donneroit $P = A = 0$; on supposera simplement k infiniment petite, & ensuite r infiniment grande, ensorte que $kr =$ à une quantité finie ρ; de cette manière on aura
$P = A - B\rho + C\rho^2 - D\rho^3 + \&c. = 0$;
équation d'où l'on tirera autant de valeurs de ρ qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle, de sorte que, si on appelle $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. les racines de cette équation, on aura $r1 = \frac{\rho 1}{k}$, $r2 = \frac{\rho 2}{k}$ &c. Or on a $Q = \frac{dP}{dr}$, donc si on fait $\frac{dP}{d\rho} = q$;

on aura $Q = kq$, & par conséquent $Q_1 = kq_1$, $Q_2 = kq_2$ &c., donc

$$y = -\left(\frac{\theta_1}{q_1} + \frac{\theta_2}{q_2} + \frac{\theta_3}{q_3} + \&c.\right).$$

Or $\theta = (h + kt)^{-r-1} \int T (h + kt)^r dt$, donc si on fait $h = 1$, & qu'on mette $\frac{\rho}{k}$ au lieu de r, on aura à cause de $r = \infty$, $\theta = (1 + kt)^{-\frac{\rho}{k}} \int T (1 + kt)^{\frac{\rho}{k}} dt$; mais on sait que $(1 + kt)^{\pm\frac{\rho}{k}} =$ (dans le cas de k infiniment petite) $e^{\pm\rho t}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1; donc $\theta = e^{-\rho t} \int T e^{\rho t} dt$, & par conséquent $\theta_1 = e^{-\rho_1 t} \int T e^{\rho_1 t} dt$, $\theta_2 = e^{-\rho_2 t} \int T e^{\rho_2 t} dt$ &c.

Si l'équation $P = 0$ a deux racines égales on transformera d'abord les termes $-\frac{\theta_1}{q_1} - \frac{\theta_2}{q_2} = -k\left(\frac{\theta_1}{Q_1} + \frac{\theta_2}{Q_2}\right)$ en $k\,\frac{2(h+kt)^{-r_1-1}}{R_1} \int \frac{k\,dt}{h+kt} \int T (h + kt)^{r_1} dt$ (Art. préc.), expression qui se réduit dans le cas présent à celle-ci $\frac{2k^2}{R_1} e^{-\rho_1 t} \int dt \int T e^{\rho_1 t} dt$; mais $R = \frac{d^2P}{dr^2} = \frac{k^2\, d^2P}{d\rho^2}$, donc, si on fait $\frac{d^2P}{d\rho} = r$, on aura $\frac{2}{r_1} e^{-\rho_1 t} \int dt \int T e^{\rho_1 t} dt$ au lieu des temes $-\frac{\theta_1}{q_1} - \frac{\theta_2}{q_2}$. On opéreroit de même si l'on avoit trois, quattre &c. racines égales.

Si ρ_1, & ρ_2 sont imaginaires de sorte, que $\rho_1 = f + g\sqrt{-1}$, & $\rho_2 = f - g\sqrt{-1}$, on aura

$$e^{\pm\rho_1 t} = e^{\pm f t} (\text{cos.}\, gt \pm \text{sin.}\, gt \cdot \sqrt{-1}), \&$$
$$e^{\pm\rho_2 t} = e^{\pm f t} (\text{cos.}\, gt \mp \text{sin.}\, gt \cdot \sqrt{-1}),$$

de plus on trouvera $q_1 = m + n\sqrt{-1}$, & $q_2 =$

$m -$

$m - n\sqrt{-1}$, donc les termes $\frac{\theta 1}{q1} - \frac{\theta 2}{q2}$ se réduiront à

$$- \frac{2e^{-ft}}{m^2 + n^2} [(m \operatorname{cos}. gt - n \operatorname{sin}. gt) \int T e^{ft} \operatorname{cos}. gt\, dt + (m \operatorname{sin}. gt + n \operatorname{cos}. gt) \int T e^{ft} \operatorname{sin}. gt\, dt].$$

Résolution de l'équation

$\alpha \varphi [t + a(h + kt)] + \beta \varphi [t + b(h + kt)] + \gamma \varphi [t + c(h + kt)] + \&c. = T,$

dans laquelle φ dénote une fonction inconnue.

XVIII. On sait que $\varphi [t + a(h + kt)]$ peut se réduire en série de cette manière

$$\varphi t + a(h + kt) \frac{d.\varphi t}{dt} + \frac{1}{2} a^2 (h + kt)^2 \frac{d^2 . \varphi t}{dt^2} + \frac{1}{2.3} a^3 (h + kt)^3 \frac{d^3 . \varphi t}{dt^3} + \&c.;$$

donc si on développe de même $\varphi [t + b(h + kt)]$, $\varphi [t + c(h + kt)]$ &c., & qu'on fasse $\varphi t = y$, l'équation proposée deviendra

$$(\alpha + \beta + \gamma + \&c.) y +$$
$$(\alpha a + \beta b + \gamma c + \&c.) \times (h + kt) \frac{dy}{dt} +$$
$$\frac{1}{2} (\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \&c.) \times (h + kt)^2 \frac{d^2 y}{dt^2} +$$
$$\frac{1}{2.3} (\alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma c^3 + \&c.) \times (h + kt)^3 \frac{d^3 y}{dt^3} +$$
$$\&c.$$
$$= T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (S)$$

Comparant cette équation avec l'équation (H) de l'Art. XV. on a

$A = \alpha + \beta + \gamma + \&c.$

$B = \alpha a + \beta b + \gamma c + \&c.$

$$C = \frac{1}{2}(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \&c.)$$

$$D = \frac{1}{2.3}(\alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma c^3 + \&c.)$$

&c.

donc on aura

$$P = \alpha [1 - ka(r+1) + \frac{k^2a^2}{2}(r+1)(r+2) - \frac{k^3a^3}{2.3}(r+1)(r+2)(r+3) + \&c.] +$$
$$\beta [1 - kb(r+1) + \frac{k^2b^2}{2}(r+1)(r+2) - \frac{k^3b^3}{2.3}(r+1)(r+2)(r+3) + \&c.] +$$
$$\gamma [1 - kc(r+1) + \frac{k^2c^2}{2}(r+1)(r+2) - \frac{k^3c^3}{2.3}(r+1)(r+2)(r+3) + \&c.] + \&c. = 0;$$

équation, d'où l'on tirera les valeurs $r1$, $r2$, $r3$ &c. de r, dont le nombre sera infini ; de sorte que la valeur de y sera exprimée par une suite infinie, telle que

$$-k\left(\frac{\theta 1}{Q1} + \frac{\theta 2}{Q2} + \frac{\theta 3}{Q3} + \&c.\right),$$

θ étant $= (h + kt)^{-r-1} \int T(h + kt)^r dt$.

Maintenant il est clair que la valeur de P se réduit à $\alpha(1 + ka)^{-r-1} + \beta(1 + kb)^{-r-1} + \gamma(1 + kc)^{-r-1} + \&c.$ donc $Q = -\alpha(1 + ka)^{-r-1} l(1 + ka) - \beta(1 + kb)^{-r-1} l(1 + kb) - \gamma(1 + kc)^{-r-1} l(1 + kc) - \&c.$

& l'équation à résoudre sera

$$\alpha(1 + ka)^{-r-1} + \beta(1 + kb)^{-r-1} + \gamma(1 + kc)^{-r-1} + \&c. = 0,$$

r étant l'inconnue ; or cette résolution réussira dans les deux cas suivans

1.° Lorſque l' équation n' a que deux termes, c' eſt-à-dire qu'on a

$$\alpha(1+ka)^{-r-1}+\beta(1+kb)^{-r-1}=0;$$

car diviſant par $\beta(1+kb)^{-r-1}$ on a $\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1+ka}{1+kb}\right)^{-r-1}+1=0$, d' où l' on tire par les logarithmes

$$r+1=\frac{l-\frac{\alpha}{\beta}}{l\,\frac{1+ka}{1+kb}}.$$

Qu'on ſuppoſe, ce qui eſt toujours poſſible,

$$-\frac{\alpha}{\beta}=\lambda(\text{cof.}\,\omega+\text{ſin.}\,\omega\sqrt{-1})$$

λ étant une quantité réelle & poſitive, on trouvera pour ω une infinité d' angles différens, & l' on aura $l-\frac{\alpha}{\beta}=l\lambda+\omega\sqrt{-1}$, ce qui donnera une infinité de valeurs de r.

Soit $\frac{\alpha}{\beta}$ une quantité réelle poſitive, on fera $\lambda=\frac{\alpha}{\beta}$, cof. $\omega=-1$, & ſin. $\omega=0$, ce qui donne $\omega=(2\nu+1)\pi$, ν étant un nombre quelconque entier poſitif, ou négatif, & π dénotant l' angle de 180.°; donc

$$r+1=\frac{l\,\frac{\alpha}{\beta}+(2\nu+1)\pi\sqrt{-1}}{l\,\frac{1+ka}{1+kb}}$$

& l' on aura les différentes valeurs de r, en faiſant ſucceſſivement $\nu=1,-1,2,-2$ &c.

Si $\frac{\alpha}{\beta}$ eſt une quantité réelle négative, $-\frac{\alpha}{\beta}$ ſera réelle poſitive, c'eſt pourquoi on ſuppoſera $\lambda=-\frac{\alpha}{\beta}$, cof. ω

$= 1$, sin. $\omega = 0$; d'où $\omega = 2\nu\pi$, & par conséquent

$$r + 1 = \frac{l - \frac{\alpha}{\beta} + 2\nu\pi\sqrt{-1}}{l\frac{1+ka}{1+kb}}$$

Enfin si $\frac{\alpha}{\beta}$ est une quantité imaginaire de la forme $p + q\sqrt{-1}$, on aura λ cos. $\omega = -p$, & λ sin. $\omega = -q$, d'où l'on tire $\lambda = \sqrt{(p^2 + q^2)}$, sin. $\omega = -\frac{q}{\lambda}$, & cos. $\omega = -\frac{p}{\lambda}$. Donc si on suppose que ω' soit le plus petit angle dont le sinus $= -\frac{q}{\lambda}$, & le cosinus $= -\frac{p}{\lambda}$, on aura $\omega = \omega' + 2\nu\pi$, ν dénotant comme ci-devant un nombre quelconque entier positif ou négatif, d'où

$$r + 1 = \frac{l\lambda + (\omega' + 2\nu\pi)\sqrt{-1}}{l\frac{1+ka}{1+kb}}.$$

2.° Lorsque $1 + kb = (1 + ka)^2$, $1 + kc = (1 + ka)^3$ &c.; car en faisant $(1 + ka)^{-r-1} = p$, l'équation proposée deviendra $\alpha p + \beta p^2 + \gamma p^3 +$ &c. $= 0$; d'où l'on tirera p par les méthodes connues; après quoi on trouvera r par la méthode précédente.

XIX. Si $k = 0$, & $h = 1$, ensorte que l'équation à résoudre soit

$\alpha\varphi(t + a) + \beta\varphi(t + b) + \gamma\varphi(t + c) +$ &c. $= T$, alors, suivant ce qui a été dit dans l'Article XVII., on trouvera

$P = \alpha e^{-\rho a} + \beta e^{-\rho b} + \gamma e^{-\rho c} +$ &c., &

$q = -\alpha a e^{-\rho a} - \beta b e^{-\rho b} - \gamma c e^{-\rho c} -$ &c.,

& la valeur de y, c'eſt-à-dire de φt, ſera exprimée par la ſuite infinie

$$- \frac{\theta_1}{q_1} - \frac{\theta_2}{q_2} - \frac{\theta_3}{q_3} - \&c.$$

dans laquelle on aura en général $\theta = e^{-\rho t} \int T e^{\rho t} dt$.

A l' égard des valeurs de ρ on les tirera de l' équation $P = 0$, laquelle eſt réſoluble dans les mêmes cas que ci-deſſus, ſavoir lorſque le coéficient γ, & tous les ſuivans ſont nuls, & lorſque $b = 2a$, $c = 3a$ &c. Dans le premier cas on aura $\alpha e^{-\rho a} + \beta e^{-\rho b} = 0$, d'où l'on tire, en diviſant par $\beta e^{-\rho b}$, & prenant les logarithmes

$\rho = \frac{l - \frac{\alpha}{\beta}}{b - a} = \frac{l\lambda + \omega \sqrt{-1}}{b - a}$. Dans le ſecond on aura, en faiſant $e^{-\rho a} = p$, $\alpha + \beta p^2 + \gamma p^3 + \&c. = 0$, d' où l' on tirera p, & par conſéquent ρ.

Solutions de quelques problêmes concernant le mouvement des fluides.

XX. Si un fluide homogène & non élaſtique ſe meut dans un vaſe de figure quelconque, & qu'on ſuppoſe ſon mouvement arrivé à un état permanent, nommant p & q les viteſſes d' une particule quelconque du fluide paralelement à deux axes fixes perpendiculaires entr'eux, & t, x les coordonnées rectangles qui déterminent la poſition de cette particule par rapport aux mêmes axes, on aura les équations ſuivantes

$$\frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dx} = 0, \ \& \ \frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dt} = 0,$$

(Voyés l' Art. XLII. du Mém. qui a pour titre *Application de la méthode précédente à la ſolution &c.* inſéré dans le Volume précédent).

De ces deux équations on tire celle-ci $\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{d^2p}{dx^2}$, dont l' intégrale eſt

$$p = \varphi(t + x\sqrt{-1}) + \psi(t - x\sqrt{-1})$$

φ, & ψ dénotant des fonctions quelconques.

Enſuite l' équation $\frac{dq}{dt} = \frac{dp}{dx}$ donnera

$$\frac{q}{\sqrt{-1}} = \varphi(t + x\sqrt{-1}) - \psi(t - x\sqrt{-1}).$$

Or dans chaque courbe que les particules du fluide décrivent, on a $\frac{dt}{dx} = \frac{p}{q}$, donc l' équation générale de ces courbes ſera $p\,dx - q\,dt = 0$, ou bien, en ſubſtituant les valeurs de p & q, & intégrant enſuite

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) - \Psi(t - x\sqrt{-1}) = M$$

M étant une conſtante arbitraire, & Φ, Ψ dénotant des fonctions telles que $\frac{d.\Phi t}{dt} = \varphi t$, & $\frac{d.\Psi t}{dt} = \psi t$; & cette équation devra exprimer auſſi la courbure des parois du vaſe.

Suppoſons que l' axe des t diviſe le vaſe en deux parties égales & ſemblables, il faudra que l' équation dont il s' agit ne contienne aucune puiſſance paire de x; or

$$\Phi(t+x\sqrt{-1}) = \Phi t + \varphi t . x\sqrt{-1} - \varphi' t \cdot \frac{x^2}{2} - \varphi'' t \cdot \frac{x^3}{2.3}\sqrt{-1} \text{ \&c.}$$

$$\Psi(t-x\sqrt{-1}) = \Psi t - \psi t . x\sqrt{-1} - \psi' t \cdot \frac{x^2}{2} + \psi'' t \cdot \frac{x^3}{2.3}\sqrt{-1} \text{ \&c.}$$

(on ſuppoſe ici que $\varphi' t = \frac{d.\varphi t}{dt}$, $\varphi'' t = \frac{d.\varphi' t}{dt}$, & ainſi des autres); donc l' équation ſera

$$\Phi t - \Psi t + (\varphi t + \psi t)\, x\sqrt{-1} - (\varphi' t - \psi' t)\frac{x^2}{2}$$

$$- (\varphi'' t + x'' t)\frac{x^3}{2.3}\sqrt{-1} \text{ \&c.} = M.$$

Maintenant il eſt clair que les puiſſances impaires de x ne peuvent diſparoitre que dans ces deux cas, 1.° lorſque $\Phi t - \Psi t = M$, ce qui donne, en différentiant deux fois, $\varphi' t - \psi' t = 0$, & ainſi de ſuite; 2.°, lorſque $\varphi t + \psi t = 0$, ce qui donne auſſi $\varphi'' t + \psi'' t = 0$ &c.

Dans le premier cas on aura $\Psi(t - x\sqrt{-1}) = \Phi(t - x\sqrt{-1}) - M$, & l' équation deviendra

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) - \Phi(t - x\sqrt{-1}) = 0$$

de plus on aura

$$p = \varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1}) \quad \&$$

$$\frac{q}{\sqrt{-1}} = \varphi(t + x\sqrt{-1}) - \varphi(t - x\sqrt{-1})$$

où il faut remarquer qu'en faiſant x négative la valeur de p demeure la même, & que celle de q change de ſigne; d' où il s' enſuit que dans ce cas-là les particules du fluide auront autour du diamètre du vaſe des mouvemens ſemblables, & dans le même ſens.

Dans le ſecond cas on aura $\psi(t - x\sqrt{-1}) = -\varphi(t - x\sqrt{-1})$, & intégrant $\Psi(t - x\sqrt{-1}) = N - \Phi(t - x\sqrt{-1})$, d' où

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) + \Phi(t - x\sqrt{-1}) = M + N,$$

& enſuite

$$p = \varphi(t + x\sqrt{-1}) - \varphi(t - x\sqrt{-1})$$

$$\frac{q}{\sqrt{-1}} = \varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1}).$$

Ici en faiſant x négative p devient négative, & q demeure poſitive, ce qui fait voir que dans ce cas les particules du fluide décrivent de coté & d' autre du diamètre du vaſe des courbes égales & ſemblables, comme dans le cas précédent, mais avec des directions contraires.

Tout ſe réduit donc à trouver la fonction Φ par cette condition que

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) \pm \Phi(t - x\sqrt{-1}) = H,$$

x étant donnée en t par la figure des parois du vaſe, & H étant une quantité conſtante.

Soit $x = h + kt$, ce qui est le cas où les parois sont des lignes droites, & l'équation dont il s'agit sera réductible à la formule générale de l'Art. XVIII.

On fera donc $\alpha = 1$, $\beta = \pm 1$, $\gamma = 0$, $a = \sqrt{-1}$, $b = -\sqrt{-1}$, $T = H$, $y = \Phi t$, & l'on aura, 1.° $-\frac{\alpha}{\beta} = \mp 1$, & par conséquent $\lambda = 1$, cos. $\omega = \mp 1$, sin. $\omega = 0$; donc $\omega = \mu \pi$, π dénotant la demie circonférence, & μ étant un nombre quelconque impair dans le premier cas, savoir dans le cas où l'on prend le signe supérieur, & un nombre quelconque pair dans l'autre cas; par conséquent on aura $r + 1 = \frac{\mu \pi \sqrt{-1}}{l \frac{1+k\sqrt{-1}}{1-k\sqrt{-1}}}$; or on sait que $l \frac{1 + \text{tang. } u . \sqrt{-1}}{1 - \text{tang. } u . \sqrt{-1}} = 2 u \sqrt{-1}$; donc, prenant u pour l'arc dont la tangente est k, on aura $r + 1 = \frac{\mu \pi}{2u}$. 2.° On aura, par le même Article $Q = -(1 + k\sqrt{-1})^{-r-1}\, l(1 + k\sqrt{-1}) \mp (1 - k\sqrt{-1})^{-r-1}\, l(1 - k\sqrt{-1})$; or, à cause de $k = \frac{\text{sin. } u}{\text{cos. } u}$, on a $(1 \pm k\sqrt{-1})^{-r-1} = \text{cos. } u^{r+1}$ $(\text{cos. } u \pm \text{sin. } u \cdot \sqrt{-1})^{-r-1} = \text{cos. } u^{r+1}\,[\text{cos. } (r+1)u \mp \text{sin. } (r+1)u \cdot \sqrt{-1}]$, & $l(1 \pm k\sqrt{-1}) = l\, \frac{\text{cos. } u \pm \text{sin. } u . \sqrt{-1}}{\text{cos. } u} = \pm u \sqrt{-1} - l \text{ cos. } u$; donc on aura pour le premier cas $Q = -2 \text{ cos. } u^{r+1}[u \text{ sin. } (r+1)u - l \text{ cos. } u \cdot \text{cos. } (r+1)u] =$ (à cause de $(r+1)u = \frac{\mu \pi}{2}$) $\mp 2u \text{ cos. } u^{r+1}$, le signe supérieur étant pour le cas où μ sera de la forme $4\nu + 1$, & le signe inférieur pour le cas ou μ sera de la forme $4\nu + 3$; & pour l'autre cas $Q = -2 \text{ cos. } u^{r+1}\,[u \text{ cos. } (r+1)u$

+ l

$+ l \cos. u \cdot \sin. (r+1)u] \sqrt{-1} = \mp 2u \cos. u^{r+1} \cdot \sqrt{-1}$, le signe supérieur étant pour le cas où μ est de la forme 4ν, & le signe inférieur pour le cas où μ est de la forme $4\nu + 2$; 3.° On aura, à cause de $T = H$,

$$\int T (h + kt)^r dt = \frac{H}{(r+1)k} (h + kt)^{r+1} + \text{const.};$$

$$\text{donc } \theta = \frac{H}{(r+1)k} + (h + kt)^{-r-1} \times \text{const.}$$

Donc on aura en général dans le premier cas

$$-k \frac{\theta}{Q} = \pm \frac{H}{2u(r+1) \cos. u^{r+1}} + (h + kt)^{-r-1} \times \text{const.}$$

Et dans le second cas

$$-k \frac{\theta}{Q} = \pm \frac{H}{2u(r+1) \cos. u^{r+1} \sqrt{-1}} + (h+kt)^{-r-1} \times \text{const.}$$

Ainsi substituant au lieu de $r + 1$ sa valeur $\frac{\mu\pi}{2u}$, & mettant successivement au lieu de μ tous les nombres entiers positifs & négatifs, on aura tous les termes qui doivent entrer dans la valeur de y.

Il y a cependant un cas à excepter; c'est celui où $\mu = 0$, & par conséquent $r = -1$; dans ce cas on aura $\int T (h + kt)^r dt = \frac{H}{k} l(h+kt) + \text{const.}$, & par conséquent

$$-k \frac{\theta}{Q} = \frac{H}{2u\sqrt{-1}} l(h + kt) + \text{const.}$$

Donc faisant pour abreger $\cos. u^{\frac{\pi}{2u}} = p$, $(h + kt)^{\frac{\pi}{2u}} = z$, & prenant des constantes arbitraires A, B, C &c. a, b, c &c., on aura pour l'équation

$$\Phi [t + (h + kt) \sqrt{-1}] + \Phi [t - (h + kt) \sqrt{-1}] = H,$$

$$\Phi t = A z + a z^{-1} + B z^3 + b z^{-3} + \&c. + \frac{H}{\pi}$$

$$\left(p + \frac{1}{p} - \frac{1}{3} p^3 - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5} p^5 + \frac{1}{5p} - \&c.\right),$$

& pour l' équation

$$\Phi [t + (h + k t) \sqrt{-1}] - \Phi [t - (h + kt) \sqrt{-1}] = H,$$

$$\Phi t = \frac{H}{2u\sqrt{-1}}\, l\,(h + k t) + A z^2 + a z^{-2} + B z^4 + b z^{-4}$$

$$+ \text{\&c.} + \text{const.}$$

Or $p - \frac{1}{3} p^3 + \frac{1}{5} p^5 - \text{\&c.} = \text{arc. tang. } p$, & $\frac{1}{p} - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \text{\&c.} = \text{arc. cot. } p$; donc la somme de ces deux séries sera $= \frac{\pi}{2}$; par conséquent on aura pour la première équation

$$\Phi t = A z + a z^{-1} + B z^3 + b z^{-3} + \text{\&c.} + \frac{H}{2}.$$

Connoissant ainsi la nature de la fonction Φ, on trouvera par la différentiation la fonction φ, & par conséquent les expressions des vitesses p & q; & l' on déterminera ensuite les constantes arbitraires A, a, B, b &c. par les valeurs connues, & données de p & q, lorsque $t = 0$.

XXI. Si $k = 0$, de manière que le fluide se meuve dans un canal rectiligne, & dont la largeur soit par tout $= 2h$, on supposera k infiniment petite, & l' on aura d' abord $u = k$; faisant ensuite $k = \alpha h$, α étant une quantité évanouissante, on aura $(h + kt)^{\frac{\pi}{2u}} = h^{\frac{\pi}{2u}} (1 + \alpha t)^{\frac{\pi}{2\alpha h}} = h^{\frac{\pi}{2k}} \times e^{\frac{\pi t}{2h}}$; & $l(h + kt) = lh(1 + \alpha t) = lh + \alpha t$; par conséquent $\frac{H}{2u\sqrt{-1}}\, l\,(h + kt) = \frac{H l h}{2k\sqrt{-1}} + \frac{H t}{2h\sqrt{-1}}$. Donc si on fait $z = e^{\frac{\pi t}{2h}}$, on aura pour Φt les mêmes expressions que dans l' Article précé-

dent, excepté qu'au lieu de $\frac{H}{2u\sqrt{-1}} l(h + kt)$, il faudra mettre $\frac{Ht}{2h\sqrt{-1}}$.

XXII. Si on ne vouloit pas que le vaſe eut deux parties égales & ſemblables, alors nommant x les ordonnées qui répondent à l'une des parois, & x' celles qui répondent à l'autre, on aura les deux équations
$\Phi(t + x\sqrt{-1}) - \Psi(t - x\sqrt{-1}) = M$, &
$\Phi(t + x'\sqrt{-1}) - \Psi(t - x'\sqrt{-1}) = N$,
par le moyen deſquelles on déterminera les fonctions Φ, & Ψ.

Si les deux parois ſont des lignes droites, de ſorte que $x = h + kt$, & $x' = h' + k't$, on en viendra à bout de la manière ſuivante. On ſuppoſera $h' = h + H$, $k' = k + K$, & la ſeconde équation deviendra, en faiſant $H + Kt = X$,
$\Phi(t + x\sqrt{-1} + X\sqrt{-1}) - \Psi(t - x\sqrt{-1} - X\sqrt{-1}) = N$.

Soit maintenant $\Phi(t + x\sqrt{-1}) = y$, & $\Psi(t - x\sqrt{-1}) = y'$; on aura ces deux équations
$y - y' = M$, &
$y + \frac{dy}{dt} X\sqrt{-1} + \frac{d^2y}{2\,dt^2}(X\sqrt{-1})^2 + \frac{d^3y}{2.3\,dt^3}(X\sqrt{-1})^3 + \&c.$
$- y' + \frac{dy'}{dt} X\sqrt{-1} - \frac{d^2y}{2\,dt^2}(X\sqrt{-1})^2 + \frac{d^3y}{2.3\,dt^3}$
$(X\sqrt{-1})^3 - \&c. = N$.

La première donne $y' = y - M$, $\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ &c.; donc la ſeconde deviendra $2\frac{dy}{dt} X\sqrt{-1} + 2\frac{d^3y}{2.3\,dt^3}(X\sqrt{-1})^3 + \&c. + M = N$, ou bien
$$2\sqrt{-1}(H + Kt)\frac{dy}{dt} + 2\frac{(\sqrt{-1})^3}{2.3}(H + Kt)^3\frac{d^3y}{dt^3}$$
$$+ 2\frac{(\sqrt{-1})^5}{2.3.4.5}(H + Ht)^5\frac{d^5y}{dt^5} - \&c. = N - M,$$

équation qui eſt dans le cas de la formule (S) de l'Article XVIII.; & l'on aura $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$, $a = \sqrt{-1}$, $b = -\sqrt{-1}$; $h = H$, $k = K$; donc &c.

On trouvera ainſi la valeur de y en t, après quoi on aura celle de y' par l'équation $y' = y - M$.

XXIII. Les équations $p = \varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1})$, $\frac{q}{\sqrt{-1}} = \varphi(t + x\sqrt{-1}) - \varphi(t - x\sqrt{-1})$ trouvées dans l'Art. XX. donnent

$$p + \frac{q}{\sqrt{-1}} = 2\,\varphi(t + x\sqrt{-1});$$

ou bien, en faiſant $P = \frac{p}{2}$, $Q = -\frac{q}{2}$,

$$\varphi(t + x\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1};$$

ainſi pour trouver les viteſſes p, & q, il ne s'agit que de réduire l'expreſſion $\varphi(t + x\sqrt{-1})$ à la forme $P + Q\sqrt{-1}$, P, & Q étant des quantités réelles.

Lorſque la fonction φ eſt donnée algébriquement, on peut trouver les valeurs de P, & Q par les méthodes connues; mais ſi la fonction φ eſt inconnue, alors il faut avoir recours aux ſéries, leſquelles donnent

$$P = \varphi t - \frac{x^2}{2}\varphi'' t + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{IV} t - \text{\&c.} \quad \&$$

$$Q = x\varphi' t - \frac{x^3}{2.3}\varphi''' t + \frac{x^5}{2.3.4.5}\varphi^{V} t - \text{\&c.}$$

Or je remarque 1.° que ces deux ſéries deviennent divergentes, lorſque x eſt fort grande, 2.° qu'elles demandent qu'on connoiſſent les différences de la fonction φt, de ſorte qu'elles ne peuvent être d'uſage dans la pratique que lorſque la fonction φ eſt connue analitiquement, & nullement lorſque cette fonction n'eſt donnée que méchaniquement, c'eſt-à-dire par le moyen d'une courbe; ainſi je crois qu'il ne ſera pas inutile de faire voir, comment

on peut transformer ces mêmes séries en d'autres qui dépendent uniquement de la fonction φ.

Pour cet effet je prends la quantité

$$\frac{\varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1})}{2},$$

laquelle étant réduite en série devient

$$\varphi t - \frac{x^2}{2}\varphi'' t + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{IV} t - \frac{x^6}{2.3.4.5.6}\varphi^{VI} t + \&c.$$

je prends de plus la quantité

$$\frac{\varphi(t + x) + \varphi(t - x)}{2},$$

laquelle se change de même en celle-ci

$$\varphi t + \frac{x^2}{2}\varphi'' t + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{IV} t + \frac{x^6}{2.3.4.5.6}\varphi^{VI} t + \&c.$$

j'appelle la première de ces deux quantité $\bar{y}$, & la seconde y; ensuite je suppose que Y, Y', Y'', Y''' &c. soient les valeurs de y, lorsque au lieu de x on y met o, $1x$, $2x$, $3x$ &c., & prenant des coéficiens arbitraires α, α', α'', α''' &c., j'aurai

$$\begin{aligned}
&y - \alpha Y - \alpha' Y' - \alpha'' Y'' - \alpha''' Y''' - \&c. \\
&= (1 - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \alpha''' - \&c.)\,\varphi t \\
&- (1 + \alpha' + 4\alpha'' + 9\alpha''' + \&c.)\,\frac{x^2}{2}\varphi'' t \\
&+ (1 - \alpha' - 2^4\alpha'' - 3^4\alpha''' - \&c.)\,\frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{IV} t \\
&- (1 + \alpha' + 2^6\alpha'' + 3^6\alpha''' + \&c.)\,\frac{x^6}{2.3.4.5.6}\varphi^{VI} t
\end{aligned}$$

&c.

Soit

$$\left.\begin{aligned}
&1 - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \alpha''' - \&c. = o \\
&1 + \alpha' + 4\alpha'' + 9\alpha''' + \&c. = o \\
&1 - \alpha' - 2^4\alpha'' - 3^4\alpha''' - \&c. = o \\
&1 + \alpha' + 2^6\alpha'' + 3^6\alpha''' + \&c. = o
\end{aligned}\right\}(T)$$

& ainsi de suite, on aura

$y = \alpha Y + \alpha' Y' + \alpha'' Y'' + \alpha''' Y''' +$ &c.

Tout ſe réduira donc à tirer les valeurs de α', α'', α''' &c. des équations, (T). Pour y parvenir, je multiplie la ſeconde par β', la troiſiéme par β'', la quatriéme par β''' &c.; β', β'', β''' &c. étant des coéficiens indéterminés, après quoi je les ajoute toutes enſemble, ce qui me donne

$1 + \beta' + \beta'' + \beta''' +$ &c. $- \alpha - 1$

$(1 - \beta' + \beta'' - \beta''' +$ &c.$)\, \alpha' -$

$(1 - 4\beta' + 2^4\beta'' - 2^6\beta''' +$ &c.$)\, \alpha'' -$

$(1 - 9\beta' + 3^4\beta'' - 3^6\beta''' +$ &c.$)\, \alpha''' -$ &c. $= 0$.

A préſent pour avoir la valeur d' une α quelconque, comme α^m je fais égal à zero chacun des coéficiens des autres α; de cette manière j' ai d' abord

$$\alpha^m = \frac{1 + \beta' + \beta'' + \beta''' + \text{\&c.} - \alpha}{1 - m^2\beta' + m^4\beta'' - m^6\beta''' + \text{\&c.}},$$

& enſuite les équations de condition

$1 - \beta' + \beta'' - \beta''' +$ &c. $= 0$

$1 - 4\beta' + 2^4\beta'' - 2^6\beta''' +$ &c. $= 0$

&c.

c'eſt-à-dire l' équation

$1 - \beta' u^2 + \beta'' u^4 - \beta''' u^6 +$ &c. $= 0$,

laquelle doit avoir lieu, en mettant au lieu de u tous les nombres entiers 1, 2, 3 &c. à l' infini, excepté m. Donc ſi on multiplie cette équation par $1 - \frac{u^2}{m^2}$, & qu'on ſuppoſe $u = \frac{z}{\pi}$, on aura

$$1 - \frac{\beta' + \frac{1}{m^2}}{\pi^2} z^2 + \frac{\beta'' + \frac{\beta'}{m}}{\pi^4} z^4 - \frac{\beta''' + \frac{\beta''}{m^2}}{\pi^6} z^6$$

$+$ &c. $= 0$

équation, dont les racines ſeront π^2, $4\pi^2$, $9\pi^2$, $16\pi^2$ &c. à l' infini; donc comparant cette équation avec l'équation

$$\frac{\sin. z}{z} = 1 - \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4.5} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6.7} + \&c. = 0,$$

dont les racines sont aussi, comme l'on sait, π^2, $4\pi^2$, $9\pi^2$, $16\pi^2$ &c., on aura

$$\beta' + \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{2.3},$$

$$\beta'' + \frac{\beta'}{m^2} = \frac{\pi^4}{2.3.4.5},$$

$$\beta''' + \frac{\beta''}{m^2} = \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7},$$

&c.

par-où l'on connoitra les valeurs des quantités β; mais pour notre objet il suffit de remarquer que

$$1 - \beta' u^2 + \beta'' u^4 - \beta''' u^6 + \&c. = \frac{\sin. \pi u}{\pi u \left(1 - \frac{u^2}{m^2}\right)}.$$

Car, faisant 1.° $u^2 = -1$, savoir $u = \sqrt{-1}$, on aura

$$1 + \beta' + \beta'' + \beta''' + \&c. = \frac{\sin. (\pi \sqrt{-1})}{\pi \sqrt{-1} \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)}$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)},$$

2.° Si on suppose $u = m$ on trouvera, en différentiant le numérateur & le dénominateur, à cause que l'un & l'autre s'évanouissent lorsque $u = m$,

$$1 - \beta' m^2 + \beta'' m^4 - \beta''' m^6 + \&c. = -\frac{\cos. m\pi}{2} = \pm \frac{1}{2},$$

le signe supérieur étant pour le cas où m est impair, & le signe inférieur pour le cas où m est pair; donc on aura

$$\alpha^m = \pm \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)} \mp 2\alpha,$$

ou bien, en faisant $\alpha = a\,\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$,

$$\alpha^m = \pm\,\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \times \frac{m^2(1-a) - a}{m^2+1};$$

donc enfin

$$y = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\left\{\frac{a}{2}\,Y + \frac{1-a-a}{1+1}\,Y' - \frac{4(1-a)-a}{4+1}\,Y'' + \frac{9(1-a)-a}{9+1}\,Y''' - \&c.\right\}.$$

Or puisque la quantité a est arbitraire, on la déterminera de manière que la série devienne la plus convergente qu'il est possible ; c'est pourquoi on fera $1 - a = 0$, savoir $a = 1$; ce qui donnera

$$y = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\left\{\frac{Y}{2} - \frac{Y'}{1+1} + \frac{Y''}{4+1} - \frac{Y'''}{9+1} + \&c.\right\},$$

& par conséquent

$$\phi(t + x\sqrt{-1}) + \phi(t - x\sqrt{-1}) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \times \left\{\frac{1}{2}\,\phi t - \frac{\phi(t+x) + \phi(t-x)}{1+1} + \frac{\phi(t+2x) + \phi(t-2x)}{4+1} - \frac{\phi(t+3x) + \phi(t-3x)}{9+1} + \&c.\right\}.$$

Qu'on différentie cette équation en faisant varier x, & qu'on l'intégre ensuite en faisant varier t, on aura

$$[\phi(t + x\sqrt{-1}) - \phi(t - x\sqrt{-1})]\sqrt{-1} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \times \left\{\frac{\phi(t+x) - \phi(t-x)}{1+1} - 2\,\frac{\phi(t+2x) - \phi(t-2x)}{4+1} + 3\,\frac{\phi(t+3x) - \phi(t-3x)}{9+1} - \&c.\right\}.$$

Donc si on fait

$$P = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\,\phi t - \frac{\phi(t+x) + \phi(t-x)}{1+1}\right.$$

$$+ \frac{\varphi(t+2x)+\varphi(t-2x)}{4+1} - \frac{\varphi(t+3x)+\varphi(t-3x)}{9+1} + \&c. \Big\} \&$$

$$Q = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \Big\{ \frac{\varphi(t+x)-\varphi(t-x)}{1+1} - 2\,\frac{\varphi(t+2x)-\varphi(t-2x)}{4+1}$$

$$+ 3\,\frac{\varphi(t+3x)-\varphi(t-3x)}{9+1} - \&c. \Big\},$$

on aura

$$\varphi(t \pm x\sqrt{-1}) = P \pm Q\sqrt{-1};$$

& les quantités P & Q feront données, comme l'on voit, par des fuites convergentes dont chaque terme pourra fe déterminer mécaniquement fans qu'il foit befoin de connoitre la nature de la fonction φ.

XXIV. Il eft clair que l'intégrale de l'équation $\frac{d^2 p}{dt^2} = -\frac{d^2 p}{dx^2}$ (*Art. XX.*) eft auffi

$$p = \varphi(x + t\sqrt{-1}) + \psi(x - t\sqrt{-1})$$

ou ce qui revient au même

$$p = \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})+\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2}$$

$$- \frac{\psi(x+t\sqrt{-1})-\psi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

d'où l'on tire enfuite

$$q = \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{\psi(x+t\sqrt{-1})+\psi(x-t\sqrt{-1})}{2}.$$

Imaginons que le vafe foit formé de deux parois droites & paralelles enforte qu'il ait par tout la même largeur a; en prenant une de ces parois pour l'axe des t, il faudra que la viteffe q foit nulle lorfque $x = 0$, & lorfque $x = a$, quel que foit t. Or en faifant $t = 0$, on a $p = \varphi x$, & $q = \psi x$; ainfi, en décrivant fur la portion de l'axe des x comprife entre les parois

du vase, deux courbes qui soient les échelles des vitesses p & q que doivent avoir les particules du fluide dans cette section du vase, les appliquées de ces courbes répondantes à une abscisse quelconque x représenteront les fonctions φx & ψx.

Présentement on trouvera par l' Art. préc.

$$p = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2}\varphi x - \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{1+1} + \frac{\varphi(x+2t) + \varphi(x-2t)}{4+1} - \&c. \right\} - \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$$
$$\times \left\{ \frac{\psi(x+t) - \psi(x-t)}{4+1} - 2\,\frac{\psi(x+2t) - \psi(x-2t)}{4+1} + \&c. \right\}$$

$$\& \; q = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)}{1+1} - 2\,\frac{\varphi(x+2t) - \varphi(x-2t)}{4+1} + \&c. \right\} + \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$$
$$\times \left\{ \frac{1}{2}\psi x - \frac{\psi(x+t) + \psi(x-t)}{1+1} + \frac{\psi(x+2t) + \psi(x-2t)}{4+1} - \&c. \right\}$$

Donc puisque q doit être $= 0$, lorsque $x = 0$, & lorsque $x = a$, il faudra que l' on ait

$$\frac{\varphi t - \varphi - t}{1+1} - 2\,\frac{\varphi 2t - \varphi - 2t}{4+1} + \&c.$$
$$+ \frac{1}{2}\psi 0 - \frac{\psi t + \psi - t}{1+1} + \frac{\psi 2t + \psi - 2t}{4+1} - \&c. = 0$$

$$\frac{\varphi(a+t) - \varphi(a-t)}{1+1} - 2\,\frac{\varphi(a+2t) - \varphi(a-2t)}{4+1} + \&c.$$
$$+ \frac{1}{2}\psi a - \frac{\psi(a+t) + \psi(a-t)}{1+1} + \frac{\psi(a+2t) + \psi(a-2t)}{4+1}$$
$$- \&c. = 0,$$

ou bien, afin que les fonctions φ & ψ ne dépendent point l' une dans l' autre

$$\frac{\varphi t - \varphi - t}{1+1} - 2\,\frac{\varphi 2t - \varphi - 2t}{4+1} + \&c. = 0$$

$$\frac{\phi(a+t)-\phi(a-t)}{1+1} - 2\,\frac{\phi(a+2t)-\phi(a-2t)}{4+1} + \&c. = 0$$

$$\frac{1}{2}\,\psi\,0 - \frac{\psi\,t+\psi-t}{1+1} + \frac{\psi\,2t+\psi-2t}{4+1} - \&c. = 0$$

$$\frac{1}{2}\,\psi\,a - \frac{\psi(a+t)+\psi(a-t)}{1+1} + \frac{\psi(a+2t)+\psi(a-2t)}{4+1} + \&c. = 0.$$

Pour ſatisfaire à ces quattre conditions, on ſuppoſera que les fonctions ϕ & ψ ſoient telles que l' on ait en général, quelle que ſoit la valeur de u,

$$\phi\,u = \phi - u,\ \phi(a+u) = \phi(a-u),$$

$$\psi\,u = -\psi - u,\ \psi(a+u) = -\psi(a-u);$$

ce qui ſervira à déterminer la continuation des deux échelles données pour les abſciſſes négatives & pour les abſciſſes plus grandes que a, laquelle devra par conſéquent être telle que les ordonnées également diſtantes de part & d' autre des deux extrémités de l' axe a ſoient égales & de même ſigne dans la courbe des viteſſes p, & de ſignes différens dans la courbe des viteſſes q; d'où il s'enſuit que la première de ces courbes ſera compoſée d' une infinité de branches égales & ſemblables, toutes du même coté de l' axe, & diſpoſées alternativement en ſens contraire, & que l'autre aura de même une infinité de branches égales & ſemblables, mais ſituées alternativement au deſſus & au deſſous de l' axe.

Ayant donc décrit ces deux courbes, on aura par les ſéries données ci-deſſus les valeurs approchées des viteſſes p & q de chaque particule du fluide; d' où l' on voit que le mouvement d' un fluide qui ſe meut dans un canal droit eſt déterminé par le mouvement que ce fluide a dans une ſection quelconque de ce même canal.

De plus il eſt clair par la nature des courbes qui repréſentent les fonctions ϕ & ψ qu'en augmentant, ou en diminuant la quantité t de $2a$, ou de $4a$, ou de $6a$ &c. les valeurs de p & de q demeurent les mêmes; d' où il

s'ensuit, que si on imagine le fluide divisé en portions égales par des droites perpendiculaires aux parois du canal, & placées à la distance $2a$ les unes des autres, chacune de ces portions du fluide aura nécessairement le même mouvement.

Si le fluide étoit terminé par une ligne droite perpendiculaire aux parois du vase, alors prenant cette même ligne pour l'axe des x il faudroit que $p = 0$ lorsque $t = 0$, donc $\varphi x = 0$, & par conséquent

$$p = -\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{\psi(x+t) - \psi(x-t)}{1+1} \right.$$

$$\left. - 2\frac{\psi(x+2t) - \psi(x-2t)}{4+1} + \&c. \right\} \&$$

$$q = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2}\psi x - \frac{\psi(x+t) - \psi(x-t)}{1+1} \right.$$

$$\left. + \frac{\psi(x+2t) + \psi(x-2t)}{4+1} - \&c. \right\}$$

Or puisque la valeur de p est nulle lorsque $t = 0$ elle le sera aussi lorsque $t = 2a$, ou $= 4a$ &c.; ainsi le fluide aura dans ce cas le même mouvement que s'il étoit renfermé dans un vase de figure rectangulaire dont la longueur fût double, ou quadruple &c. de la largeur.

On pourra encore trouver le mouvement du fluide lorsque la longueur du vase sera égale à sa largeur, & en général toutes les fois que les deux dimensions du vase seront commensurables entr'elles; mais il faudra pour lors que les valeurs données de q forment une courbe qui ait un, ou plusieurs nœuds, de sorte que la fonction ψx demeure la même en augmentant ou en diminuant x d'une quantité égale à la longueur du vase. Dans tous les autres cas, c'est-à-dire, lorsque les dimensions du vase seront incommensurables, on ne pourra déterminer le mouvement du fluide par la théorie précédente; & comme cette théorie est fondée sur la supposition que le mouvement du fluide

ſoit dans un état conſtant, enſorte que les particules du fluide décrivent des courbes invariables, ce ſera une marque que l' hypothéſe dont nous parlons n' aura point lieu; ſur quoi voyés les Art. XLII. & XLIII. de la Diſſertation citée ci-deſſus.

Solution d' une queſtion rélative à la théorie des cordes vibrantes.

XXV. La queſtion que je vais examiner ici conſiſte à ſavoir ſi toutes les courbes qui rendent la ſolution du problême des cordes vibrantes poſſible, ſuivant la théorie de M. D'Alembert, ſont renfermées ou non dans l' équation

$y = \alpha$ ſin. $\frac{\pi x}{a} + \beta$ ſin. $\frac{2\pi x}{a} + \gamma$ ſin. $\frac{3\pi x}{a}$ + &c.;

queſtion que ce grand Géomêtre a vivement agitée avec MM. Bernoulli & Euler dans le premier Mémoire de ſes Opuſcules Mathématiques.

Pour pouvoir réſoudre cette queſtion d' une manière directe & convaincanté, je prends l' équation générale de la courbe que forme la corde vibrante, laquelle eſt comme l' on ſait,

$$y = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2},$$

& j' examine quelle doit être la forme de la fonction φ pour que l' on ait en général quel que ſoit t,

$\varphi t + \varphi - t = 0$, & $\varphi(a+t) + \varphi(a-t) = 0$, conditions néceſſaires pour que les deux bouts de la corde ſoient fixes; or puiſque $\varphi t = -\varphi - t$ on aura $\varphi(a-t) = -\varphi-(a-t) = -\varphi(t-a)$; donc la ſeconde des deux conditions ſe réduira à celle-ci

$$\varphi(t+a) - \varphi(t-a) = 0.$$

Cette équation étant comparée avec la formule de l' Art. XIX., on aura $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$, $b = -a$, $T = 0$; donc $P = e^{-\rho a} - e^{\rho a}$; & faisant $\rho = -r\sqrt{-1}$, $P = 2$ fin. $ra \times \sqrt{-1}$; donc l'équation $P = 0$ donnera $ra = \mu\pi$, μ étant un nombre entier positif, ou négatif; par conséquent on aura $r = \frac{\mu\pi}{a}$, & $\rho = -\frac{\mu\pi}{a}\sqrt{-1}$; or, T étant $= 0$, on aura $\int T e^{\rho t} dt =$ const.; donc $\frac{\theta}{q} = e^{\frac{\mu\pi t}{a}\sqrt{-1}} \times$ const.; donc, donnant successivement à μ toutes ses valeurs $1, -1, 2, -2$ &c., & prenant des constantes arbitraires A, B, C &c., A', B', C', on aura

$$\varphi t = A e^{\frac{\pi t}{a}\sqrt{-1}} + A' e^{-\frac{\pi t}{a}\sqrt{-1}} + B e^{\frac{2\pi t}{a}\sqrt{-1}} + B' e^{-\frac{2\pi t}{a}\sqrt{-1}} + \&c.$$

équation qui revient à cette forme

$$\varphi t = \alpha \text{ fin. } \frac{\pi t}{a} + \alpha' \text{ cof. } \frac{\pi t}{a} + \beta \text{ fin. } \frac{2\pi t}{a} + \beta' \text{ cof. } \frac{2\pi t}{a} + \&c.$$

α, α', β, β' &c. étant pareillement des constantes arbitraires.

Or par la première condition il faut que $\varphi t + \varphi - t = 0$, donc $\alpha' \text{ cof. } \frac{\pi t}{a} + \beta' \text{ cof. } \frac{2\pi t}{a} + \&c. = 0$, donc $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$ &c., donc

$$\varphi t = \alpha \text{ fin. } \frac{\pi t}{a} + \beta \text{ fin. } \frac{2\pi t}{a} + \gamma \text{ fin. } \frac{3\pi t}{a} + \&c.$$

par conséquent l'équation de la figure initiale de la corde, lorsqu'elle en a une, ne peut être que de la forme

$$y = \alpha \text{ fin. } \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ fin. } \frac{2\pi x}{a} + \gamma \text{ fin. } \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

Sur l' intégration des équations

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + \&c. + ly' + m\frac{dy'}{dt} + n\frac{d^2y'}{dt^2} + \&c. + \lambda y'' + \mu\frac{dy''}{dt} + \nu\frac{d^2y''}{dt^2} + \&c. = T,$$

$$L'y + M'\frac{dy}{dt} + N'\frac{d^2y}{dt^2} + \&c. + l'y' + m'\frac{dy'}{dt} + n'\frac{d^2y'}{dt^2} + \&c. + \lambda'y'' + \mu'\frac{dy''}{dt} + \nu'\frac{d^2y''}{dt^2} + \&c. = T',$$

$$L''y + M''\frac{dy}{dt} + N''\frac{d^2y}{dt^2} + \&c. + l''y' + m''\frac{dy'}{dt} + n''\frac{d^2y'}{dt^2} + \&c. + \lambda''y'' + \mu''\frac{dy''}{dt^2} + \nu''\frac{d^2y''}{dt^2} + \&c. = T'',$$

&c.

dans lesquelles L, M, N &c. l, m, n &c. &c. *sont des fonctions quelconques de* t.

XXVI. En suivant les mêmes principes que dans l'Art. I. on multipliera la première de ces équations par $z\,dt$, la seconde par $z'dt$, la troisiéme par $z''dt$, & ainsi de suite, z, z', z'' &c. étant de nouvelles indéterminées, & après les avoir ajoutées ensemble, on en prendra l'intégrale en faisant disparoitre par des intégrations par parties, les différences des variables y, y', y'' &c. de dessous le signe $\int$; de cette manière on aura une équation de la forme suivante

$$U + \int(Vy + V'y' + V''y'' + \&c.)\,dt = \int(Tz + T'z' + T''z'' + \&c.)\,dt,$$

dans laquelle

$$U = y\left(Mz - \frac{d.Nz}{dt} + \&c. + M'z' - \frac{d.N'z'}{dt^2} + \&c. + M''z'' - \frac{d.N''z''}{dt} + \&c.\right)$$

$$+\frac{dy}{dt}(N\zeta - \&c. + N'\zeta' - \&c. + N''\zeta'' - \&c.) + \&c.$$

$$+ y'(m\zeta - \frac{d.nz}{dt} + \&c. + m'\zeta' - \frac{d.n'z'}{dt^2} + \&c.$$

$$+ m''\zeta'' - \frac{d.n''z''}{dt} + \&c.)$$

$$+\frac{dy'}{dt}(n\zeta - \&c. + n'\zeta' - \&c. + n''\zeta'' - \&c.) + \&c.$$

$$+ y''(\mu\zeta - \frac{d.\nu z}{dt} + \&c. + \mu'\zeta' - \frac{d.\nu'z'}{dt^2} + \&c.$$

$$+ \mu''\zeta'' - \frac{d.\nu''z''}{dt} + \&c.)$$

$$+\frac{dy''}{dt}(\nu\zeta - \&c. + \nu'\zeta' - \&c. + \nu''\zeta'' - \&c.) + \&c. \&c.$$

$$\& V = L\zeta - \frac{d.Mz}{dt} + \frac{d^2.Nz}{dt^2} - \&c.$$

$$+ L'\zeta' - \frac{d.M'z'}{dt} + \frac{d^2.N'z'}{dt} - \&c.$$

$$+ L''\zeta'' - \frac{d.M''z''}{dt} + \frac{d^2.N''z''}{dt^2} - \&c. \&c.$$

$$V' = l\zeta - \frac{d.mz}{dt} + \frac{d^2.nz}{dt^2} - \&c.$$

$$+ l'\zeta' - \frac{d.m'z'}{dt} + \frac{d^2.n'z'}{dt^2} - \&c.$$

$$+ l''\zeta'' - \frac{d.m''z''}{dt} + \frac{d^2.n''z''}{dt^2} - \&c. \&c.$$

$$V'' = \lambda\zeta - \frac{d.\mu z}{dt} + \frac{d^2.\nu z}{dt^2} - \&c.$$

$$+ \lambda'\zeta' - \frac{d.\mu'z'}{dt} + \frac{d^2.\nu'z'}{dt^2} - \&c.$$

$$+ \lambda''\zeta'' - \frac{d.\mu''z''}{dt} + \frac{d^2.\nu''z''}{dt^2} - \&c. \&c.$$

Suppofant donc $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$ &c. on aura

$$U = \int (T\zeta + T'\zeta' + T'\zeta'' + \&c.)\, dt$$

équation, dans laquelle les plus hautes différences des variables y, y', y'' &c. ſe trouveront moins élevées d'une unité que dans les équations différentielles propoſées.

On aura donc autant de pareilles intégrales, qu'on trouvera de valeurs particulières de chacune des quantités z, z', z'', &c. par le moyen des équations $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$ &c. Or ſoit m la ſomme des expoſans des plus hautes différences de y, y', y'' &c. dans les équations propoſées, il eſt clair que la quantité U contiendra autant d'inconnues comme y, y', y'' &c. $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dy''}{dt}$ &c. &c. qu'il y a d'unités dans le nombre m; donc ſi on a auſſi m valeurs particuliéres de z, de z', de z'' &c., on trouvera facilement les valeurs générales & complétes de y, y', y'' &c.

Soient maintenant Y, Y', Y'' &c. les premiers membres des équations propoſées, on aura

$$\int (Yz + Y'z' + Y''z'' + \&c.)\,dt = U$$
$$+ \int (Vy + V'y' + V''y'' + \&c.)\,dt \quad . \; . \; . \; (U);$$

donc faiſant $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$ &c., on aura l'équation

$$U - \int (Yz + Y'z' + Y''z'' \;\&c.)\,dt = \text{conſt.},$$

laquelle aura néceſſairement toutes les valeurs de z, z', z'' &c. communes avec les équations $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$ &c. Or l'équation (U) eſt identique, & par conſéquent ne dépend point des valeurs de y, y', y'' &c.; donc on peut ſuppoſer ces valeurs telles que $Y = 0$, $Y' = 0$, $Y'' = 0$ &c.; & l'on aura par ce moyen l'équation $U = $ conſt., dans laquelle on regardera les quantités y, y', y'' &c. $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dy''}{dt}$ &c. &c. comme données, & les quantités z, z', z'' &c. $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$,

$\frac{dz''}{dt}$ &c. &c. comme indéterminées; or il eſt aiſé de voir que ces indéterminées ſeront auſſi au nombre de m; ſi donc on a m valeurs particuliéres de chacune des quantités y, y', y'' &c. dans les équations $Y = 0$, $Y' = 0$, $Y'' = 0$ &c., on aura auſſi, par la ſubſtitution ſucceſſive de ces valeurs dans l' équation $U =$ conſt., m équations particuliéres, d' où l' on tirera les valeurs de z, z', z'' &c., leſquelles contiendront néceſſairement m conſtantes arbitraires; de ſorte qu'en faiſant ſucceſſivement toutes ces conſtantes, hors une, égales à zéro, on aura m valeurs particuliéres de z, de z', de z'' &c. Donc &c.

XXVII. De là réſulte ce théorème.

Les équations propoſées ſeront intégrables algébriquement, ſi on peut trouver, dans le cas de $T = 0$, $T' = 0$, $T'' = 0$ &c., autant de valeurs particuliéres de chacune des quantités y, y', y'' &c. qu'il y a d' unités dans la ſomme des expoſans des plus hautes différences de ces variables.

Au reſte ce théorème n' eſt qu'une ſuite de celui de l' Art. VI. Car il eſt clair que les équations propoſées peuvent toujours réduire à ne contenir chacune qu' une ſeule variable; & il eſt facile de s' aſſurer par le calcul que les réduites ſeront néceſſairement de l'ordre m; donc &c.

XXVIII. Les équations $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$ &c. ſont intégrables en général lorſque

$L = A\,(h + kt)^p$, $M = B\,(h + kt)^{p+1}$, $N = C\,(h + kt)^{p+2}$ &c., $L' = A'\,(h + kt)^p$, $M' = B'\,(h + kt)^{p+1}$ &c. &c.,

& de même

$l = a\,(h + kt)^q$, $m = b\,(h + kt)^{q+1}$, $n = c\,(h + kt)^{q+2}$ &c., $l' = a'\,(h + kt)^q$, $m' = b'\,(h + kt)^{q+1}$ &c. &c.,

& ainſi des autres.

On fera dans ce cas

$z = R(h + kt)^r$, $z' = R'(h + kt)^r$,
$z'' = R''(h + kt)^r$ &c.

R, R', R'', &c. étant ainsi que r des constantes indéterminées ; on substituera ces valeurs dans les équations dont il s'agit, & divisant ensuite la première par $(h + kt)^{p+r}$, la seconde par $(h + kt)^{q+r}$ &c. on aura des équations sans t, qui donneront les valeurs de r, R, R', R'' &c.

XXIX. Si les coéficiens L, M, N &c., L', M', N' &c. étoient constans, on feroit $k = o$, $h = 1$, & $r = \frac{\rho}{k}$, ρ étant une quantité finie, & l'on auroit $(h + kt)^r = e^{\rho t}$; par conséquent il faudroit supposer

$z = R e^{\rho t}$, $z' = R' e^{\rho t}$, $z'' = R'' e^{\rho t}$ &c.

Méthode générale pour déterminer le mouvement d'un sistéme quelconque de corps qui agissent les uns sur les autres, en supposant que ces corps ne fassent que des oscillations infiniment petites autour de leurs points d'équilibre.

XXX. Soit n le nombre des corps qui composent le sistéme, & nommons y', y'', y''' &c. les espaces infinimens petits que ces corps décrivent dans leus oscillations pendant le tems t, on aura, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre & des ordres plus élevés, des équations de cette forme

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y'}{dt^2} + A'y' + B'y'' + C'y''' + \text{\&c.} + N'y^n = o, \\ &\frac{d^2y''}{dt^2} + A''y' + B''y'' + C''y''' + \text{\&c.} + N''y^n = o, \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2y'''}{dt^2}+A'''y'+B'''y''+C'''y'''+\&c.+N'''y^n=0\\ \&c.\\ \frac{d^2y^n}{dt^2}+A^ny'+B^ny''+C^ny'''+\&c.\ N^ny^n=0,\end{array}\right\}\ (a)$$

A', B', C' &c. A'', B'', C'' &c. &c. étant des conſtantes données par la nature du problême.

Pour intégrer ces équations ſuivant la méthode expliquée ci-deſſus, on multipliera la première par $\lambda' e^{\rho t} dt$, la ſeconde par $\lambda'' e^{\rho t} dt$, la troiſiéme par $\lambda''' e^{\rho t} dt$, & ainſi de ſuite, λ', λ'', λ''' &c. étant, ainſi que ρ, des conſtantes indéterminées; enſuite on les ajoutera enſemble, & on en prendra l' intégrale en faiſant diſparoitre de deſſous le ſigne $\int$ les différences des variables y', y'', y''' &c.; après quoi on fera $=0$ les coéficiens des quantités $\int y' e^{\rho t} dt$, $\int y'' e^{\rho t} dt$, $\int y''' e^{\rho t} dt$ &c.; de cette manière on aura d' abord l' équation intégrale

$$\left\{\lambda'\left(\frac{dy'}{dt}-\rho y'\right)+\lambda''\left(\frac{dy''}{dt}-\rho y''\right)+\lambda'''\left(\frac{dy'''}{dt}-\rho y'''\right)\right.$$
$$\left.+\ \&c.\ +\ \lambda^n\left(\frac{dy^n}{dt}-\rho y^n\right)\right\}e^{\rho t}=\text{conſt.}\ \ldots\ (b)$$

& enſuite les équations

$$\left.\begin{array}{l}\rho^2\lambda'+A'\lambda'+A''\lambda''+A'''\lambda'''+\&c.+A^n\lambda^n=0\\ \rho^2\lambda''+B'\lambda'+B''\lambda''+B'''\lambda'''+\&c.+B^n\lambda^n=0\\ \rho^2\lambda'''+C'\lambda'+C''\lambda''+C'''\lambda'''+\&c.+C^n\lambda^n=0\\ \&c.\\ \rho^2\lambda^n+N'\lambda'+N''\lambda''+N'''\lambda'''+\&c.+N^n\lambda^n=0\end{array}\right\}\ (c)$$

leſquelles ſerviront à déterminer les quantités ρ, λ', λ'', λ''' &c.

Soit, lorſque $t=0$, $y'=Y'$, $y''=Y''$, $y'''=Y'''$ &c. & $\frac{dy'}{dt}=V'$, $\frac{dy''}{dt}=V''$, $\frac{dy'''}{dt}=V'''$ &c., l'équation (b) deviendra en diviſant par $e^{\rho t}$

$$\lambda' \frac{dy'}{dt} + \lambda'' \frac{dy''}{dt} + \lambda''' \frac{dy'''}{dt} + \&c. + \lambda^n \frac{dy^n}{dt}$$
$$- \rho(\lambda'y' + \lambda''y'' + \lambda'''y''' + \&c. + \lambda^n y^n)$$
$$= [\lambda'V' + \lambda''V'' + \lambda'''V''' + \&c. + \lambda^n V^n$$
$$- \rho(\lambda'Y' + \lambda''Y'' + \lambda'''Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n)]\, e^{-\rho t}$$

Or comme la quantité ρ ne ſe trouve dans les équations (c) que ſous la forme quadratique ρ^2, il s'enſuit qu'elle peut avoir indifférement le ſigne $+$ & le ſigne $-$; donc on aura auſſi

$$\lambda' \frac{dy'}{dt} + \lambda'' \frac{dy''}{dt} + \lambda''' \frac{dy'''}{dt} + \&c. + \lambda^n \frac{dy^n}{dt}$$
$$+ \rho(\lambda'y' + \lambda''y'' + \lambda'''y''' + \&c. + \lambda^n y^n)$$
$$= [\lambda'V' + \lambda''V'' + \lambda'''V''' + \&c. + \lambda^n V^n$$
$$+ \rho(\lambda'Y' + \lambda''Y'' + \lambda'''Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n)]\, e^{\rho t};$$

Donc retranchant ces deux équations l'une de l'autre, & diviſant enſuite par 2ρ on aura

$$(d) \ldots\ldots\ldots \lambda'y' + \lambda''y'' + \lambda'''y''' + \&c. + \lambda^n y^n$$
$$= (\lambda'Y' + \lambda''Y'' + \lambda'''Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n)\, \frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2}$$
$$+ (\lambda'V' + \lambda''V'' + \lambda'''V''' + \&c. + \lambda^n V^n)\, \frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}.$$

Qu'on reprenne maintenant les équations (c), & qu'on ſubſtitue dans une quelconque de ces équations les valeurs de $\frac{\lambda''}{\lambda'}$, $\frac{\lambda'''}{\lambda'}$, &c. $\frac{\lambda^n}{\lambda'}$ en ρ^2 tirées de $n-1$ autres, valeurs qui ſeront toujours données, comme l'on voit, par des équations linéaires, on aura une équation qui étant ordonnée par rapport à ρ^2 montera au degré n, & aura par conſéquent n racines. Donc ρ aura, indépendamment de l'ambiguité du ſigne dont nous avons déja tenu compte, n valeurs que nous dénoterons par $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. (ρn), enſorte que $(\rho 1)^2$, $(\rho 2)^2$, $(\rho 3)^2$ ſoient les racines de l'équation dont il s'agit. Donc, ſi on fait pour abreger

$$\theta = (\lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \lambda''' Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n)\, \frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2}$$
$$+ (\lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \&c. + \lambda^n V^n)\, \frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}.$$

& qu'on défigne par $\lambda' 1$, $\lambda' 2$, $\lambda' 3$ &c. $(\lambda' n)$, $\lambda'' 1$, $\lambda'' 2$, $\lambda'' 2$, $\lambda'' 3$ &c. $(\lambda'' n)$ &c. les valeurs de λ', λ'' &c. qui réfultent de la fubftitution de $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. (ρn) au lieu de ρ, & que de même $\theta 1$, $\theta 2$, $\theta 3$ &c. (θn) foient les valeurs correfpondantes de θ, on aura lieu de l' équation (d) les n fuivantes

$$\lambda' 1 y' + \lambda'' 1 y'' + \lambda''' 1 y''' + \&c. + \lambda^n 1 y^n = \theta 1$$
$$\lambda' 2 y' + \lambda'' 2 y'' + \lambda''' 2 y''' + \&c. + \lambda^n 2 y^n = \theta 2.$$
$$\lambda' 3 y' + \lambda'' 3 y'' + \lambda''' 3 y''' + \&c. + \lambda^n 3 y^n = \theta 3$$
&c.
$$(\lambda' n) y' + (\lambda'' n) y'' + (\lambda''' n) y''' + \&c. + (\lambda^n n) y^n = (\theta n)$$

par lefquelles il faudra déterminer les n inconnues y', y'', y''' &c. y^n; c' eft à quoi fe réduit maintenant toute la difficulté du problême.

Pour en venir à bout, je multiplie la premiere de ces équations par μ', la feconde par μ'', la troifiéme par μ''', & ainfi de fuite, μ', μ'', μ''' &c. étant des coéficiens indéterminés, puis je les ajoute enfemble, ce qui me donne, en ordonnant les termes par rapport à y', y'', y''' &c.

$$[\mu'\lambda' 1 + \mu''\lambda' 2 + \mu'''\lambda' 3 + \&c. + \mu^n (\lambda' n)]\, y'$$
$$+ [\mu'\lambda'' 1 + \mu''\lambda'' 2 + \mu'''\lambda'' 3 + \&c. + \mu^n (\lambda'' n)]\, y''$$
$$+ [\mu'\lambda''' 1 + \mu''\lambda''' 2 + \mu'''\lambda''' 3 + \&c. + \mu^n (\lambda''' n)]\, y'''$$
&c.
$$+ [\mu'\lambda^n 1 + \mu''\lambda^n 2 + \mu'''\lambda^n 3 + \&c. + \mu^n (\lambda^n n)]\, y^n$$
$$= \mu'\theta 1 + \mu''\theta 2 + \mu'''\theta 3 + \&c. + \mu^n (\theta n);$$

d' où l' on tirera aifément la valeur d' une y quelconque, comme y^s, en égalant à zero chacun des coéficiens des autres y; ainfi l' on aura

$$y^s = \frac{\mu'\theta 1 + \mu''\theta 2 + \mu'''\theta 3 + \&c. + \mu^n (\theta n)}{\mu'\lambda^s 1 + \mu''\lambda^s 2 + \mu'''\lambda^s 3 + \&c. + \mu^n (\lambda^s n)} \quad \ldots \; (e)$$

& ensuite ces équations de condition

$$\left.\begin{array}{l}\mu'\lambda'1 + \mu''\lambda'2 + \mu'''\lambda'3 + \&c. + \mu^n(\lambda'n) = 0\\ \mu'\lambda''1 + \mu''\lambda''2 + \mu'''\lambda''3 + \&c. + \mu^n(\lambda''n) = 0\\ \text{\& ainsi de suite, jusqu'à}\\ \mu'\lambda^n1 + \mu''\lambda^n2 + \mu'''\lambda^n3 + \&c. + \mu^n(\lambda^n n) = 0\end{array}\right\}(f)$$

à l' exception seulement de celle qui répondroit à l' exposant s.

Supposons que l' on ait en général

$$\mu'\lambda'1 + \mu''\lambda'2 + \mu'''\lambda'3 + \&c. + \mu^n(\lambda'n) = \Delta'$$
$$\mu'\lambda''1 + \mu''\lambda''2 + \mu'''\lambda''3 + \&c. + \mu^n(\lambda''n) = \Delta''$$
$$\mu'\lambda'''1 + \mu''\lambda'''2 + \mu'''\lambda'''3 + \&c. + \mu^n(\lambda^n n) = \Delta'''$$
&c.
$$\mu'\lambda^n1 + \mu''\lambda^n2 + \mu'''\lambda^n3 + \&c. + \mu^n(\lambda^n n) = \Delta^n,$$

& qu'il faille trouver la valeur d' une μ quelconque comme μ^m. On multipliera ces équations par des coéficiens indéterminés ν', ν'', ν''' &c. ν^n, & après les avoir ajoutées ensemble, on fera les coéficiens des quantités μ', μ'', μ''' &c. chacun égal à zero, excepté célui de la quantité μ^m; de cette manière on aura

$$\mu^m = \frac{\nu'\Delta' + \nu''\Delta'' + \nu'''\Delta''' + \&c. + \nu^n\Delta^n}{\nu'(\lambda'm) + \nu''(\lambda''m) + \nu'''(\lambda'''m) + \&c. + \nu^n(\lambda^n m)} \quad . \quad . \quad (g)$$

& la détermination des quantités ν', ν'', ν''' &c. dépendra de cette condition que

$$\nu'\lambda' + \nu''\lambda'' + \nu'''\lambda''' + \&c. + \nu^n\lambda^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

lorsque $\rho = \rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. (ρn), excepté (ρm).

Or les équations (c) étant multipliées par ν', ν'', ν''' &c. & ajoutées ensemble donnent

$$(\rho^2\nu' + A'\nu' + B'\nu'' + C'\nu''' + \&c. + N'\nu^n)\lambda'$$
$$+ (\rho^2\nu'' + A''\nu' + B''\nu'' + C''\nu''' + \&c. + N''\nu^n)\lambda''$$
$$+ (\rho^2\nu''' + A'''\nu' + B'''\nu'' + C'''\nu''' + \&c. + N'''\nu^n)\lambda'''$$
&c.
$$+ (\rho^2\nu^n + A^n\nu' + B^n\nu'' + C^n\nu''' + \&c. + N^n\nu^n)\lambda^n$$
$$= 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

Donc si on suppose que les quantités ν', ν'', ν''' &c. ν^n, ou plutôt leurs rapports soient tels que les coéficiens de λ', λ'', λ''' &c. λ^{n-1} dans cette équation soient nuls chacun en particulier, celui de λ^n le sera aussi; de sorte que l'on aura les n équations suivantes

$$\left.\begin{array}{l} \rho^2\nu' + A'\nu' + B'\nu'' + C'\nu''' + \&c. + N'\nu^n = 0 \\ \rho^2\nu'' + A''\nu' + B''\nu'' + C''\nu''' + \&c. + N''\nu^n = 0 \\ \rho^2\nu''' + A'''\nu' + B'''\nu'' + C'''\nu''' + \&c. + N'''\nu^n = 0 \\ \&c. \\ \rho^2\nu^n + A^n\nu' + B^n\nu'' + C^n\nu''' + \&c. + N^n\nu^n = 0 \end{array}\right\} . (k)$$

Et il est bon de remarquer, qu'en éliminant de ces équations les quantités ν', ν'', ν''' &c. on aura une équation finale en ρ^2 qui sera nécessairement la même que celle qui résulte des équations (c) par l'évanouissement des quantités λ', λ'', λ''' &c.; ce qui peut se voir aisément à *priori*.

Faisons maintenant $\rho = (\rho m)$, nous aurons

$$\begin{array}{l} A'\nu' + B'\nu'' + C'\nu''' + \&c. + N'\nu^n = -(\rho m)^2\nu' \\ A''\nu' + B''\nu'' + C''\nu''' + \&c. + N''\nu^n = -(\rho m)^2\nu'' \\ A'''\nu' + B'''\nu'' + C'''\nu''' + \&c. + N'''\nu^n = -(\rho m)^2\nu''' \\ \&c. \\ A^n\nu' + B^n\nu'' + C^n\nu''' + \&c. + N^n\nu^n = -(\rho m)^2\nu^n; \end{array}$$

& l'équation (i) deviendra

$$[\rho^2 - (\rho m)^2] \times [\nu'\lambda' + \nu''\lambda'' + \nu'''\lambda''' + \&c. + \nu^n\lambda^n] = 0,$$

laquelle devant être vraie pour toutes les valeurs de ρ qui satisfont aux équations (e) d'où celle-ci est tirée, on aura en général

$$\nu'\lambda' + \nu''\lambda'' + \nu'''\lambda''' + \&c. + \nu^n\lambda^n = 0$$

lorsque $\rho = \rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. (ρn), excepté (ρm), auquel cas l'équation se vérifie d'elle même, à cause du facteur $\rho^2 - (\rho m)^2$.

D'où l'on voit que les valeurs de ν', ν'', ν''' &c. ν^n qui satisfont à la condition (h) sont les mêmes que celles qui résultent des équations (k), en y faisant $\rho = (\rho m)$.

Donc

Donc ſi on dénote ces valeurs par $(\nu' m)$, $(\nu'' m)$, $(\nu''' m)$ &c., & qu'on les ſubſtitue dans l'équation (g) on aura

$$\mu^m = \frac{(\nu' m)\,\Delta' + (\nu'' m)\,\Delta'' + (\nu''' m)\,\Delta''' + \&c. + (\nu^n m)\,\Delta^m}{(\nu' m)(\lambda' m) + (\nu'' m)(\lambda'' m) + (\nu''' m)(\lambda''' m) + \&c. + (\nu^n m)(\lambda^n m)}.$$

Mais les équations (f) demandent que les quantités Δ', Δ'', Δ''' &c. Δ^n ſoient toutes nulles à l'exception de Δ^s, donc ſi on fait pour abreger

$$\nu'\lambda' + \nu''\lambda'' + \nu'''\lambda''' + \&c. + \nu^n\lambda^n = Q$$

& qu'on dénote en général par $(Q\,m)$, la valeur de Q lorſque $\rho = (\rho\,m)$, on aura pour notre cas

$$\mu^m = \frac{(\nu^s\,m)\,\Delta^s}{(Q m)},$$

& par conſéquent

$$\mu' = \frac{(\nu^s\,1)\,\Delta^s}{Q\,1},\ \mu'' = \frac{(\nu^s\,2)\,\Delta^s}{Q\,2} \ \&c.$$

Donc enfin ſubſtituant ces valeurs dans la formule (e), & faiſant attention que

$$\Delta^s = \mu'\lambda^s 1 + \mu''\lambda^s 2 + \mu'''\lambda^s 3 + \&c. + \mu^n(\lambda^s n)$$

on aura

$$y^s = \frac{\nu^s 1}{Q 1}\,\theta 1 + \frac{\nu^s 2}{Q 2}\,\theta 2 + \frac{\nu^s 3}{Q 3}\,\theta 3 + \&c. + \frac{(\nu^s n)}{(Q\,n)}\,(\theta n).$$

Ainſi le problême ne dépend plus que de la réſolution des équations (c) & (k).

XXXI. Nous avons trouvé que la quantité $(\nu' m)\,\lambda' + (\nu'' m)\,\lambda'' + (\nu''' m)\lambda''' + \&c. + (\nu^n m)\,\lambda^n$ eſt nulle lorſque $\rho = \rho\,1,\ \rho\,2,\ \rho\,3$ &c. $(\rho\,n)$, excepté (ρm); or il eſt facile de voir que les valeurs de $\frac{\lambda''}{\lambda'}$, $\frac{\lambda'''}{\lambda'}$ &c. $\frac{\lambda^n}{\lambda'}$ tirées des équations (c) ſeront exprimées par des fractions telles que $\frac{q''}{q'}$, $\frac{q'''}{q'}$ &c. $\frac{q^n}{q'}$, les quantités q', q'', q''' &c. étant de la forme $a + b\rho^2 + c\rho^4 + \&c. + h\rho^{2(n-1)}$; de ſorte que ſi on fait, ce qui eſt permis, $\lambda' = q'$, on

aura $\lambda'' = q''$, $\lambda''' = q'''$ &c.; & par conféquent la quantité $(v'm)\lambda' + (v''m)\lambda'' + (v'''m)\lambda''' +$ &c. $+ (v^n m)\lambda^n$ deviendra de la forme $\alpha + \beta\rho^2 + \gamma\rho^4 +$ &c. $+ \zeta\rho^{2(n-1)}$; donc on aura

$$(v'm)\lambda' + (v''m)\lambda'' + (v'''m)\lambda''' + \&c. + (v^n m)\lambda^n = \chi\left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 1)^2}\right)\left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 2)^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho n)^2}\right),$$

en prenant tous les facteurs depuis $1 - \frac{\rho^2}{(\rho 1)^2}$ jufqu'à $1 - \frac{\rho^2}{(\rho n)^2}$, hormis $1 - \frac{\rho^2}{(\rho m)^2}$; & le coéficient χ étant égal à la valeur de $(v'm)\lambda' + (v''m)\lambda'' +$ &c. $+ (v^n m)\lambda^n$ lorfque on fait $\rho = 0$ dans les quantités λ', λ'', λ''' &c.

Or foit $P = 0$ l'équation en ρ^2 tirée des équations (c), ou (k), on aura, en fuppofant que le terme tout connu de P foit 1,

$$P = \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 1)^2}\right)\left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 2)^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho n)^2}\right)$$

donc

$$\chi P = [(v'm)\lambda' + (v''m)\lambda'' + (v'''m)\lambda''' + \&c. + (v^n m)\lambda^n] \times \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho m)^2}\right).$$

Prenons les différences de part & d'autre, en faifant varier ρ, & fuppofons enfuite $\rho = (\rho m)$, ce qui changera les quantités λ', λ'', λ''' &c. en $(\lambda' m)$, $(\lambda'' m)$, $(\lambda''' m)$ &c. nous aurons

$$\chi\frac{dP}{d\rho} = -\frac{2}{(\rho m)}[(v'm)(\lambda'' m) + (v''m)(\lambda'' m) + (v'''m)(\lambda''' m) + \&c. + (v^n m)(\lambda^n m)] = \frac{2(Qm)}{(\rho m)};$$

donc on aura en général

$$Q = -\chi\rho\frac{dP}{2d\rho}$$

ce qui pourra ſervir à abreger le calcul de la valeur de Q dans pluſieurs occaſions.

XXXII. Examinons maintenant les différens cas, qui peuvent arriver rélativement aux racines de l'équation $P = 0$. Et d'abord il eſt clair que ſi toutes ces racines ſont réelles poſitives & inégales les valeurs de ρ ſeront auſſi réelles & inégales; ainſi ce cas n'aura aucune difficulté.

S'il y a des racines négatives, alors les valeurs correſpondantes de ρ deviendront imaginaires de la forme $r\sqrt{-1}$, ce qui réduira les exponentielles $\frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2}$ & $\frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}$ à cette forme coſ. rt, & $\frac{\text{ſin.}\, r t}{r}$; d'où il s'enſuit que ſi toutes les racines de l'équation $P = 0$ étoient réelles négatives & inégales, les valeurs de y', y'', y''' &c. ne contiendroient que des *ſinus* & des *coſinus*; nous verrons plus bas que ce cas eſt le ſeul où la ſolution ſoit bonne en général rélativement à la queſtion mécanique.

Paſſons au cas des racines égales, & ſuppoſons $\rho 2 = \rho 1$, il eſt facile de voir par les formules de l'Art. préc. que les valeurs de $Q 1$ & de $Q 2$ deviendront $= 0$; de ſorte que les deux premiers termes de la valeur de y^s ſemblent devoir être infinis. Pour obvier à cet inconvénient on ſuppoſera $\rho 2 = \rho 1 + \omega$, ω étant une quantité évanoviſſante, & à cauſe de $Q = -\chi \rho \frac{dP}{2d\rho} = -\frac{\chi \rho}{2d\rho}$

$d \cdot (1 - \frac{\rho^2}{(\rho 1)^2})(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 2)^2})(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 3)^2}) \ldots \ldots$

$(1 - \frac{\rho^2}{(\rho n)^2})$, l'on aura

$$Q 1 = \chi (1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho 2)^2})(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho 3)^2}) \ldots (1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho n)^2})$$

$$= 2\chi \frac{\omega}{\rho 1} \left(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho 3)^2}\right) \;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\; \left(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho n)^2}\right)$$

& de même

$$Q2 = -2\chi \frac{\omega}{\rho 1} \left(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho 3)^2}\right) \;\vdots\;\vdots\;\vdots\; \left(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho n)^2}\right)$$

Donc ſi on fait $\frac{dQ}{d\rho} = R$, & qu'on dénote par $R\,1$ ce que devient R lorſque ρ devient $\rho\,1$, on aura $Q\,1 = -\frac{\omega}{(\rho 1)^2} R\,1$, & $Q\,2 = \frac{\omega}{(\rho 1)^2} R\,1$.

Or, en faiſant $\rho\,2 = \rho\,1 + \omega$, on a $\nu^s 2\,\theta\,2 = \nu^s 1\,\theta\,1 + \frac{d.(\nu^s 1\,\theta\,1)}{d\rho\,1}\,\omega$; donc

$$\frac{\nu^s 1\theta 1}{Q1} + \frac{\nu^s 2\theta 2}{Q2} = -\frac{(\rho 1)^2 \nu^s 1 \theta 1}{\omega R 1} + \frac{(\rho 1)^2 \nu^s 1 \theta 1}{\omega R 1} + \frac{(\rho 1)^2}{\omega R 1} \times \frac{d.(\nu^s 1 \theta 1)}{d\rho 1}\,\omega = \frac{(\rho 1)^2}{R 1} \times \frac{d.(\nu^s 1 \theta 1)}{d\rho 1}.$$

On réſoudra de même le cas de trois racines égales, & ainſi des autres. Au reſte il eſt évident que les termes de la valeur de y^s qui répondent aux racines égales contiendront toujours l'angle t, & de plus des exponentielles ordinaires, ſi ces racines ſont poſitives, & des *ſinus* & des *coſinus* ſi elles ſont négatives.

Enfin s'il ſe trouvoit des racines imaginaires, on les réduiroit d'abord deux à deux à la forme $a + b\sqrt{-1}$, & $a - b\sqrt{-1}$, a & b étant des quantités réelles, de ſorte que $(\rho\,1)^2 = a + b\sqrt{-1}$, $(\rho\,2)^2 = a - b\sqrt{-1}$, & ainſi de ſuite; ce qui donneroit $\rho\,1 = f + g\sqrt{-1}$, $\rho\,2 = f - g\sqrt{-1}$, & par conſéquent $e^{\pm \rho 1 t} = e^{\pm ft} \times e^{\pm gt\sqrt{-1}} = e^{\pm ft}(\text{coſ.}\, gt \pm \text{ſin.}\, gt \times \sqrt{-1})$, & de même $e^{\pm \rho 2 t} = e^{\pm ft}(\text{coſ.}\, gt \mp \text{ſin.}\, gt \times \sqrt{-1})$. On rameneroit de même à la forme $p + q\sqrt{-1}$, & $p - q\sqrt{-1}$ les valeurs des quantités μ, ν, & Q répondantes à $\rho\,1$ & $\rho\,2$, & on trouveroit aprés les ſubſti-

tutions & les réductions, que les imaginaires se détruiroient dans les deux termes $\frac{v^s 1}{Q 1} \theta 1 + \frac{v^s 2}{Q 2} \theta 2$, lesquels contiendroient alors des *sinus* & des *cosinus* multipliés par des exponentielles ordinaires.

XXXIII. Au reste quand on veut appliquer la solution précédente au mouvement d' un sistème quelconque de corps, on doit supposer, comme nous l' avons fait, que les quantités y', y'', y''' &c. soient assès petites pour qu'on puisse négliger, sans erreur sensible, dans les expressions des forces accélératrices des corps, les termes qui contiendroient les produits y'^2, $y' y''$ &c. Ainsi il faudra pour que la solution soit bonne *mécaniquement* 1.° que les valeurs initiales Y', Y'', Y''' &c. V', V'', V''' &c. soient infiniment petites. 2.° que les expressions de y', y'', y''' &c. ne contiennent aucun terme qui augmente à l' infini avec le tems t; par conséquent il faudra que les racines de l' équation $P = 0$ soient toutes réelles négatives & inégales, auquel cas la valeur de y^s ne contiendra que des *sinus* & des *cosinus* (*Art. préc.*), ou au moins que les termes qui renfermeroient l'arc t disparoissent d'eux mêmes.

Donc 1.° si $(\rho 1)^2$ est une quantité positive, il faudra que l' on ait

$$\left.\begin{array}{l} \lambda' 1\, Y' + \lambda'' 1\, Y'' + \lambda''' 1\, Y''' + \&c. + \lambda^n 1\, Y^n = 0 \\ \lambda' 1\, V' + \lambda'' 1\, V'' + \lambda''' 1\, V''' + \&c. + \lambda^n 1\, V^n = 0 \end{array}\right\} . (l)$$

ce qui fera évanouir le premier terme $\frac{v^s 1}{Q 1} \theta 1$ de la valeur de y^s.

De même si $(\rho 1)^2$ & $(\rho 2)^2$ étoient toutes deux positives, mais inégales, on auroit, outre les deux conditions précédentes, encore ces deux-ci

$$\lambda' 2\, Y' + \lambda'' 2\, Y'' + \lambda''' 2\, Y''' + \&c. + \lambda^n 2\, Y^n = 0$$
$$\lambda' 2\, V' + \lambda'' 2\, V'' + \lambda''' 2\, V''' + \&c. + \lambda^n 2\, V^n = 0,$$

& il faudroit effacer les deux premiers termes de y' ; & ainsi de suite.

2.° Si $(\rho 1)^2$ & $(\rho 2)^2$ sont égales & négatives, on aura les mêmes conditions (l), & les deux termes $\frac{\nu^s 1}{Q 1}\theta 1 + \frac{\nu^s 2}{Q 2}\theta 2$ deviendront, en faisant $\rho 1 = r 1 \sqrt{-1}$,

$$\frac{r 1}{2 R 1} \times \frac{d . \nu^s 1 (\lambda' 1 Y' + \lambda'' 1 Y'' + \lambda''' 1 Y''' + \&c. + \lambda^n 1 Y^n)}{d r 1} \text{cos.}\, r 1 t$$

$$+ \frac{r 1}{2 R 1} \times \frac{d . \frac{\nu^s 1}{r 1} (\lambda' 1 V' + \lambda'' 1 V'' + \lambda''' 1 V''' + \&c. + \lambda^n 1 V^n)}{d r 1} \text{sin.}\, r 1 t.$$

Mais si $(\rho 1)^2$ & $(\rho 2)^2$ étoient égales & positives, alors on auroit encore deux autres conditions à remplir, savoir

$$\frac{d . \nu^s 1 (\lambda' 1 Y' + \lambda'' 1 Y' + \lambda''' 1 Y'' + \&c.\ \lambda^n 1 Y^n)}{d \rho 1} = 0$$

$$\frac{d . \frac{\nu^s 1}{\rho 1} (\lambda' 1 V' + \lambda'' 1 V' + \lambda''' 1 V'' + \&c. + \lambda^n 1 V^n)}{d \rho 1} = 0,$$

& ainsi du reste.

Mais il y a ici une remarque importante à faire ; c'est que les équations (a) n'étant qu'approchées, l'équation $P = 0$ doit aussi être regardée comme telle, de sorte que lorsque on trouve des racines égales, on n'est pas en droit d'en conclure que les valeurs de ρ sont égales, mais seulement qu'elles ne diffèrent que par des quantités infiniment petites ; d'où il s'ensuit qu'à la rigueur, l'égalité des racines de l'équation $P = 0$, ne suffit pas pour introduire des arcs de cercle dans les valeurs de y', y'', y''' &c. en tant que ces quantités représentent les espaces parcourus dans les oscillations des corps. Cependant comme la supposition de $\rho 2 = \rho 1 + \omega$, ω étant une quantité très-petite, rend aussi les quantités $Q 1$ & $Q 2$ très-petites du même ordre, comme on peut s'en assûrer par ce qui a été dit

dans l'Art. préc. ſur le cas des racines égales, il eſt clair que les quantités $\frac{\theta 1}{Q 1}$ & $\frac{\theta 2}{Q 2}$ contiendront des termes finis, & qu'ainſi il faudra, pour que les valeurs de y', y'', y''' &c. ſoient toujours très-petites, que les termes dont il s'agit diſparoiſſent entiérement de l'expreſſion de y^s; ce qui donnera, en négligeant les quantités infiniment petites du ſecond ordre, les mêmes conditions & les mêmes réſultats que ci-deſſus. Il eſt clair que ce que nous venons de dire des racines égales, doit avoir lieu de même, lorſque elles ne différent que par des quantités très-petites.

3.° Si $(\rho 1)^2$ & $(\rho 2)^2$ étoient imaginaires, alors réduiſant les quantités $\lambda' 1$, $\lambda'' 1$, $\lambda''' 1$ &c., & $\lambda' 2$, $\lambda'' 2$, $\lambda''' 2$ &c. à la forme $p' + q'\sqrt{-1}$, $p'' + q''\sqrt{-1}$, $p''' + q'''\sqrt{-1}$ &c., & $p' - q'\sqrt{-1}$, $p'' - q''\sqrt{-1}$, $p''' - q'''\sqrt{-1}$ &c. on auroit les conditions ſuivantes

$$p'Y' + p''Y'' + p'''Y''' + \&c. + p^nY^n = 0,$$
$$p'V' + p''V'' + p'''V''' + \&c. + p^nV^n = 0,$$
$$q'Y' + q''Y'' + q'''Y''' + \&c. + q^nY^n = 0, \&$$
$$q'V' + q''V'' + q'''V''' + \&c. + q^nV^n = 0.$$

On aura de pareilles conditions pour chaque paire de racines imaginaires.

XXXIV. De là on tire une méthode générale pour voir ſi l'état d'équilibre d'un ſiſtème quelconque donné de corps eſt *ſtable*, c'eſt-à-dire, ſi les corps étant infiniment peu dérangés de cet état, ils y renviendront d'eux mêmes, ou au moins tendront à y revenir.

On ſuppoſera le ſiſtème dans un état infiniment proche de celui d'équilibre, & on cherchera les expreſſions des forces accélératrices des corps pour ſe remettre à cette état, leſquelles ſeront, aux infinimens petits du ſecond or-

dre & des ſuivans près, de cette forme $Ay' + By'' + Cy''' +$ &c., comme nous l' avons ſuppoſé dans les équations (a). On formera enſuite des équations telles que les équations (c), & on en tirera l' équation $P = 0$, dont ρ^2 ſera l' inconnue, & qui ſera néceſſairement d' un dégré égal à l' expoſant du nombre des corps. Cela poſé

1.° Si toutes les racines de cette équation ſont réelles négatives & inégales, l' état d' équilibre ſera *ſtable* en général quel que ſoit le dérangement initial du ſiſtème.

2.° Si ces racines ſont toutes réelles poſitives ou toutes imaginaires, ou en partie réelles poſitives, & en partie imaginaires, l' état d' équilibre n' aura aucune *ſtabilité*, & le ſiſtème une fois dérangé de cet état ne pourra le reprendre.

3.° Enfin ſi les racines ſont en partie réelles négatives & inégales, & en partie réelles négatives & égales, ou réelles & poſitives, ou imaginaires, l'état d'équilibre aura ſeulement une *ſtabilité rélative* & *conditionelle*, c'eſt-à-dire, que cet état ne ſe retablira, ou ne tendra à ſe retablir, que lorſque il y aura, entre les diſtances & les viteſſes initielles, les conditions marquées dans l' Art. préc.; dans tous les autres cas il ſera impoſſible que le ſiſtème revienne de lui même à ſon premier état.

XXXV. Lorſque toutes les racines de l'équation $P = 0$ ſont réelles inégales & négatives, il eſt clair, qu'en faiſant $\rho^2 = -r^2$, chaque terme de la valeur de y' ſe réduira à la forme α coſ. $rt + \beta$ ſin. rt, laquelle repréſente, comme l' on ſait, le mouvement d' un pendule ſimple de longueur $\frac{1}{r^2}$; d' où il eſt aiſé de conclure que le mouvement de chaque corps ſera compoſé de n mouvemens pareils à ceux de n pendules dont les longueurs ſeroient

$\frac{1}{(r1)^2}$,

$\frac{1}{(r1)^2}$, $\frac{1}{(r2)^2}$, $\frac{1}{(r3)^2}$ &c. $\frac{1}{(rn)^2}$. C'est le théoréme qui M. Daniel Bernoulli a déduit, par induction, de la considération du mouvement d'une corde chargée de plusieurs poids.

Si on veut que les oscillations des corps deviennent simples & isochrones, on supposera que l'état initial du sistème soit tel que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l}\lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \lambda''' Y''' + \text{\&c.} + \lambda^n Y^n = 0 \ \& \\ \lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \text{\&c.} + \lambda^n V^n = 0\end{array}\right\} (m)$$

pour toutes les valeurs de ρ^2, hors une quelconque à volonté comme $(\rho m)^2$; car alors les quantités $\theta 1$, $\theta 2$, $\theta 3$ &c. seront nulles, à l'exception de (θm); & par conséquent la valeur de y^s se réduira à $\frac{(v^s m)}{(Q m)} (\theta m)$. Mais les équations (m) étant absolument semblables à l'équation (h) de l'Art. XXX., il est clair qu'on aura pour la détermination des quantités Y', Y'', Y''' &c. V', V'', V''' &c. des équations analogues aux équations (k); d'où il s'ensuit que ces quantités seront en raison constante avec les quantités $(v' m)$, $(v'' m)$, $(v''' m)$ &c. $(v^n m)$; de sorte qu'on aura

$$\frac{(\lambda' m) Y' + (\lambda'' m) Y'' + (\lambda''' m) Y''' + \text{\&c.} + (\lambda^n m) Y^n}{Y^s}$$

$$= \frac{(\lambda' m) V' + (\lambda'' m) V'' + (\lambda''' m) V''' + \text{\&c.} + (\lambda^n m) V^n}{V^s}$$

$$= \frac{(\lambda' m)(v' m) + (\lambda'' m)(v'' m) + (\lambda''' m)(v''' m) + \text{\&c.} + (\lambda^n m)(v^n m)}{(v^s m)}$$

$$= \frac{(Q m)}{(v^s m)}; \text{ donc}$$

$$y^s = Y^s \operatorname{cos.} (r m) t + V^s \frac{\operatorname{sin.} (r m) t}{(r m)}.$$

Ainsi le mouvement des corps sera le même, dans ce cas, que s'ils étoient pesans, & qu'ils fussent suspendus

chacun à un fil de longueur $\frac{1}{(rm)^2}$, la gravité étant priſe pour l' unité des forces accélératrices; d'où l' on voit que le ſiſtème eſt ſuſceptible d' autant de différens mouvemens iſochrones que l' équation $P = 0$ a des racines réelles négatives & inégales.

Des oſcillations d' un fil fixe par une de ſes extrémités, & chargé d' un nombre quelconque de poids.

XXXVI. Soit n le nombre des poids que nous ſuppoſerons, pour plus de ſimplicité, égaux entr'eux & également éloignés les uns des autres; imaginons que le fil ne faſſe que des oſcillations infiniment petites & dans le même plan; & ſoient nommées y', y'', y''' &c. y^n les diſtances des corps à la verticale à commencer par le plus bas, & a la diſtance d'un corps à l'autre, on aura, comme il eſt très-aiſé de le voir par les principes de la Dinamique, & comme on peut le déduire des formules générales que j'ai données à la page 227. du Vol. préc.,

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{y' - y''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2y''}{dt^2} + \frac{y'' - y'''}{a} - \frac{y' - 2y'' + y'''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2y'''}{dt^2} + \frac{y''' - y^{\mathrm{IV}}}{a} - 2\,\frac{y'' - 2y''' + y^{\mathrm{IV}}}{a} = 0$$

$$\frac{d^2y^{\mathrm{IV}}}{dt^2} + \frac{y^{\mathrm{IV}} - y^{\mathrm{V}}}{a} - 3\,\frac{y''' - 2y^{\mathrm{IV}} + y^{\mathrm{V}}}{a} = 0$$

&c.

$$\frac{d^2y^n}{dt^2} + \frac{y^n}{a} - (n-1)\,\frac{y^{n-1} - 2y^n}{a} = 0,$$

c'eſt-à-dire

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{y' - y''}{a} = 0$$
$$\frac{d^2 y''}{dt^2} + \frac{-y' + 3y'' - 2y'''}{a} = 0$$
$$\frac{d^2 y'''}{dt^2} + \frac{-2y'' + 5y''' - 3y^{\text{IV}}}{a} = 0$$
$$\frac{d^2 y^{\text{IV}}}{dt^2} + \frac{-3y''' + 7y^{\text{IV}} - 4y^{\text{V}}}{a} = 0$$
&c.
$$\frac{d^2 y^n}{dt^2} + \frac{-(n-1)y^{n-1} + (2n-1)y^n}{a} = 0.$$

Comparant ces équations avec les équations (a) de l'Art. XXX., on trouvera que les équations (c) du même Article deviennent celles-ci

$$\rho^2\lambda'' + \frac{\lambda' - \lambda''}{a} = 0$$
$$\rho^2\lambda''' + \frac{-\lambda' + 3\lambda'' - 2\lambda'''}{a} = 0$$
$$\rho^2\lambda''' + \frac{-2\lambda'' + 5\lambda''' - 3\lambda^{\text{IV}}}{a} = 0$$
$$\rho^2\lambda^{\text{IV}} + \frac{-3\lambda''' + 7\lambda^{\text{IV}} - 4\lambda^{\text{V}}}{a} = 0$$
&c.
$$\rho^2\lambda^n + \frac{-(n-1)\lambda^{n-1} + (2n-1)\lambda^n}{a} = 0;$$

d' où l' on tire

$$\lambda'' = (1 + a\rho^2)\lambda'$$
$$\lambda''' = \frac{-\lambda' + (3 + a\rho^2)\lambda''}{2}$$
$$= \left(1 + 2a\rho^2 + \frac{a^2\rho^4}{2}\right)\lambda'$$
$$\lambda^{\text{IV}} = \left(1 + 3a\rho^2 + \frac{3a^2\rho^4}{2} + \frac{a^3\rho^6}{2.3}\right)\lambda'$$

$$\lambda^{v} = \left(1 + 4a\rho^2 + \frac{6a^2\rho^4}{2} + \frac{4a^3\rho^6}{2.3} + \frac{a^4\rho^8}{2.3.4}\right)\lambda',$$

& ainsi de suite ; de sorte que l'on aura en général

$$\lambda^m = \left[1 + (m-1)a\rho^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{4}a^2\rho^4 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{4.9}a^3\rho^6 + \&c.\right]\lambda'.$$

Or il est visible que, pour satisfaire à la dernière équation $\rho^2\lambda^n + \frac{-(n-1)\lambda^{n-1} + (2n-1)\lambda^n}{a} = 0$, il faut supposer $\lambda^{n+1} = 0$; ce qui donne

$$1 + na\rho^2 + \frac{n(n-1)a^2}{4}\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.9}\rho^6 + \&c. = 0$$

équation, d'où l'on tirera n valeurs de ρ^2, qu'on désignera par $(\rho 1)^2$, $(\rho 2)^2$, $(\rho 3)^2$ &c. $(\rho n)^2$, & qu'on substituera successivement dans l'expression de λ^m pour avoir les valeurs de $\lambda^m 1$, $\lambda^m 2$, $\lambda^m 3$ &c.

A l'égard des quantités ν, on les trouvera de la même manière par le moyen des équations (k), lesquelles deviennent dans le cas présent

$$\rho^2\nu' + \frac{\nu' - \nu''}{a} = 0$$

$$\rho^2\nu'' + \frac{-\nu' + 3\nu'' - 2\nu'''}{a} = 0$$

$$\rho^2\nu''' + \frac{-2\nu'' + 5\nu''' - 3\nu^{iv}}{a} = 0$$

&c.

$$\rho^2\nu^n + \frac{-(n-1)\nu^{n-1} + (2n-1)\nu^n}{a},$$

d'où l'on tire comme ci-dessus

$$\nu^m = \left[1 + (m-1)a\rho^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{4}a^2\rho^4 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{4.9}a^3\rho^6 + \&c.\right]\nu',$$

ou bien, en supposant pour plus de simplicité $\lambda' = \nu' = 1$, $\nu^m = \lambda^m$; & par conséquent $\nu^m 1 = \lambda^m 1$, $\nu^m 2 = \lambda^m 2$ &c.

On aura donc

$$Q = (\lambda')^2 + (\lambda'')^2 + (\lambda''')^2 + \&c. + (\lambda^n)^2$$

$$= 1 + (1 + a\rho^2)^2 + (1 + 2a\rho^2 + \frac{a^2}{2}\rho^4)^2 + \&c.$$

$$+ [1 + (n-1)a\rho^2 + \frac{(n-1)(n-2)a^2}{4}\rho^4 + \&c.]^2.$$

Mais on peut trouver une expression plus simple de cette quantité par la méthode de l'Article XXXI. Car, on a d'abord

$$P = 1 + na\rho^2 + \frac{n(n-1)a^2}{4}\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.9}\rho^6 + \&c.$$

d'où l'on tire

$$\rho\frac{dP}{2d\rho} = na\rho^2 + \frac{n(n-1)a^2}{2}\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.3}\rho^6 + \&c.$$

Or, en faisant $\rho = 0$, on a $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 1$, $\lambda''' = 1$ &c. donc

$$\chi = \nu' + \nu'' + \nu''' + \&c. + \nu^n$$

$$= 1$$

$$+ 1 + a\rho^2$$

$$+ 1 + 2a\rho^2 + \frac{a^2}{2}\rho^4$$

$$+ 1 + 3a\rho^2 + \frac{3a^2}{2}\rho^4 + \frac{a^3}{2.3}\rho^6$$

&c.

$$+ 1 + (n-1)a\rho^2 + \frac{(n-1)(n-2)a^2}{4}\rho^4 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)a^3}{4.9}\rho^6$$

$$+ \&c.$$

$$= n + \frac{n(n-1)a}{2}\rho^2 + \frac{n(n-1)(n-2)a^2}{4.3}\rho^4$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)a^3}{4.9.4}\rho^6 + \&c.$$

Donc $Q = - \chi \rho \frac{dP}{2d\rho} = - a\rho^2 \, (n + \frac{n(n-1)}{2} a\rho^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{4.3} a^2\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4.9.4} a^3\rho^6 + \&c.)^2$.

Ces deux expreſſions de Q ne ſont pas à la vérité indentiques ; mais elles deviennent égales lorſque $\rho = \rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. ; ce qui ſuffit pour notre objet.

Faiſant donc ces ſubſtitutions dans la dernière formule de l'Art. XXX., on aura l'expreſſion générale des quantités y, & le probléme ſera réſolu.

Au reſte quoique il ſoit difficile, peut être impoſſible, de déterminer en général les racines de l'équation $P = 0$, on peut cependant s'aſsûrer, par la nature même du problême, que ces racines ſont néceſſairement toutes réelles inégales & négatives ; car ſans cela les valeurs de y', y'', y''' &c. pourroient croitre à l'infini, ce qui ſeroit abſurde.

XXXVII. Si on cherche quelles doivent être les diſtances & les viteſſes initiales des corps pour que chacun d'eux ne faſſe que des vibrations iſochrones & analogues à celles d'un pendule ſimple, on trouvera (*Art. XXXV.*) en prenant l pour la longueur de ce pendule,

$$Y^s = (1 - \frac{(s-1)a}{l} + \frac{(s-1)(s-2)a^2}{4l^2} - \frac{(s-1)(s-2)(s-3)a^3}{4.9\,l^3} + \&c.)\,Y'$$

$$V^s = (1 - \frac{(s-1)a}{l} + \frac{(s-1)(s-2)a^2}{4l^2} - \frac{(s-1)(s-2)(s-3)a^3}{4.9\,l^3} + \&c.)\,V'$$

& la valeur de l devra ſe déterminer par l'équation

$$1 - \frac{na}{l} + \frac{n(n-1)a^2}{4l^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{4.9 l^3} + \&c. = 0 ;$$

Des vibrations d'une corde tendue & chargée d'un nombre quelconque de poids.

XXXVIII. Quoique j' aie déja résolu ce problême dans mes *Recherches sur le Son* imprimées dans le premier Volume de ces Mémoires, je crois pouvoir le redonner ici, non seulement pour faire voir comment ma méthode générale s' y applique, mais encore parce qu' il me donnera lieu de faire de nouvelles reflexions sur les vibrations des cordes sonores, qui pourront être utiles à l'éclaircissement de cette matière épineuse & délicate.

Supposons une corde chargée de n poids égaux qui la divisent en $n + 1$ parties égales que nous ferons chacune $= a$, & tendue par un poid qui soit à la somme de ceux dont la corde est chargée comme $c^2 : 1$; nommant y', y'', y''' &c. y^n les distances des poids à l' axe de la corde, & faisant pour abreger $\frac{nc^2}{a} = k^2$, on aura

$$\frac{d^2y'}{dt^2} - k^2 (- 2y' + y'') = 0$$

$$\frac{d^2y''}{dt^2} - k^2 (y' - 2y'' + y''') = 0$$

$$\frac{d^2y'''}{dt^2} - k^2 (y'' - 2y''' + y^{\text{IV}}) = 0$$

&c.

$$\frac{d^2y^n}{dt^2} - k^2 (y^{n-1} - 2y^n) = 0.$$

Donc, en comparant ces équations avec les équations générales de l'Art. XXX. on aura les équations suivantes en λ', λ'', λ''' &c.

$$\rho^2 \lambda' - k^2 (- 2\lambda' + \lambda'') = 0$$

$$\rho^2 \lambda'' - k^2 (\lambda' - 2\lambda'' + \lambda''') = 0$$

$$\rho^2 \lambda''' - k^2 (\lambda'' - 2\lambda''' + \lambda^{\text{IV}}) = 0$$

&c.

$$\rho^2\lambda^{n} - k^2 (\lambda^{n-1} - 2\lambda^{n}) = 0;$$

d' où l' on tire, en supposant $1 + \frac{\rho^2}{2k^2} = \text{cos.}\,\phi$, $\lambda'' = \frac{\text{sin.}\,2\,\phi}{\text{sin.}\,\phi}\lambda'$, $\lambda''' = \frac{\text{sin.}\,3\,\phi}{\text{sin.}\,\phi}\lambda'$, &c., & en général

$$\lambda^{m} = \frac{\text{sin.}\,m\phi}{\text{sin.}\,\phi}\lambda'.$$

Et pour la détermination de l' angle ϕ, c' est-à-dire de la quantité ρ, on aura l'équation $\lambda^{n+1} = \frac{\text{sin.}\,(n+1)\,\phi}{\text{sin.}\,\phi}\lambda' = 0$; laquelle donne $\phi = \frac{m\pi}{n+1}$, π exprimant l'angle de 180 dégrés, & m un nombre quelconque entier depuis o jusqu'à n inclusivement. De sorte qu'on aura $\rho = k\sqrt{}.(2\,\text{cos.}\,\phi - 2) = 2\,k\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\phi\sqrt{-1} = 2\,k\,\text{sin.}\,\frac{m\pi}{2(n+1)}\sqrt{-1}$; ce qui donnera toutes les valeurs de ρ que nous avons désignées par $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. ($\rho\, n$), en faisant successivement $m = 1, 2, 3$ &c. n.

On trouvera des équations entiérement semblables en ν', ν'', ν''' &c. d'où l'on tirera pareillement $\nu^{n} = \frac{\text{sin.}\,(n+1)\phi}{\text{sin.}\,\phi}\nu'$.

De plus on aura

$$Q = \frac{\nu'\lambda'}{\text{sin.}\,\phi^2}\left\{\text{sin.}\,\phi^2 + \text{sin.}\,2\phi^2 + \text{sin.}\,3\phi^2 + \&c. + \text{sin.}\,n\phi^2\right\}$$

$$= \frac{\nu'\lambda'}{\text{sin.}\,\phi^2}\left\{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(\text{cos.}\,2\phi + \text{cos.}\,4\phi + \text{cos.}\,6\phi + \&c. + \text{cos.}\,2n)\right\}$$

$$= \frac{\nu'\lambda'}{\text{sin.}\,\phi^2}\left\{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\left(\frac{\text{cos.}\,2n\phi - \text{cos.}\,2(n+1)\,\phi}{2\,(1-\text{cos.}\,2\,\phi)} - \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{(n+1)}{2\,\text{sin.}\,\phi^2}\nu'\lambda',\ \text{à cause de}\ \phi = \frac{m\pi}{n+1}.$$

On

On trouveroit la même valeur de Q la méthode de l'Art. XXXI.; mais le calcul feroit alors tant foit peu plus long. Cependant comme ce calcul peut fervir à montrer la bonté de la méthode dont nous parlons, je n'ai pas cru devoir le fupprimer, mais je l'ai renfermé entre deux crochets, afin que mes Lecteurs puiffent le paffer s'ils le jugent à propos.

[On aura d'abord $P = \frac{\text{fin.}(n+1)\varphi}{(n+1)\,\text{fin.}\,\varphi}$ (j'écris $P = \frac{\text{fin.}(n+1)\varphi}{(n+1)\,\text{fin.}\,\varphi}$, & non pas fimplement $P = \frac{\text{fin.}(n+1)\varphi}{\text{fin.}\,\varphi}$, afin que, lorfque $\rho = 0$ c'eft-à-dire $\varphi = 0$, on ait $P = 1$, comme nous l'avons fuppofé); d'où l'on tire par la différentiation $\frac{dP}{d\varphi} = \frac{\text{cof.}(n+1)\varphi}{\text{fin.}\,\varphi} - \frac{\text{fin.}(n+1)\varphi \times \text{cof.}\,\varphi}{(n+1)\,\text{fin.}\,\varphi^2}$ $=$ [à caufe de fin. $(n+1)\varphi = 0$] $\frac{\text{cof.}(n+1)\varphi}{\text{fin.}\,\varphi}$; or l'équation $1 + \frac{\rho^2}{2k^2} = \text{cof.}\,\varphi$ donne $\frac{\rho^2}{2k^2} = \text{cof.}\,\varphi - 1$, & prenant les différences logarithmiques $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\text{fin.}\,\varphi}{1-\text{cof.}\,\varphi}\,d\varphi$; donc $\rho\frac{dP}{2d\rho} = \frac{\text{cof.}(n+1)\varphi \times (1-\text{cof.}\,\varphi)}{2\,\text{fin.}\,\varphi^2} = \frac{\text{cof.}(n+1)\varphi}{2(1+\text{cof}\,\varphi)}$.

Maintenant on a, lorfque $\rho = 0$, $\varphi = 0$, & par conféquent $\lambda'' = 2\lambda'$, $\lambda''' = 3\lambda'$ &c.; donc

$$\chi = \lambda'(\nu' + 2\nu'' + 3\nu''' + \&c. + n\nu^n)$$

$$= \frac{\nu'\lambda'}{\text{fin.}\,\varphi}(\text{fin.}\,\varphi + 2\,\text{fin.}\,2\varphi + 3\,\text{fin.}\,3\varphi + \&c. + n\,\text{fin.}\,n\varphi)$$

$$= \frac{\nu'\lambda'}{\text{fin.}\,\varphi} \times \frac{(n+1)\,\text{fin}\,n\varphi - n\,\text{fin.}(n+1)\varphi}{2(1-\text{cof.}\,\varphi)}$$

$=$ [à caufe de fin. $(n+1)\varphi = 0$] $\nu'\lambda'\frac{(n+1)\,\text{fin.}\,n\varphi}{2\,\text{fin.}\,\varphi(1-\text{cof.}\,\varphi)}$;

donc $Q = -\chi p \frac{dP}{2dp} = -\frac{(n+1)\sin.\varphi\,.\,\cos.(n+1)\varphi}{4\sin.\varphi^3}\, y'\lambda'$

$= -\frac{(n+1)(\sin.(2n+1)\varphi - \sin.\varphi)}{4\sin.\varphi^3}\, y'\lambda' = \frac{n+1}{2\sin.\varphi^2}\, y'\lambda'$,

à cauſe de ſin. $(2n+1)\varphi = -\sin.\varphi$].

Donc faiſant ces ſubſtitutions dans l'expreſſion de y^s (*Art.* XXX.), & ſuppoſant en général

$$(Ym) = Y'\sin.\frac{m\pi}{n+1} + Y''\sin.\frac{2m\pi}{n+1} + Y'''\sin.\frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + Y^n\sin.\frac{nm\pi}{n+1}\ \&$$

$$(Vm) = V'\sin.\frac{m\pi}{n+1} + V''\sin.\frac{2m\pi}{n+1} + V'''\sin.\frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + V^n\sin.\frac{nm\pi}{n+1},$$

on aura

$$y^s = \frac{2\sin.\frac{s\pi}{n+1}}{n+1}\left(Y1\cos.\left(2tk\sin.\frac{\pi}{2(n+1)}\right) + \frac{V1}{2k\sin.\frac{\pi}{2(n+1)}}\sin.\left(2tk\sin.\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right)$$

$$+ \frac{2\sin.\frac{2s\pi}{n+1}}{n+1}\left(Y2\cos.\left(2tk\sin.\frac{2\pi}{2(n+1)}\right) + \frac{V2}{2k\sin.\frac{2\pi}{2(n+1)}}\sin.\left(2tk\sin.\frac{2\pi}{2(n+1)}\right)\right)$$

$$+ \frac{2\sin.\frac{3s\pi}{n+1}}{n+1}\left(Y3\cos.\left(2tk\sin.\frac{3\pi}{2(n+1)}\right) + \frac{V3}{2k\sin.\frac{3\pi}{2(n+1)}}\sin.\left(2tk\sin.\frac{3\pi}{2(n+1)}\right)\right)$$

&c.

$$+ \frac{2\sin.\frac{ns\pi}{n+1}}{n+1}\left((Yn)\cos.\left(2tk\sin.\frac{n\pi}{2(n+1)}\right) + \frac{(Vn)}{2k\sin.\frac{n\pi}{2(n+1)}}\sin.\left(2tk\sin.\frac{n\pi}{2(n+1)}\right)\right).$$

Application de la solution précédente aux cordes sonores.

XXXIX. Je supposerai ici, pour plus de simplicité, que les vitesses initiales V', V'', V'''&c. soient nulles, moyennant quoi la valeur de y^s ne contiendra plus que des termes de cette forme

$$\frac{2 \text{ fin. } \frac{m s \pi}{n+1}}{n+1} (Y m) \text{ cof. } (2 t k \text{ fin. } \frac{m\pi}{2(n+1)}).$$

m étant successivement 1, 2, 3 &c. n.

Cela posé on sait que

$\varphi = \text{fin. } \varphi + \alpha \text{ fin. } \varphi^3 + \beta \text{ fin. } \varphi^5 + \gamma \text{ fin. } \varphi^7 + \&c.$

en faisant $\alpha = \frac{1.1}{2.3}$, $\beta = \frac{3.3}{4.5}$, $\gamma = \frac{5.5}{6.7} \beta$ &c.; donc fin. $\varphi = \varphi - \alpha \text{ fin. } \varphi^3 - \beta \text{ fin. } \varphi^5 - \gamma \text{ fin. } \varphi^7 - \&c.$; donc, supposant $\varphi = \frac{m\pi}{2(n+1)}$ & faisant pour abreger fin. $\frac{m\pi}{2(n+1)} = x$, on aura fin. $\frac{m\pi}{2(n+1)} = \frac{m\pi}{2(n+1)} - a x^3 - \beta x^5 - \gamma x^7 - \&c.$, & par conséquent

$\text{cof. } (2 t k \text{ fin. } \frac{m\pi}{2(n+1)}) = \text{cof. } (\frac{m k t}{n+1} \pi - 2\alpha k t x^3 - 2\beta k t x^5 - 2\gamma k t x^7 - \&c.)$

$= \text{cof. } \frac{m k t}{n+1} \pi \times \text{cof. } (2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + \&c.)$

$+ \text{ fin. } \frac{m k t}{n+1} \pi \times \text{fin. } (2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + \&c.)$

Or cof. $(2\alpha k t x^3 + 2\beta k t x^5 + \&c.) = 1 - 2\alpha^2 k^2 t^2 x^6 - 2 \alpha \beta k^2 t^2 x^8 - 2 \beta^2 k^2 t^2 x^{10} - \&c.$

& fin. $(2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + \&c.) = 2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + 2 \gamma k t x^7 + (2 \delta k t - \frac{4\alpha^3 k^3 t^3}{3}) x^9 + \&c.$

De plus $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6$ &c., & par conséquent $(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \&c.)\sqrt{(1-x^2)} = 1$; donc on aura aussi

$$\text{fin.}\ (2\alpha k t x^3 + 2\beta k t x^5 + \&c.) = \Big\{ 2\alpha k t x^2 + (\alpha + 2\beta) k t x^4 + (\tfrac{3\alpha}{4} + \beta + 2\gamma) k t x^6 + [(\tfrac{3.5\alpha}{4.6} + \tfrac{3\beta}{4} + \gamma + 2\delta) kt - \tfrac{4\alpha^3}{3} k^3 t^3]\, x^8 + \&c. \Big\} \times x\sqrt{(1-x^2)};$$

où l'on remarquera que $x\sqrt{(1-x^2)} = \text{fin.}\,\frac{m\pi}{2(n+1)} \times \text{cof.}\,\frac{m\pi}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\,\text{fin.}\,\frac{m\pi}{n+1}$.

Maintenant $(Y m) = Y'\,\text{fin.}\,\frac{m\pi}{n+1} + Y''\,\text{fin.}\,\frac{2m\pi}{n+1} + Y'''\,\text{fin.}\,\frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + Y^n\,\text{fin.}\,\frac{nm\pi}{n+1}$ (*Artic. préc.*); donc si on multiplie cette quantité par x^2, c'est-à-dire par $(\text{fin.}\,\frac{m\pi}{2(n+1)})^2 = \frac{1}{2}(1 - \text{cof.}\,\frac{m\pi}{n+1})$, & qu'on développe les produits des *finus* & des *cofinus*, on aura

$$(Y m)\,x^2 = \frac{1}{4}\Big\{ Y'(2\,\text{fin.}\,\tfrac{m\pi}{n+1} - \text{fin.}\,\tfrac{2m\pi}{n+1})$$
$$+ Y''(2\,\text{fin.}\,\tfrac{2m\pi}{n+1} - \text{fin.}\,\tfrac{3m\pi}{n+1} - \text{fin.}\,\tfrac{m\pi}{n+1})$$
$$+ Y'''(2\,\text{fin.}\,\tfrac{3m\pi}{n+1} - \text{fin.}\,\tfrac{4m\pi}{n+1} - \text{fin.}\,\tfrac{2m\pi}{n+1})$$
&c.
$$+ Y^n(2\,\text{fin.}\,\tfrac{nm\pi}{n+1} - \text{fin.}\,\tfrac{(n+1)m\pi}{n+1} - \text{fin.}\,\tfrac{(n-1)m\pi}{n+1})\Big\}$$
$$= -\frac{1}{4}\Big\{ (Y'' - 2Y')\,\text{fin.}\,\tfrac{m\pi}{n+1} + (Y''' - 2Y'' + Y')$$

$\text{fin.}\ \frac{2m\pi}{n+1} + (Y^{\text{iv}} - 2Y''' + Y'')\ \text{fin.}\ \frac{3m\pi}{n+1} + \&c.$

$+ (-2Y^n + Y^{n-1})\ \text{fin.}\ \frac{nm\pi}{n+1} \Big\}$,

à cauſe de $\text{fin.}\ \frac{(n+1)m\pi}{n+1} = \text{fin.}\ m\pi = 0$.

Qu'on dénote par $\Delta^2 Y$ les différences ſecondes des quantités Y dans la ſuite Y', Y'', Y''' &c. Y^n, de ſorte que l'on ait en général $\Delta^2 Y^s = Y^{s+1} - 2Y^s + Y^{s-1}$, & ſuppoſant $Y^0 = 0$ & $Y^{n+1} = 0$, (ce qui eſt permis, à cauſe que les quantités Y', Y'', Y''' &c. Y^n ſont les ſeules données) afin que $\Delta^2 Y' = Y'' - 2Y'$ & $\Delta^2 Y^m = -2Y^m + Y^{m-1}$, on aura

$$(Y^m)\,x^2 = -\frac{1}{4}\Big(\Delta^2 Y'\ \text{fin.}\ \frac{m\pi}{n+1} + \Delta^2 Y''\ \text{fin.}\ \frac{2m\pi}{n+1}$$

$$+ \Delta^2 Y'''\ \text{fin.}\ \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + \Delta^2 Y^n\ \text{fin.}\ \frac{nm\pi}{n+1}\Big).$$

Si on fait de même $\Delta^4 Y^s = \Delta^2 Y^{s+1} - 2\Delta^2 Y^s + \Delta^2 Y^{s-1} = Y^{s+2} - 4Y^{s+1} + 6Y^s - 4Y^{s-1} + Y^{s-2}$, & qu'on ſuppoſe enſuite $\Delta^2 Y^0 = 0$ & $\Delta^2 Y^{n+1} = 0$, on trouvera

$$(Y m)\,x^4 = \frac{1}{16}\Big(\Delta^4 Y'\ \text{fin.}\ \frac{m\pi}{n+1} + \Delta^4 Y''\ \text{fin.}\ \frac{2m\pi}{n+1} +$$

$$\Delta^4 Y'''\ \text{fin.}\ \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + \Delta^4 Y^n\ \text{fin.}\ \frac{nm\pi}{n+1}\Big).$$

En général ou aura

$$(Y m)\,x^{2r} = \pm\frac{1}{2^r}\Big(\Delta^{2r} Y'\ \text{fin.}\ \frac{m\pi}{n+1} + \Delta^{2r} Y''\ \text{fin.}$$

$$\frac{2m\pi}{n+1} + \Delta^{2r} Y'''\ \text{fin.}\ \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + \Delta^{2r} Y^n\ \text{fin.}\ \frac{nm\pi}{n+1}\Big),$$

(le ſigne ſupérieur étant pour le cas de r pair, & l'inférieur pour celui de r impair) pourvu qu'on ſuppoſe $Y^0 = 0$, $\Delta^2 Y^0 = 0$, $\Delta^4 Y^0 = 0$ &c. $Y^{n+1} = 0$, $\Delta^2 Y^{n+1} = 0$, $\Delta^4 Y^{n+1} = 0$ &c.; conditions auxquelles on peut

satisfaire, en imaginant la suite des Y continuée de part & d'autre à l'infini, de manière que les termes Y^0 & Y^{n+1} soient nuls, & que les termes également distans de ceux-ci soient égaux & de signes contraires.

Donc si on fait ces substitutions, & qu'on fasse pour abreger

$$\frac{2\alpha^3 k^3 t^3}{2^6} \Delta^6 Y^s - \frac{2\alpha\beta k^3 t^3}{2^8} \Delta^8 Y^s + \&c. = P^s,$$

$$-\frac{\alpha k t}{2^2} \Delta^2 Y^s + \frac{1}{2}(\alpha + 2\beta)\frac{kt}{2^4}\Delta^4 Y^s - \frac{1}{2}\left(\frac{3\alpha}{4} + \beta + 2\gamma\right)\frac{kt}{2^6}\Delta^6 Y^s + \&c. = Q^s,$$

& de plus

$$P' \text{ fin. } \frac{m\pi}{n+1} + P'' \text{ fin. } \frac{2m\pi}{n+1} + P''' \text{ fin. } \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + P^n \text{ fin. } \frac{nm\pi}{n+1} = (Pm),$$

$$Q' \text{ fin. } \frac{m\pi}{n+1} + Q'' \text{ fin. } \frac{2m\pi}{n+1} + Q''' \text{ fin. } \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + Q^n \text{ fin. } \frac{nm\pi}{n+1} = (Qm),$$

on aura

$$\frac{2 \text{ fin. } \frac{ms\pi}{n+1}}{n+1}(Ym) \text{ cof. } \left(2tk \text{ fin. } \frac{m\pi}{2(n+1)}\right)$$

$$= \frac{2 \text{ fin. } \frac{ms\pi}{n+1}}{n+1}[(Ym) + (Pm)] \text{ cof. } \frac{mkt}{n+1}\pi$$

$$+ \frac{2 \text{ fin. } \frac{ms\pi}{n+1}}{n+1}(Qm) \text{ fin. } \frac{m\pi}{n+1} \times \text{ fin. } \frac{mkt}{n+1}\pi$$

$$= \frac{(Ym) + (Pm)}{n+1}\left[\text{fin. } \frac{m(s+kt)}{n+1}\pi + \text{ fin. } \frac{m(s-kt)}{n+1}\pi\right]$$

$+ \frac{(Qm)}{2(n+1)} [\text{ſin.} \frac{m(s+1+kt)}{n+1}\pi - \text{ſin.} \frac{m(s-1+kt)}{n+1}\pi$
$- \text{ſin.} \frac{m(s+1-kt)}{n+1}\pi + \text{ſin.} \frac{m(s-1-kt)}{n+1}\pi].$

Donc ſi on fait ſucceſſivement $m = 1, 2, 3$ &c. n, & qu'on ſuppoſe en général

$$\varphi x = 2\frac{Y1 + P1}{n+1}\text{ſin. } x\pi + 2\frac{Y2 + P2}{n+1}\text{ſin. } 2x\pi + 2\frac{Y3 + P3}{n+1}\text{ſin. } 3x\pi + \&c. + 2\frac{(Yn) + (Pn)}{n+1}\text{ſin. } nx\pi,$$

$$\psi x = 2\frac{Q1}{n+1}\text{ſin. } x\pi + 2\frac{Q2}{n+1}\text{ſin. } 2x\pi + 2\frac{Q3}{n+1}\text{ſin. } 3x\pi + \&c. + 2\frac{(Qn)}{n+1}\text{ſin. } nx\pi,$$

φ, & ψ dénotant des fonctions, on aura (*Art. préc.*)

$$y^s = \frac{1}{2}\left(\varphi\frac{s+kt}{n+1} + \varphi\frac{s-kt}{n+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\psi\frac{s+1+kt}{n+1} - \psi\frac{s-1+kt}{n+1} - \psi\frac{s+1-kt}{n+1} + \psi\frac{s-1-kt}{n+1}\right).$$

D'où l'on voit que pour avoir la valeur d'une y quelconque, comme y^s, après un tems quelconque t, il n'y aura qu'à tracer deux courbes, dont les ordonnées répondantes aux abſciſſes x ſoient φx & ψx, & prendre enſuite dans la première de ces courbes $\frac{1}{2}$ ord. abſ. $\frac{s+kt}{n+1}$ + $\frac{1}{2}$ ord. abſ. $\frac{s-kt}{n+1}$, & dans la ſeconde $\frac{1}{4}$ ord. abſ. $\frac{s+1+kt}{n+1}$ − $\frac{1}{4}$ ord. abſ. $\frac{s-1+kt}{n+1}$ − $\frac{1}{4}$ ord. abſ. $\frac{s+1-kt}{n+1}$ + $\frac{1}{4}$ ord. abſ. $\frac{s-1-kt}{n+1}$.

Subſtituons maintenant dans les expreſſions de φx & de ψx les valeurs de $Y\,1$, $Y\,2$, $Y\,3$ &c. (Yn), $P\,1$, $P\,2$, $P\,3$ &c. $(P\,n)$, & $Q\,1$, $Q\,2$, $Q\,3$ &c. $(Q\,n)$, & ſuppoſant en général

$\chi\,(u, x) = \text{ſin. } u\pi \times \text{ſin. } x\pi + \text{ſin. } 2u\pi \times \text{ſin. } 2x\pi + \text{ſin. } 3u\pi \times \text{ſin. } 3x\pi + \&c. + \text{ſin. } nu\pi \times \text{ſin. } nx\pi$, nous aurons

$$\varphi x = 2\,\frac{Y' + P'}{n+1}\,\chi\left(\frac{1}{n+1}, x\right) + 2\,\frac{Y'' + P''}{n+1}\,\chi\left(\frac{2}{n+1}, x\right)$$
$$+ 2\,\frac{Y''' + P'''}{n+1}\,\chi\left(\frac{3}{n+1}, x\right) + \&c.$$
$$+ 2\,\frac{Y^n + P^n}{n+1}\,\chi\left(\frac{n}{n+1}, x\right), \&$$

$$\psi x = 2\,\frac{Q'}{n+1}\,\chi\left(\frac{1}{n+1}, x\right) + 2\,\frac{Q''}{n+1}\,\chi\left(\frac{2}{n+1}, x\right)$$
$$+ 2\,\frac{Q'''}{n+1}\,\chi\left(\frac{3}{n+1}, x\right) + \&c.$$
$$+ 2\,\frac{Q^n}{n+1}\,\chi\left(\frac{n}{n+1}, x\right).$$

Or $2 \text{ coſ. } u\pi \times \chi\,(u, x) = 2 \text{ coſ. } u\pi \times \text{ſin. } u\pi \times \text{ſin. } x\pi + 2 \text{ coſ. } u\pi \times \text{ſin. } 2u\pi \times \text{ſin. } 2x\pi + 2 \text{ coſ. } u\pi \times \text{ſin. } 3u\pi \times \text{ſin. } 3x\pi + \&c. + 2 \text{ coſ. } u\pi \times \text{ſin. } nu\pi \times \text{ſin. } nx\pi$

$= \text{ſin. } 2u\pi \times \text{ſin. } x\pi + (\text{ſin. } u\pi + \text{ſin. } 3u\pi) \text{ ſin. } 2x\pi + (\text{ſin. } 2u\pi + \text{ſin. } 4u\pi) \text{ ſin. } 3x\pi + \&c. + [\text{ſin. } (n-1)u\pi + \text{ſin. } (n+1)u\pi] \text{ ſin. } nx\pi$

$= \text{ſin. } 2x\pi \times \text{ſin. } u\pi + (\text{ſin. } x\pi + \text{ſin. } 3x\pi) \text{ ſin. } 2u\pi + (\text{ſin. } 2x\pi + \text{ſin. } 4x\pi) \text{ ſin. } 3u\pi + \&c. + [\text{ſin. } (n-1)x\pi + \text{ſin. } (n+1)x\pi] \text{ ſin. } nu\pi + \text{ſin. } (n+1)u\pi \times \text{ſin. } nx\pi - \text{ſin. } (n+1)x\pi \times \text{ſin. } nu\pi$

$= 2 \text{ coſ. } x\pi \times \chi\,(u, x) + \text{ſin. } (n+1)u\pi \times \text{ſin. } nx\pi - \text{ſin. } (n+1)x\pi \times \text{ſin. } nu\pi$. Donc

$$\chi(u, x) = \frac{\text{fin.}\,(n+1)\,u\pi\,.\,\text{fin.}\,n\,x\,\pi - \text{fin.}\,(n+1)\,x\pi\,.\,\text{fin.}\,n\,u\,\pi}{2\,(\text{cof.}\,u\,\pi - \text{cof.}\,x\,\pi)}.$$

Soit $u = \frac{m}{n+1}$, & $x = \frac{s}{n+1}$, m & s étant des nombres entiers, on aura fin. $(n+1)\,u\pi =$ fin. $m\,\pi = 0$, & fin. $(n+1)\,x\,\pi =$ fin. $s\,\pi = 0$; par conféquent $\chi\,(\frac{m}{n+1}, \frac{s}{n+1}) = 0$.

Il en faut excepter le cas où $s = m$; car alors le numérateur & le dénominateur de la formule deviennent égaux chacun à zéro. Pour trouver la valeur de $\chi\,(u, x)$ dans ce cas, on fera $x = u + \omega$, ω étant une quantité évanouiffante, & l' on aura en effaçant ce qui fe détruit,

$$\chi\,(u, x) = \frac{n\ \text{fin.}\ (n+1)\,u\,\pi \times \text{cof.}\ n\,u\,\pi}{2\ \text{fin.}\ u\,\pi}$$
$$- \frac{(n+1)\ \text{cof.}\ (n+1)\,u\,\pi \times \text{fin.}\ n\,u\,\pi}{2\ \text{fin.}\ u\,\pi}.$$

Donc, faifant $u = x = \frac{m}{n+1}$,

$$\chi\,(\frac{m}{n+1}, \frac{m}{n+1}) = - \frac{(n+1)\ \text{cof.}\ m\,\pi \times \text{fin.}\ \frac{n\,m\,\pi}{n+1}}{2\ \text{fin.}\ \frac{m\,\pi}{n+1}}.$$

Or cof. $m\,\pi \times$ fin. $\frac{n\,m}{n+1}\,\pi = \frac{1}{2}$ fin. $\frac{2\,n+1}{n+1}\,m\,\pi - \frac{1}{2}$ fin. $\frac{m}{n+1}\,\pi$, & fin. $\frac{2\,n+1}{n+1}\,m\,\pi =$ fin. $(2\,m - \frac{m}{n+1})\,\pi$ $=$ (à caufe que m eft un nombre entier) $-$ fin. $\frac{m}{n+1}\,\pi$; donc cof. $m\,\pi \times$ fin. $\frac{n\,m}{n+1}\,\pi = -$ fin. $\frac{m}{n+1}\,\pi$; & par conféquent

$$\chi\,(\frac{m}{n+1}, \frac{m}{n+1}) = \frac{n+1}{2}.$$

On aura donc

$$\varphi \frac{s}{n+1} = Y^s + P^s, \text{ \& } \psi \frac{s}{n+1} = Q^s;$$

c'eſt-à-dire que les deux courbes qui repréſentent les fonctions φx & ψx, doivent être telles que les ordonnées répondantes aux abſciſſes $\frac{s}{n+1}$ ſoient $Y^s + P^s$ & Q^s.

Ayant donc diviſé l'axe de la corde, que je ſuppoſe $= 1$, en $n + 1$ parties égales, on appliquera à chaque abſciſſe $\frac{s}{n+1}$ deux ordonnées, l'une $= Y^s + P^s$, & l'autre $= Q^s$, & l'on fera paſſer par les extrémités de chacune de ces deux ſuites d'ordonnées deux courbes repréſentées par l'équation

$$y = \alpha \text{ ſin. } x\pi + \beta \text{ ſin. } 2x\pi + \gamma \text{ ſin. } 3n\pi + \text{\&c.} + \omega \text{ ſin. } nx\pi,$$

y étant l'ordonnée qui répond à l'abſciſſe x, & α, β, γ &c. ω des coéficiens arbitraires; on aura de cette manière les courbes qui ſerviront à déterminer, pour un tems quelconque t, la figure du poligone vibrant, comme nous l'avons enſeigné plus haut.

A l'égard de la continuation de ces courbes, il eſt clair qu'elles s'étendront de part & d'autre à l'infini, & ſeront compoſées de branches égales, ſemblables & alternativement ſituées au deſſus & au deſſous de l'axe, de ſorte qu'il ne faudra que tracer les branches qui répondent à l'axe 1, & les tranſporter enſuite alternativement au deſſus & au deſſous de l'axe prolongé à l'infini de part & d'autre.

XL. Suppoſons préſentement que le nombre a des corps ſoit très-grand, & que par conſéquent la diſtance a d'un corps à l'autre ſoit très-petite, la longueur de toute la corde étant $= 1$; il eſt clair que les différences $\Delta^2 Y$, $\Delta^4 Y$ &c. deviendront très-petites du ſecond ordre, du quatrième &c.; donc puiſque $k = \sqrt{(\frac{nt^2}{a})} =$ (à cauſe de

$n = \frac{1}{a}$) $\frac{c}{a}$, les quantités $k\,\Delta^2 Y$, $k\,\Delta^4 Y$, $k^2\Delta^6 Y$ &c. feront très-petites du premier ordre, du troisiéme, du quatriéme &c., & par conséquent les quantités P & Q pourront être regardées & traitées comme nulles sans erreur sensible.

Ainsi dans cette hypothèse, on aura à très peu près le mouvement de la corde, en faisant passer par les sommets des ordonnées très-proches Y', Y'', Y''' &c., lesquelles représentent la figure initiale du poligone vibrant, une courbe dont l'équation soit $y = \alpha$ sin. $\pi x + \beta$ sin. $2\pi x + \gamma$ sin. $3\pi x +$ &c. $+\ \omega$ sin. $n\pi x$, & que j'appellerai *génératrice*, & prenant ensuite pour l'ordonnée du poligone vibrant, qui répond à une abscisse quelconque $\frac{s}{n+1} = x$, la demi somme de deux ordonnées de cette courbe, desquelles l'une réponde à l'abscisse $\frac{s+kt}{n+1} = x + ct$, & l'autre réponde à l'abscisse $\frac{s-kt}{n+1} = x - ct$; & cette détermination sera toujours d'autant plus exacte que le nombre n sera plus grand. Or il est évident que plus le nombre des poids est grand, plus la poligone initial doit s'approcher de la courbe circonscrite; d'où il s'ensuit qu'en supposant le nombre des poids infini, ce qui est le cas de la corde vibrante, on pourra regarder la figure initiale même de la corde comme une branche de la courbe *génératrice*, & qu'ainsi pour avoir cette courbe il n'y aura que transporter la courbe initiale alternativement au dessus & au dessous de l'axe à l'infini (*Art. préc.*).

XLI. On pourroit douter s'il ne faut pas que la courbe initiale de la corde soit aussi comprise dans la même équation $y = \alpha$ sin. $\pi x + \beta$ sin. $2\pi x +$ &c.

Il eſt certain que ſi on veut que la courbe génératrice ſoit la même *géométriquement* que la courbe initiale, il faut que celle-ci ſoit renfermée dans l' équation $y = \alpha$ ſin. πx + β ſin. $2 \pi x$ + &c. Je dis *la même géométriquement*, car il ſuffit que la différence de ces deux courbes ſoit moindre qu'aucune grandeur donnée, pour qu'elles puiſſent être priſes pour les mêmes. Or il eſt clair que, quelle que ſoit la courbe initiale, on peut toujours faire paſſer, par une infinité de points infiniment proches de cette courbe, une autre courbe de la forme $y = \alpha$ ſin. πx + β ſin. $2 \pi x$ + &c., de manière que la différence entre les deux courbes ſoit auſſi petite qu'on voudra, quoique cette différence ne puiſſe devenir abſolument nulle que dans le cas où la courbe initiale ſera auſſi de la même forme; dans tous les autres cas cette courbe initiale ne ſera qu'une eſpéce d'aſymptôte dont la courbe génératrice pourra s'approcher à l'infini, ſans qu'elles puiſſent jamais coincider entièrement.

Pour confirmer ce que je viens de dire, je vais faire voir comment on peut trouver une infinité de telles courbes, qui coincident avec une courbe donnée en un nombre quelconque de points auſſi près les uns des autres qu'on voudra. Pour cela je prends l' équation

$$y = \frac{2 Y 1}{n+1} \text{ ſin. } x \pi + \frac{2 Y 2}{n+1} \text{ ſin. } 2 x \pi + \frac{2 Y 3}{n+1} \text{ ſin. } 3 x \pi$$

$$+ \text{ \&c. } + \frac{2 (Y n)}{n+1} \text{ ſin. } n x \pi,$$

dans laquelle

$$(Y m) = Y' \text{ ſin. } \frac{m \pi}{n+1} + Y'' \text{ ſin. } \frac{2 m \pi}{n+1} + Y''' \text{ ſin. } \frac{3 m \pi}{n+1}$$

$$+ \text{ \&c. } + Y^n \text{ ſin. } \frac{n m \pi}{n+1},$$

& par ce que j' ai démontré dans l'Art. XXXIX. j'aurai, lorſque $x = \frac{s}{n+1}$, $y = Y^s$.

Soit maintenant $n + 1 = \frac{1}{dX}$ & $\frac{s}{n+1} = X$, on aura $(Ym) = \int Y$ fin. $mX\pi = (n+1)\int Y$ fin. $mX\pi dX$, cette intégrale étant prise depuis $X = 0$ jusqu'à $X = 1$; par conséquent

$y = 2\int Y$ fin. $X\pi dX \times$ fin. $x\pi + 2\int Y$ fin. $2X\pi dX \times$ fin. $2x\pi + 2\int Y$ fin. $3X\pi dX \times$ fin. $3x\pi +$ &c. $+ 2\int Y$ fin. $nX\pi dX \times$ fin. $nx\pi$,

de forte que, lorsque $x = X$, on aura $y = Y$, Y étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse X.

Or soit Z une fonction quelconque de X, & z une pareille fonction de x, il est clair qu'en mettant dans l'équation précédente YZ au lieu de Y & yz au lieu de y, on aura aussi, lorsque $X = x$, $yz = YZ$, c'est à dire, à cause de $z = Z$ dans ce cas, $y = Y$. D'où il s'ensuit que si l'on a une courbe quelconque rapportée à un axe $= 1$, & dont les coordonnées soient X & Y, & qu'on décrive sur le même axe une autre courbe dont l'équation, en prenant x & y pour les coordonnées, soit

$$y = \frac{2}{z}\int ZY \text{ fin. } X\pi dX + \frac{2}{z}\int ZY \text{ fin. } 2X\pi dX$$
$$+ \frac{2}{z}\int ZY \text{ fin. } 3X\pi dX + \text{\&c.}$$
$$+ \frac{2}{z}\int ZY \text{ fin. } nX\pi dX,$$

ces deux courbes coincideront dans tous les points qui répondent aux abscisses $x = X = \frac{s}{n+1}$, s & n étant des nombres entiers, quelle que soit d'ailleurs la fonction Z; or on peut rendre n & s si grands que les points de coincidance soient aussi près les uns des autres qu'on voudra.

Au reste il ne faut pas manquer d'observer que la construction donnée ci-dessus, pour représenter le mouvement de la corde vibrante, n'est exacte qu'autant qu'il est permis

de négliger les quantités P & Q comme nous l'avons fait (*Art. XL.*). Or il est clair que ces quantités seront toujours nulles d'elles-mêmes, si $\frac{d^m y}{dx^m}$ ne fait de saut nulle part dans la courbe initiale, ni dans les branches alternatives ; ainsi pourvu que cette condition soit observée, on pourra toujours déterminer le mouvement de la corde quelle que soit d'ailleurs la nature de la courbe initiale.

Nouvelle manière d'intégrer par approximation l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + i\,M\,y^2 + i^2 N\,y^3 + \&c. = 0 \quad (A)$$

dans laquelle K, L, M, N *&c. sont des constantes quelconques, &* i *marque un coéficient très-petit.*

XLII. On sait que l'intégrale de l'équation
$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + a \text{ cos. } \alpha t + b \text{ cos. } \beta t + \&c. = 0$, est

$$y = f \text{ cos. } Kt + \frac{g}{K} \text{ sin. } Kt + \frac{L}{K^2} (\text{cos. } Kt - 1)$$

$$+ \frac{a}{K^2 - \alpha^2} (\text{cos. } Kt - \text{cos. } \alpha t) + \frac{b}{K^2 - \beta^2} (\text{cos. } Kt - \text{cos. } \beta t)$$

$+ \&c.$

f & g étant deux constantes arbitraires, dont l'une exprime la valeur de y, & l'autre celle de $\frac{dy}{dt}$, lorsque $t = 0$.

Si $\alpha = K$ on trouvera (en faisant $\alpha = K + \omega$, & regardant ω comme une quantité évanouissante) que les termes $\frac{a}{K^2 - \alpha^2}$ (cos. Kt — cos. αt) se réduisent à celui-ci $- \frac{a}{2K} t$ sin. Kt.

XLIII. Cela posé, pour intégrer l' équation (A), suivant la méthode ordinaire d' approximation, on négligera d'abord les termes affectés de i, & l'on aura pour première équation approchée $\frac{d^2y}{dt^2} + K^2 y + L = 0$, & par conséquent

$$y = f \text{ cos. } Kt + \frac{g}{K} \text{ sin. } Kt + \frac{L}{K^2} (\text{cos. } Kt - 1).$$

On substituera ensuite cette première valeur de y dans le terme iMy^2, en négligeant le terme suivant $i^2 N y^3$, & faisant pour plus de simplicité $g = 0$ & $f + \frac{L}{K^2} = F$, on aura la nouvelle équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2 y + L + iM\left(\frac{F^2}{2} + \frac{L^2}{K^4}\right) - 2i\frac{MLF}{K^2} \text{ cos. } kt$$
$$+ i\frac{MF^2}{2} \text{ cos. } 2Kt = 0,$$

dont l' intégrale sera, en supposant $g = 0$ & $L + iM \left(\frac{F^2}{2} + \frac{L^2}{K^4}\right) = L'$,

$$y = f \text{ cos. } Kt + \frac{L'}{K^2} (\text{cos. } Kt - 1) + i\frac{MLF}{K^3} t \text{ sin. } Kt$$
$$- i\frac{MF^2}{2.3K^2} (\text{cos. } Kt - \text{cos. } 2Kt).$$

XLIII. Mais voici une difficulté. L' expression de y qu'on vient de trouver renferme un terme multiplié par t, & si on continuoit le calcul de la même manière on trouveroit encore des termes multipliés par t^2, t^3, &c.; cependant il est certain que la valeur de y ne doit point contenir de pareils termes. Pour le démontrer je reprends l' équation (A), & j' en tire, en multipliant par $2dy$, & intégrant....

$$\frac{dy^2}{dt^2} + K^2y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3} y^3 + \frac{i^2 N}{2} y^4 \&c. = 0 \quad (B)$$

H étant une constante qu'on déterminera par les valeurs données de y & de $\frac{dy}{dt}$ lorsque $t = 0$; de sorte qu'on aura en général

$$H = -g^2 - K^2 f^2 - 2Lf - \frac{2iM}{2} f^3 - \frac{i^2 N}{2} f^4 \text{ \&c.}$$

Je fais $\frac{dy}{dt} = x$, j'ai

$$x^2 + K^2y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3} y^3 + \frac{i^2 N}{2} y^4 \text{ \&c.} = 0;$$

équation qui peut être regardée comme appartenant à une courbe dont x & y soient les coordonnées. Or puisque i est une quantité très-petite, il est clair qu'on aura à peu près $x^2 + K^2y^2 + 2Ly + H = 0$, d'où l'on tire

$$y = \frac{-L + \sqrt{(L^2 - K^2H - K^2x^2)}}{K^2}.$$

Ces deux racines donnent comme l'on voit une ovale dans laquelle la valeur de y est contenue entre ces deux limites

$$y = \frac{-L + \sqrt{(L^2 - K^2H)}}{K^2} \text{ \& } y = \frac{-L - \sqrt{(L^2 - K^2H)}}{K^2}.$$

Pour trouver les autres racines on supposera $y = \frac{z}{i}$, & après avoir fait disparoitre les puissances de i qui se trouveront au dénominateur, on cherchera les valeurs de z par les régles ordinaires d'approximation. De cette manière on aura en ne considérant d'abord que l'équation $x^2 + K^2y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3} y^3 = 0$, & poussant la précision jusqu'aux i^2, $z = -\frac{3K^2}{2M} + \frac{2iL}{K} - \frac{8i^2L^2M}{3K^6} - \frac{2i^2M(H + x^2)}{3K^4}$, & par conséquent

y

$$y = -\frac{3K^2}{2iM} + \frac{2L}{K^2} - \frac{8iL^2M}{3K^6} - \frac{2iM(H+x^2)}{3K^4}$$

ce qui donne une branche parabolique infiniment éloignée de l' axe. On tirera de même de l' équation

$$x^2 + K^2y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3}y^3 + \frac{i^2N}{2}y^4 = 0,$$

$y = \frac{\alpha}{i} + \beta + i(\gamma + \delta x^2)$, où

$$\alpha = \frac{-\frac{2M}{3} \pm \sqrt{(\frac{4M^2}{9} - 2K^2)}}{N}$$

$$\beta = -\frac{4L\alpha}{4N\alpha^3 + 4M\alpha^2 + 4K^2\alpha}$$

$$\gamma = -\frac{(6N^2\alpha^2 + 4M\alpha + 2K^2)\beta^2 + 4L\beta + 2C}{4N\alpha^3 + 4M\alpha^2 + 4K^2\alpha}$$

$$\delta = -\frac{2}{4N\alpha^3 + 4M\alpha^2 + 4K^2\alpha}$$

ce qui donnera, à cauſe de l' ambiguité du radical $\sqrt{(\frac{4M^2}{9} - 2K^2)}$, deux branches paraboliques éloignées à l' infini de l' axe; & ainſi de ſuite.

De là il eſt aiſé de conclure que la valeur de y ne peut jamais paſſer du ſini à l'infini. Donc puiſque t peut devenir infinie, ce qui eſt évident par la nature même de l'équation (A), il s'enſuit que la valeur de y en t ne doit point contenir de termes qui croiſſent avec t; donc &c.

XLV. Voyons donc comment on pourroit faire diſparoitre de l' expreſſion de y les termes qui contiendroient des puiſſances de t, & qui rendroient cette expreſſion très-fautive.

Qu'on ſuppoſe, dans l'équation (A), $y = y' + \lambda + i\mu + i^2\nu$ + &c., λ, μ, ν &c. étant des conſtantes indéterminées & y' une nouvelle variable, & négligeant les termes qui

ſeroient affectés de i^3 &c. on aura une équation de cette forme

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + R^2y' + A + i(B + My'^2) + i^2(C + 3N\lambda y'^2 + Ny'^3)$$
$$+ \&c. = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

dans laquelle $R^2 = K^2 + 2iM\lambda + i^2(2M\mu + 3N\lambda^2)$, $A = L + K^2\lambda$, $B = K^2\mu + M\lambda^2$, & $C = K^2\nu + 2M\mu\lambda + N\lambda^3$; ce qui donnera pour première équation approchée $\frac{d^2y'}{dt^2} + R^2y' + A = 0$; d' où, en ſuppoſant $y' = f'$ & $\frac{dy'}{dt} = 0$ lorſque $t = 0$, on aura

$$y' = f' \text{ coſ. } Rt + \frac{A}{R^2}(\text{coſ. } Rt - 1).$$

Subſtituant enſuite cette première valeur de y' dans le terme iMy'^2 de l' équation (C), & négligeant les termes affectés de i^2 on aura

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + R^2y' + A + i\left[B + M\frac{A^2}{R^4} + \frac{M}{2}\left(f' + \frac{A}{R^2}\right)^2\right]$$
$$- 2iM\frac{A}{R^2}\left(f' + \frac{A}{R^2}\right)\text{coſ.} Rt + i\frac{M}{2}\left(f' + \frac{A}{R^2}\right)^2\text{coſ.} 2Rt = 0.$$

On fera $A = 0$, moyennant quoi le terme qui contient coſ. Rt diſparoitra, & l' équation ſe réduira à celle-ci

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + R^2y' + i\left(B + \frac{Mf'^2}{2}\right) + i\frac{Mf'^2}{2}\text{coſ.} 2Rt = 0,$$

dont l' intégrale ſera

$$y' = f' \text{ coſ. } Rt + i\left(\frac{B}{R^2} + \frac{Mf'^2}{2R^2}\right)(\text{coſ. } Rt - 1)$$
$$- i\frac{Mf'^2}{2.3R^2}(\text{coſ. } Rt - \text{coſ. } 2Rt).$$

Si on veut ſe contenter de cette approximation on négligera dans la valeur de R les termes de l' ordre de i^2, & l' on aura $R^2 = K^2 + 2iM\lambda$; or la ſuppoſition de

$A = 0$ donne $\lambda = -\frac{L}{K^2}$, donc on aura $R^2 = K^2 - 2i\frac{LM}{K^2}$. A l'égard de la quantité μ qui entre dans la valeur de B, on pourra la suppoſer $= 0$, de ſorte qu'on aura $B = M\lambda^2 = \frac{L^2M}{K^4}$. Ainſi la valeur de y ſera, aux quantité de l'ordre de i^2 près, $-\frac{L}{K^2} + y'$.

Mais ſi on vouloit pouſſer le calcul plus loin il faudroit ſubſtituer l'expreſſion précédente de y' dans les termes iMy'^2, $3i^2N\lambda y'^2$ & $i^2Ny'^3$ de l'équation (C), en négligeant les quantités qui ſe trouveroient affectés de i^3, & faire diſparoitre enſuite le terme qui contiendroit coſ. Rt, en ſuppoſant égal à zéro ſon coéficient $i^2[-2Mf'(\frac{B}{R^2} + \frac{Mf'^2}{2R^2}) + \frac{M^2f'^3}{2.3\,R^2} + \frac{3Nf'^3}{4}]$, ce qui donneroit $B = -\frac{5Mf'^2}{12} + \frac{3NR^2f'^2}{8M}$. De cette manière on auroit une nouvelle valeur de y' qui ne contiendroit, comme la précédente, que des *coſinus* d'angles; & ainſi de ſuite.

La valeur de B qu'on vient de trouver donnera, à cauſe de $B = K^2\mu + M\lambda^2$, $\mu = (\frac{3NR^2}{8MK^2} - \frac{5M}{12K^2})f'^2 - \frac{ML^2}{K^6} =$ [en mettant au lieu de R^2 ſa valeur approchée K^2] $(\frac{3N}{8M} - \frac{5M}{12K^2})f'^2 - \frac{ML^2}{K^6}$; d'où l'on aura

$$R^2 = K^2 + 2iM\lambda + i^2(2M\mu + 3N\lambda^2)$$
$$= K^2 - 2i\frac{ML}{K^2} + i^2[(\frac{3N}{4} - \frac{5M^2}{6K^2})f'^2 + \frac{3NL^2}{K^4} - \frac{2M^2L^2}{K^6}];$$

c'eſt la valeur de R^2 aux quantités de l'ordre de i^3 près.

XLVI. Je vais préfentement donner une méthode particulière pour intégrer ces fortes d'équations différentielles auffi exactement qu'on voudra par approximation, méthode qui aura fur la précédente l'avantage de donner directement, & fans aucune fuppofition précaire la vraie forme de l'intégrale.

Je fuppoferai ici pour plus de fimplicité qu'on ne veuille avoir égard qu'aux quantités de l'ordre de i & de i^2; mais on verra aifément que la méthode aura lieu quelque loin qu'on veuille pouffer l'approximation.

Soit $y^2 = u$, & $y^3 = v$; l'équation propofée (A) deviendra

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iMu + i^2Nv = 0 \quad . \quad . \quad (D)$$

Or $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{2y\,d^2y}{dt^2} + \frac{2\,dy^2}{dt^2}$; donc fi on multiplie l'équation (A) par $2y$, & l'équation (B) de l'Art. XLIV. par 2, & qu'enfuite on les ajoute enfemble on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4K^2y^2 + 6Ly + 2H + \frac{10iM}{3}y^3 + 6i^2Ny^4 = 0.$$

Mais comme la quantité u eft déja multipliée par i dans l'équation (D), il eft clair que pour ne pas introduire dans la valeur de y des termes de l'ordre de i^3, il faut rejetter dans la valeur de u & par conféquent auffi de dans celle de $\frac{d^2u}{dt^2}$, les termes de l'ordre de i^2; effaçant donc le terme $6i^2Ny^4$, & mettant dans les autres u à la place de y^2 & v à la place de y^3, on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4K^2u + 6Ly + 2H + \frac{10iM}{3}v = 0.$$

On a de même $\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{3y^2d^2y}{dt^2} + \frac{6y\,dy^2}{dt^2}$; donc multipliant l'équation (A) par $3y^2$, & l'équation (B) par $6y$, & les ajoutant enfemble on aura

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 9K^2y^3 + 15Ly^2 + 6Hy + 7iMy^4 + \&c. = 0.$$

Or v étant multipliée par i^2 dans l' équation (D), on rejettera dans la valeur de $\frac{d^2v}{dt^2}$ tous les termes affectés de i, de sorte qu'on aura, en mettant u au lieu de y^2 & v au lieu de y^3,

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 9K^2v + 15Lu + 6Hy = 0.$$

Nous avons donc entre les trois variables y, u, v, ces trois équations du second ordre

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iMu + i^2Nv = 0 \\ &\frac{d^2u}{dt^2} + 4K^2u + 6Ly + 2H + \frac{10iM}{3}v = 0 \\ &\frac{d^2v}{dt^2} + 9K^2v + 15Lu + 6Hy = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (E)$$

lesquelles sont intégrables par la méthode de l'Art. XXVI.

Suivant cette méthode je multiplie la première par $\lambda e^{\rho t}dt$, la seconde par $\mu e^{\rho t}dt$, la troisiéme par $\nu e^{\rho t}dt$ (*Art.XXIX*)., λ, μ, ν & ρ étant des constantes indéterminées, ensuite je les ajoute ensemble, & j' en prends l' intégrale en faisant disparoitre, par des intégrations par parties, les différences des variables y, u, v de dessous le signe $\int$; j' aurai donc

$$\left\{\lambda\frac{dy}{dt} + \mu\frac{du}{dt} + \nu\frac{dv}{dt} - (\lambda y + \mu u + \nu v)\rho + \frac{\lambda L + 2\mu H}{\rho}\right\}e^{\rho t} +$$

$$\int\left\{\begin{aligned} &(\lambda\rho^2 + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H)y \\ &+ (i\lambda M + \mu\rho^2 + 4\mu K^2 + 15\nu L)u \\ &+ (i^2\lambda N + \frac{10i}{3}\mu M + \nu\rho^2 + 9\nu K^2)v \end{aligned}\right\}e^{\rho t}dt$$

$= \text{const.}$

J'égale à zéro les coéficiens des variables y, u, v, qui sont sous les signes $\int$, ce qui me donne ces trois équations

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\rho^2+\lambda K^2+6\mu L+6\nu H=0\\ i\lambda M+\mu\rho^2+4\mu K^2+15\nu L=0\\ i^2\lambda N+\frac{10i}{3}\mu M+\nu\rho^2+9\nu K^2=0\end{array}\right\}\ldots(F)$$

par le moyen desquelles je détermine les quantités λ, μ, ν, & ρ.

De cette manière j'ai

$$\left\{\lambda\frac{dy}{dt}+\mu\frac{du}{dt}+\nu\frac{dv}{dt}-(\lambda y+\mu u+\nu v)\rho+\frac{\lambda L+2\mu H}{\rho}\right\}e^{\rho t}=\text{const.}\quad\ldots\ldots\ (G)$$

Or pour peu qu'on examine les équations (F), il est aisé de reconnoitre que la quantité μ doit être de l'ordre de i, & celle de ν de l'ordre de i^2.

Soit donc $\mu=i\lambda\alpha$ & $\nu=i^2\lambda\beta$, on aura, en divisant la première équation par λ, la seconde par $i\lambda$, & la troisiéme par $i^2\lambda$, les trois suivantes

$$\rho^2+K^2+6i\alpha L+6i^2\beta H=0$$
$$M+\alpha(\rho^2+4K^2)+15i\beta L=0$$
$$N+\frac{10}{3}\alpha M+\beta(\rho^2+9K^2)=0.$$

La première donne $\rho^2=-K^2-6i\alpha L-6i^2\beta H$, & mettant cette valeur de ρ^2 dans les deux autres on aura

$$M+\alpha(3K^2-6i\alpha L-6i^2\beta H)+15i\beta L=0$$
$$N+\frac{10}{3}\alpha M+\beta(8K^2-6i\alpha L-6i^2\beta H)=0.$$

Négligeons d'abord les termes affectés de i, & nous aurons $M+3\alpha K^2=0$, & $N+\frac{10}{3}\alpha M+8\beta K^2=0$, d'où l'on tire $\alpha=-\frac{M}{3K^2}$ & $\beta=-\frac{N}{8K^2}-\frac{10\alpha M}{3.8K^2}=-\frac{N}{8K^2}+\frac{10M^2}{9.8K^4}$.

Subſtituant enſuite ces valeurs dans les termes de l' ordre de i, & négligeant ceux de l' ordre de i^2, on aura

$$M + 3\alpha K^2 - 6iL\left(\frac{M}{3K^2}\right)^2 + 15iL\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right) = 0$$

$$N + \frac{10}{3}\alpha M + 8\beta K^2 - 6iL\left(-\frac{M}{3K^2}\right)\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right) = 0$$

d' où l' on tirera de nouvelles valeurs plus exactes de α & de β, leſquelles ſeront $\alpha = -\frac{M}{3K^2} + \frac{6iL}{3K^2}\left(\frac{M}{3K^2}\right)^2 - \frac{15iL}{3K^2}\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right)$, $\beta = -\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{8.9K^4} - \frac{10.6iLM}{9.8K^4}\left(\frac{M}{3K^2}\right)^2 + \frac{15iLM}{9.8K^4}\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right) + \frac{6iL}{8K^2}\left(-\frac{M}{3K^2}\right)\times\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right)$, & ainſi de ſuite; mais comme $\mu = i\lambda\alpha$ & $\nu = i^2\lambda\beta$, il eſt clair que pour notre objet il ſuffira d' avoir la valeur de α aux quantités de l'ordre de i^2 près, & celle de β aux quantités de l'ordre de i près; de ſorte qu'on pourra ſe contenter de prendre

$$\alpha = -\frac{M}{3K^2} + \frac{iL}{K^4}\left(\frac{5N}{8} - \frac{17M^2}{36K^2}\right) \text{ \&}$$

$$\beta = -\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}.$$

Ayant trouvé les valeurs de α & de β, on les ſubſtituera dans l' équation $\rho^2 = -K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H$, & l' on aura, en ordonnant les termes par rapport à i,

$$\rho^2 = -K^2 + \frac{2iLM}{K^2} - \frac{i^2L^2}{K^4}\left(\frac{15N}{4} - \frac{17M^2}{6K^2}\right) + \frac{i^2H}{K^2}\left(\frac{3N}{4} - \frac{5M^2}{6K^2}\right).$$

Soit $\rho = R\sqrt{-1}$, enſorte que $\rho^2 = -R^2$, & l'on aura

$$R^2 = K^2 - \frac{2iLM}{K^2} + \frac{i^2L^2}{K^4}\left(\frac{15N}{4} - \frac{17M^2}{6K^2}\right) - \frac{i^2H}{K^2}$$
$$\left(\frac{3N}{4} - \frac{5M^2}{6K^2}\right);$$ d'où
$$R = K - i\frac{LM}{K^3} + i^2\frac{L^2}{K^5}\left(\frac{15N}{8} - \frac{10M^2}{3K^2}\right) - i^2\frac{H}{K^3}$$
$$\left(\frac{3N}{8} - \frac{15M^2}{12K^2}\right).$$

Reprenons maintenant l'équation (G), & ſubſtituons-y $R\sqrt{-1}$ au lieu de ρ, $i\lambda\alpha$ au lieu de μ, $i^2\lambda\beta$ au lieu de ν, y^2 au lieu de u, & y^3 au lieu de v, nous aurons, en prenant C pour la conſtante,

$$\lambda e^{Rt\sqrt{-1}}\left\{(1 + 2i\alpha y + 3i^2\beta y^2)\frac{dy}{dt} - \left(y + i\alpha y^2 + i^2\beta y^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2}\right)R\sqrt{-1}\right\} = C.$$

Or ſoit, lorſque $t = 0$, $y = f$ & $\frac{dy}{dt} = g$, on aura $C = \lambda(1 + 2i\alpha f + 3i^2\beta f^2)g - \lambda\left(f + i\alpha f^2 + i^2\beta f^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2}\right)R\sqrt{-1}$. Donc ſi on fait

$$F = f + i\alpha f^2 + i^2\beta f^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2},$$ &
$$G = (1 - 2i\alpha f + 3i^2\beta f^2)g,$$
& qu'on diviſe toute l'équation par $\lambda e^{Rt\sqrt{-1}}$, on aura

$$(1 + 2i\alpha y + 3i^2\beta y^2)\frac{dy}{dt} - \left(y + i\alpha y^2 + i^2\beta y^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2}\right)R\sqrt{-1} = (G - FR\sqrt{-1})e^{-Rt\sqrt{-1}}$$
$$= G\,\text{coſ.}\,Rt - FR\,\text{ſin.}\,Rt - (FR\,\text{coſ.}\,Rt + G\,\text{ſin.}\,Rt)\sqrt{-1};$$
& prenant le radical $\sqrt{-1}$ en $-$,

$$(1 + 2i\alpha y + 3i^2\beta y^2)\frac{dy}{dt} + (y + i\alpha y^2 + i^2\beta y^3$$
+

$+ \frac{L - 2 i \alpha H}{R^2}) R \surd - 1 = G$ cof. Rt — FR fin. Rt
$+ (FR$ cof. $Rt + G$ fin. $Rt) \surd - 1$;
donc retranchant la première de ces équations de la feconde, & divifant enfuite par $2 R \surd - 1$, on aura

$$y + i \alpha y^2 + i^2 \beta y^3 + \frac{L - 2 i \alpha H}{R^2}$$

$$= F \text{ cof. } Rt + \frac{G}{R} \text{ fin. } Rt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{H})$$

C' eft l' intégrale de l'équation (A), en n' ayant égard qu'aux quantités de l' ordre de i & de i^2.

Si l' on veut avoir la valeur de y, on n'aura qu'à réfoudre l' équation (H) par approximation, en obfervant de négliger dans cette opération les quantités qui fe trouveroient multipliées par des puiffances de i plus hautes que la feconde.

Pour y parvenir plus aifément on fera $y = T + i T' + i^2 T''$, & fubftituant cette valeur dans l' équation (H) on égalera à zéro les termes homogénes, c' eft-à-dire ceux qui font affectés de la même puiffance de i; ce qui donnera $T = F$ cof. $Rt + \frac{G}{R}$ fin. $Rt - \frac{L - 2 i \alpha H}{R^2}$, $T' = - \alpha T^2$, $T'' = - 2 \alpha T T' - \beta T^3$; d' où il eft clair que la valeur de y ne contiendra que des *finus* & des *cofinus* d' angles multiples de t.

En fuppofant $g = 0$ on verra que la valeur de R^2 trouvée ci-deffus s'accorde entiérement avec celle de l'Art. XLV.; il n' y aura, pour s' en convaincre, qu'à mettre, au lieu de H & de f', leurs valeurs approchées — $(K^2 f + 2 L f)$ & $f + \frac{L}{K^2}$ (*Artt. XLIV.* & *XLV.*).

Du mouvement d'un corps qui décrit une orbite à peu près circulaire, en vertu d'une force centrale proportionelle à une fonction quelconque de la distance.

XLVII. Soit r le rayon vecteur de l'orbite, t le tems écoulé depuis le commencement du mouvement, φ l'angle parcouru par le rayon r durant le tems t, Δr la fonction de la distance r qui exprime la force centrale, a la distance initiale, c la vitesse de projection, & b l'angle de la ligne de projection avec le rayon vecteur ; on aura en prenant dt constant ces deux équations

$$d \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dt} = 0 \;\&\; \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r\, d\varphi^2}{dt^2} + \Delta r = 0.$$

(Voyés l'Art. IV. du Mém. qui a pour titre *Application de la méthode précédente &c.* imprimé dans le Vol. préc.).

La première étant intégrée donne $\frac{r^2 d\varphi}{dt} =$ à une constante, mais lorsque $t = 0$ on a $r = a$ & $\frac{r\, d\varphi}{dt} = c \sin. b$; donc $\frac{r^2 d\varphi}{dt} = ac \sin. b$ & $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{ac \sin. b}{r^2}$; substituant donc cette valeur dans l'autre équation, on aura pour les équations générales du mouvemens du corps

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{a^2 c^2 \sin. b^2}{r^3} + \Delta r = 0,\; \frac{d\varphi}{dt} - \frac{ac \sin. b}{r^2} = 0.$$

Maintenant, puisque on suppose que l'orbite différe peu d'un cercle, il est clair que r doit être presque égal à a, & que par conséquent on peut faire $r = a + iy$, i étant un coéficient très-petit & y une nouvelle variable ; ce qui donnera $\frac{d^2 r}{dt^2} = i \frac{d^2 y}{dt^2}$, $\frac{1}{r^3} = \frac{1}{(a + iy)^3} = \frac{1}{a^3} -$

$3i\frac{y}{a^4} + 6i^2\frac{y^2}{a^5} - 10i^3\frac{y^3}{a^6} +$ &c., $\Delta r = \Delta(a+iy) =$ (en ſuppoſant $\frac{d.\Delta r}{dr} = \Delta' r$, $\frac{d.\Delta' r}{dr} = \Delta'' r$ &c.) $\Delta a + i\Delta' a y + i^2\frac{\Delta'' a}{2}y^2 + i^3\frac{\Delta''' a}{2.3}y^3 +$ &c.; donc la première équation deviendra $i\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{c^2\text{ſin.}b^2}{a}(1 - 3i\frac{y}{a} + 6i^2\frac{y^2}{a^2} - 10i^3\frac{y^3}{a^3} + \text{\&c.}) + \Delta a + i\Delta' a y + i^2\frac{\Delta'' a}{2}y^2 + i^3\frac{\Delta''' a}{2.3}y^3 + \text{\&c.} = 0$; d'où l'on voit que $\Delta a - \frac{c^2\text{ſin.}b^2}{a}$ doit être néceſſairement une quantité très-petite de l'ordre de i; de ſorte qu'on peut ſuppoſer $\Delta a - \frac{c^2\text{ſin.}b^2}{a} = iL$, moyennant quoi l'équation ſera diviſible par i, & deviendra après la diviſion

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\Delta' a + \frac{3c^2\text{ſin.}b^2}{a^2})y + L + i(\frac{\Delta'' a}{2} - \frac{6c^2\text{ſin.}b^2}{a^3})y^2 + i^2(\frac{\Delta''' a}{2.3} + \frac{10c^2\text{ſin.}b^2}{a^4})y^3 + \text{\&c.} = 0,$$

équation qui ſe réduit à la formule (A) de l'Art. XLII., en ſuppoſant $\Delta' a + \frac{3c^2\text{ſin.}b^2}{a^2} = K^2$, $\frac{\Delta'' a}{2} - \frac{6c^2\text{ſin.}b^2}{a^3} = M$, $\frac{\Delta''' a}{2.3} + \frac{10c^2\text{ſin.}b^2}{a^4} = N$ &c.;

Ainſi l'on aura la valeur de y, & par conſéquent celle de r en t; il faudra ſeulement obſerver que, quand $t = 0$, $r = a$ & $\frac{dr}{dt} = -c$ coſ. b, c'eſt-à-dire $y = 0$ & $i\frac{dy}{dt} = -c$ coſ. b, par conſéquent $f = 0$ & $ig = -c$ coſ. b; d'où l'on voit que coſ. b doit être très-petit, & par conſéquent l'angle de projection b preſque droit;

ce qui eſt d'ailleurs évident, à cauſe que l'orbite eſt ſuppoſée peu différente d'un cercle.

L'autre équation donnera, après la ſubſtitution de $a + iy$ au lieu de r,

$$\frac{d\varphi}{dt} - \frac{c\,\text{ſin.}\,b}{a} + 2i\frac{c\,\text{ſin.}\,b}{a^2}y - 3i^2\frac{c\,\text{ſin.}\,b}{a^3}y^2 + 4i^3\frac{c\,\text{ſin.}\,b}{a^4}y^3 - \&c. = 0.$$

Je ſubſtitue dans cette équation u au lieu de y^2 & v au lieu de y^3, enſuite j'y ajoute les trois équations (E) de l'Art. XLVI. multipliées la première par λ, la ſeconde par μ, la troiſiéme par ν (λ, μ, ν étant des coéficiens indéterminés), ce qui me donne, en ordonnant les termes,

$$\frac{d\varphi}{dt} + \lambda\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{d^2u}{dt^2} + \nu\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{c\,\text{ſin.}\,b}{a} + \lambda L + 2\mu H + \left(\frac{2ic\,\text{ſin.}\,b}{a^2} + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H\right)y + \left(-\frac{3i^2c\,\text{ſin.}\,b}{a^3} + i\lambda M + 4\mu K^2 + 15\nu L\right)u + \left(\frac{4i^3c\,\text{ſin.}\,b}{a^4} + i^2\lambda N + \frac{10i\mu M}{3} + 9\nu K^2\right)v = 0.$$

Je ſuppoſe à préſent

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2ic\,\text{ſin.}\,b}{a^2} + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H = 0 \\ &-\frac{3i^2c\,\text{ſin.}\,b}{a^3} + i\lambda M + 4\mu K^2 + 15\nu L = 0 \\ &\frac{4i^3c\,\text{ſin.}\,b}{a^4} + i^2\lambda N + \frac{10i\mu M}{3} + 9\nu K^2 = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

ce qui réduit l'équation précédente à

$$\frac{d\varphi}{dt} + \lambda\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{d^2u}{dt^2} + \nu\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{c\,\text{ſin.}\,b}{a} + \lambda L + 2\mu H = 0,$$

dont l'intégrale eſt

$$\varphi + \lambda\frac{dy}{dt} + \mu\frac{du}{dt} + \nu\frac{dv}{dt} - \left(\frac{c\,\text{ſin.}\,b}{a} - \lambda L - 2\mu H\right)t = \text{conſt.}$$

c'eſt-à-dire, en remettant y^2 au lieu de u, y^3 au lieu de v, & faiſant attention que lorſque $t = 0$, on a $\varphi = 0$, $y = 0$ & $\frac{dy}{dt} = g$,

$$\varphi + (\lambda + 2\mu y + 3\nu y^2)\frac{dy}{dt} - \left(\frac{c\,\text{ſin.}\,b}{a} - \lambda L - 2\mu H\right)t = \lambda g.$$

Et il ne s'agira plus que de tirer les valeurs de λ, μ, ν des équations (I); or ſi on fait $\lambda = i\gamma$, $\mu = i^2\delta$, $\nu = i^3\varepsilon$, & qu'on diviſe la première équation par i, la ſeconde par i^2, la troiſiéme par i^3, on aura

$$\frac{2c\,\text{ſin.}\,b}{a^2} + \gamma K^2 + 6i\delta L + 6i^2\varepsilon H = 0$$

$$-\frac{3c\,\text{ſin.}\,b}{a^3} + \gamma M + 4\delta K^2 + 15 i\varepsilon L = 0$$

$$\frac{4c\,\text{ſin.}\,b}{a^4} + \gamma N + \frac{10}{3}\delta M + 9\varepsilon K^2 = 0,$$

d'où l'on tire, en négligeant ce qu'on doit négliger,

$$\gamma = -\frac{2c\,\text{ſin.}\,b}{a^2K^2} + \frac{6iL}{K^2}\delta - \frac{6i^2H}{K^2}\varepsilon,$$

$$\delta = \frac{c\,\text{ſin.}\,b}{a^2K^2}\left(\frac{3}{4a} + \frac{M}{2K^2} + \frac{9iLM}{8aK^4} + \frac{3iLM^2}{4K^6}\right) - \frac{15iL}{4K^2}\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{c\,\text{ſin.}\,b}{a^2K^2}\left(-\frac{4}{9a^2} + \frac{2N}{9K^2} - \frac{5M}{18aK^2} - \frac{5M^2}{27K^4}\right).$$

Donc ſi on fait pour abreger

$$S = \frac{c\,\text{ſin.}\,b}{a} - i\gamma L - 2i^2\delta H$$

on aura

$$\varphi = St + i\gamma g - i(\gamma + 2i\delta y + 3i^2\varepsilon y^2)\frac{dy}{dt} \quad (\text{K})$$

Or y eſt déja connu en t, donc on connoitra auſſi φ en t.

Il eſt à remarquer que $St + i\gamma g$ repréſente l'angle du mouvement moyen; de ſorte que ſi on nomme cet angle θ, & qu'on ſubſtitue dans les équations (H) & (K)

$\frac{\theta - i\gamma g}{S}$ au lieu de t, on aura les formules qui feront trouver le lieu vrai du corps, ſon lieu moyen étant donné.

Il eſt viſible que les apſides de l'orbite ſe trouveront aux points, où $dy = 0$; or ſi on différentie l'équation (H) & qu'on faſſe enſuite $dy = 0$ on aura $- RF$ ſin. $Rt + G$ coſ. $Rt = 0$, c'eſt-à-dire tang. $Rt = \frac{G}{RF}$. Soit h le plus petit angle qui répond à la tangente $\frac{G}{RF}$, & l'on aura $Rt = h + \mu\pi$, π dénotant l'angle de 180° dégrés, & μ un nombre quelconque entier; maintenant l'équation (K) donnera, lorſque $dy = 0$, $\varphi = St + i\gamma g$; donc mettant au lieu de t ſa valeur $\frac{h + \mu\pi}{R}$ on aura pour les lieux des apſides

$$\varphi = i\gamma g + \frac{S}{R}(h + \mu\pi);$$

d'où l'on voit que la diſtance d'une apſide à l'autre ſera égale à l'angle $\frac{S}{R}\pi$, & que par conſéquent le mouvement des apſides ſera de $(\frac{S}{R} - 1)\,360°$ à chaque révolution.

XLVIII. Si on veut connoitre la figure de l'orbite décrite par les corps, il faudra éliminer t des équations (H) & (K) pour avoir une équation entre y & φ, mais il ſera beaucoup plus ſimple de ſubſtituer d'abord dans l'équation $\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r\,d\varphi^2}{dt^2} + \Delta r = 0$ au lieu de dt ſa valeur $\frac{r^2\,d\varphi}{ac\,\text{ſin.}\,b}$, ce qui donnera, en faiſant $\frac{1}{r} = s$ & prenant $d\varphi$ conſtant, $\frac{d^2s}{d\varphi^2} + s - \frac{\Delta\frac{1}{s}}{s^2a^2c^2\,\text{ſin.}\,b^2} = 0$, & d'in-

tégrer enſuite cette dernière équation par la méthode de l'Art. XLVI.

En effet puiſque r eſt à peu près égale à a (hyp.) s ſera à peu près égale à $\frac{1}{a}$, & par conſéquent on pourra ſuppoſer $s = \frac{1}{a} + iy$, ce qui donnera, en faiſant

$$\frac{\Delta \frac{1}{s}}{s^3 a^2 c^2 \text{ ſin. } b^2} = \Gamma s, \ \& \ \frac{1}{a} - \Gamma \frac{1}{a} = L, 1 - \Gamma' \frac{1}{a}$$
$$= K^2, - \frac{1}{2} \Gamma'' \frac{1}{a} = M, - \frac{1}{2.3} \Gamma''' \frac{1}{a} = N \ \&c.,$$
$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} + K^2 y + H + iMy^2 + i^2 Ny^3 + \&c. = 0,$$

dont l'intégrale ſera (*Art. cité*)

$$y + i\alpha y^2 + i^2\beta y^3 = - \frac{L - 2i\alpha H}{R^2} + F \text{ coſ. } R\varphi,$$
$$+ \frac{G}{R} \text{ ſin. } R\varphi.$$

Ainſi l'on aura y en φ; il faudra ſeulement obſerver que la quantité g n'exprimera plus ici la valeur de $\frac{dy}{dt}$ lorſque $t = 0$, mais celle de $\frac{dy}{d\varphi}$ c'eſt-à-dire $\frac{dr}{id\varphi}$, de ſorte qu'on aura $ig = -$ cot. b.

Le coéficient R donnera la diſtance d'une apſide à l'autre de $\frac{180^\circ}{R}$, & l'on verra, après en avoir fait le calcul, que cette valeur s'accorde avec celle que nous avons trouvée ci-deſſus.

Soit $\Delta r = A r^{m-2}$, on aura $\Gamma s = \frac{A}{a^2 c^2 \text{ ſin. } b^2} s^{-m}$, donc $\Gamma \frac{1}{a} = \frac{A a^{m-2}}{c^2 \text{ ſin. } b^2}$, $\Gamma' \frac{1}{a} = - m \frac{A a^{m-1}}{c^2 \text{ ſin. } b^2}$, $\Gamma'' \frac{1}{a}$

$= m\,(m+1)\,\frac{A\,a^m}{c^2 \text{ fin. } b^2}$, $\Gamma'''\,\frac{1}{a} = -\,m\,(m+1)\,(m+2)$ $\frac{A\,a^{m+1}}{c^2 \text{ fin. } b^2}$ &c.; on aura donc $\frac{1}{a} - \frac{A\,a^{m-2}}{c^2 \text{ fin. } b^2} = i\,L$, $1 + m\,\frac{A\,a^{m-1}}{c^2 \text{ fin. } b^2} = K^2$, $-\,\frac{m\,(m+1)}{2} \times \frac{A\,a^m}{c^2 \text{ fin. } b^2} = M$, $\frac{m\,(m+1)\,(m+2)}{2.3} \times \frac{A\,a^{m+1}}{c^2 \text{ fin. } b^2} = N$ &c.; donc, puifque $\frac{A\,a^{m-2}}{c^2 \text{ fin. } b^2} = \frac{1}{a} - i\,L$, on aura

$$K^2 = 1 + m\,(1 - iaL),\ M = -\,\frac{m(m+1)a}{2}\,(1 - iaL),$$

$$N = \frac{m\,(m+1)\,(m+2)\,a^2}{2.3}\,(1 - i\,a\,L)\ \text{\&c.};$$

faifant donc ces fubftitutions dans la valeur de R^2 de l'Art. XLVI., & rejettant tous les termes qui contiendroient des puiffances de i plus hautes que la feconde, on aura

$$R^2 = 1 + m\,(1 - i\,a\,L) + i\,m\,(m+1)\,a\,L\,\frac{1 - i\,a\,L}{1 + m\,(1 - iaL)}$$
$$+ \frac{i^2\,a^2\,L^2}{(1+m)^2}\left(\frac{5\,m\,(m+1)\,(m+2)}{8} - \frac{17\,m^2\,(m+1)}{24}\right)$$
$$- \frac{i^2\,a^2\,H}{1+m}\left(\frac{m\,(m+1)\,(m+2)}{8} - \frac{5\,m^2\,(m+1)}{24}\right)$$
$$= 1 + m + \frac{i^2\,m\,(3-m)\,a^2}{12\,(1+m)}\,[\,L^2 - (1+m)\,H\,],$$

d' où l' on tire

$$R = \sqrt{(1+m)} + \frac{i^2 m\,(3-m)\,a^2}{24\,(1+m)^{\frac{3}{2}}}\,[\,L^2 - (1+m)\,H\,]$$

ce qui donnera pour la diftance d' une apfide à l' autre

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{(1+m)}} - \frac{i^2\,m\,(3-m)\,a^2}{24\,(1+m)^{\frac{5}{2}}}\,[\,L^2 - (1+m)\,H\,]\right\} 180^\circ.$$

XLIX. Suppofons maintenant que l' on ait à intégrer l' équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + i(My^2 + M'\frac{dy^2}{dt^2}) + i^2(Ny^3 + N'y\frac{dy^2}{dt^2}) + \&c. = 0$$

on pourra faire difparoitre la quantité $\frac{dy^2}{dt^2}$ de la maniére fuivante.

Qu'on multiplie l'équation par $2\,dy$, & qu'on en prenne l'intégrale, en négligeant les termes affectés de i^2, on aura

$$\frac{dy^2}{dt^2} + K^2y^2 + 2Ly + H + i(\frac{2M}{3}y^3 + 2M'\int\frac{dy^2}{dt^2}dy) = 0.$$

Or $\int\frac{dy^2}{dt^2}dy = y\frac{dy^2}{dt^2} - 2\int y\,dy\frac{d^2y}{dt^2} =$ (en mettant au lieu de $\frac{dy^2}{dt^2}$ & de $\frac{d^2y}{dt^2}$ leurs valeurs approchées $-K^2y^2 - 2Ly - H$, & $-K^2y - L$) $-\frac{K^2}{3}y^3 - Ly^2 - Hy$; donc on aura

$$\frac{dy^2}{dt^2} + (K^2 - 2iLM')y^2 + (2L - 2iHM')y + H + i(\frac{2M}{3} - \frac{2K^2M'}{3})y^3 = 0.$$

Subftituant donc cette valeur de $\frac{dy^2}{dt^2}$ dans l'équation propofée, elle deviendra

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [K^2 - 2iLM' + i^2H(2M'^2 - N')]y + L - iHM' + i(M - K^2M' + 2iLM'^2)y^2 + i^2(N - K^2N' - \frac{2MM'}{3} + \frac{2K^2M'^2}{3})y^3 = 0,$$

laquelle eft, comme l'on voit, dans le cas de l' équation (A).

Par cette méthode on pourra faire disparoitre toutes les puissances paires de $\frac{dy}{dt}$ qui se trouveront dans l' équation proposée. A l'égard des puissances impaires de $\frac{dy}{dt}$, il est facile de voir qu'elles donneront dans la valeur de y des arcs de cercle; d' où il s'ensuit que la solution ne pourra avoir lieu que tant que t ne sera pas fort grande, & qu'ainsi il sera permis de se servir de telle méthode d' approximation qu'on voudra. Cependant comme il peut être quelquefois important de connoitre la vraie forme de la valeur de y, qu'on chercheroit vainement par les méthodes ordinaires, je vais donner le moyen d'y parvenir.

L. Soit en général l' équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Ky + K'\frac{dy}{dt} + L + i\left(My^2 + M'y\frac{dy}{dt} + M''\frac{dy^2}{dt^2}\right) + i^2\left(Ny^3 + N'y^2\frac{dy}{dt} + N''y\frac{dy^2}{dt^2} + N'''\frac{dy^3}{dt^3}\right) + \&c. = 0.$$

On fera $\frac{dy}{dt} = z$, & l'on aura

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Ky + K'z + L + i(My^2 + M'yz + M''z^2) + i^2(Ny^3 + N'y^2z + N''yz^2 + N'''z^3) + \&c. = 0.$$

On différentiera cette équation, & l' on y substituera ensuite, au lieu de $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, au lieu $\frac{dy}{dt}$, z, & à lieu de $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ou plutôt sa valeur en y & z; de cette manière on aura une nouvelle équation en z de la forme suivante

$$\frac{d^2z}{dt^2} + kz + k'y + l + i(my^2 + m'yz + m''z^2) + i^2(ny^3 + n'y^2z + n''yz^2 + n'''z^3) + \&c. = 0.$$

Toute la difficulté ſe réduira donc à intégrer ces deux équations; ſur quoi voyés ci-après l' Art. LII.

LI. Si l' équation propoſée étoit du quatriéme ordre, on la réduiroit à deux du ſecond, en faiſant $\frac{d^2y}{dt^2} - z = 0$, & ſubſtituant enſuite z au lieu de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dz}{dt}$ au lieu de $\frac{d^3y}{dt^3}$, & $\frac{d^2z}{dt^2}$ au lieu de $\frac{d^4y}{dt^4}$.

Mais ſi la propoſée étoit du troiſiéme ordre, alors il faudroit la réduire d' abord au quatriéme par la différentiation, & enſuite à deux du ſecond par la ſuppoſition de $\frac{d^2y}{dt^2} - z = 0$; & ainſi du reſte.

De l' intégration des équations.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + F + Gy + Hz + i(Ky^2 + Lyz + Mz^2) + i^2(Ny^3 + Py^2z + Qyz^2 + Rz^3) + \&c. = 0 \quad . \quad . \quad (L)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + f + gy + hz + i(ky^2 + lyz + mz^2) + i^2(ny^3 + py^2z + qyz^2 + rz^3) + \&c. = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (M)$$

LII. Nous commencerons par chercher la valeur des quantités $\frac{dy^2}{dt^2}$, $\frac{dz^2}{dt^2}$, & $\frac{dydz}{dt^2}$ qui entrent dans les différentielles ſecondes de y^2, z^2, yz &c.; or, comme nous nous propoſons ſeulement de pouſſer l' approximation juſqu'aux quantités de l' ordre de i^2, il ſuffira d' avoir égard, dans les valeurs dont il s'agit, aux termes de l'ordre de i, parce que les quantités y^2, z^2, yz &c. ſont déja elles mémes multipliées par i dans les équations propoſées.

Je multiplie d' abord l' équation (L) par $2\,dy$, & j'en prends l'intégrale; j'ai en négligeant les termes affectés de i^2,

$$\frac{dy^2}{dt^2} + A + 2Fy + Gy^2 + 2H\int z\,dy + i\left(\frac{2K}{3}y^3 + 2L\int yz\,dy + 2M\int z^2\,dy\right) = 0 \quad \ldots\ldots (N)$$

Je multiplie de même l' équation (M) par $2dz$ & j' ai, aprés l' intégration,

$$\frac{dz^2}{dt^2} + B + 2fz + 2g\int y\,dz + hz^2 + i\left(2k\int y^2 dz + 2l\int yz\,dz + \frac{2m}{3}z^3\right) = 0,$$

ou bien, en mettant $yz - \int z\,dy$ au lieu de $\int y\,dz$, $y^2 z - 2\int yz\,dy$ au lieu de $\int y^2 dz$, & $\frac{1}{2}yz^2 - \frac{1}{2}\int z^2\,dy$ au lieu de $\int yz\,dz$

$$\frac{dz^2}{dt^2} + B + 2fz + 2gyz + hz^2 - 2g\int z\,dy + i\left(2ky^2 z + lyz^2 + \frac{2m}{3}z^3 - 4k\int yz\,dy - l\int z^2 dy\right) = 0 \quad \ldots\ldots (O)$$

Enfin multipliant l' équation (L) par dz & l' équation (M) par dy, les ajoutant ensemble, & intégrant on aura

$$\frac{dy\,dz}{dt^2} + C + fy + Fz + \frac{g}{2}y^2 + Gyz + \frac{H}{2}z^2 + (h - G)\int z\,dy + i\left(\frac{k}{3}y^3 + Ky^2 z + \frac{L}{2}yz^2 + \frac{M}{3}z^3 + (l - 2K)\int yz\,dy + \left(m - \frac{L}{2}\right)\int z^2 dy\right) = 0 \quad \ldots\ldots (P)$$

Pour déterminer les conſtantes A, B, C, on ſuppoſera que, quand $t = 0$, on ait $y = \gamma$, $z = \delta$, $\frac{dy}{dt} = \varepsilon$, $\frac{dz}{dt} = \eta$, $\int z\,dy = \Gamma$, $\int yz\,dy = \Delta$, & $\int z^2 dy = \Lambda$, & l' on aura

$$A = -\varepsilon^2 - 2F\gamma - G\gamma^2 - 2H\Gamma - i\left(\frac{2K}{3}\gamma^3 + 2L\Delta + 2M\Lambda\right),$$

$B = -\eta^2 - 2f\delta - 2g\gamma\delta - h\delta^2 + 2g\Gamma - i(2k\gamma^2\delta$
$+ l\gamma\delta^2 + \frac{2m}{3}\delta^3 - 4k\Delta - l\Lambda)$, &

$C = -\epsilon\eta - f\gamma - F\delta - \frac{g}{2}\gamma^2 - G\gamma\delta - \frac{H}{2}\delta^2 -$
$(h - G)\Gamma - i[\frac{k}{3}\gamma^3 + K\gamma^2\delta + \frac{L}{2}\gamma\delta^2 + \frac{M}{3}\delta^3 +$
$(l - 2K)\Delta + (m - \frac{L}{2})\Delta]$.

Cela posé, je fais

$$y^2 = u,\ yz = u1,\ z^2 = u2,\ \int z\,dy = u3,$$
$$y^3 = v,\ y^2z = v1,\ yz^2 = v2,\ z^3 = v3,$$
$$\int yz\,dy = v4,\ \int z^2\,dy = v5,\ y\int z\,dy = v6,\ z\int z\,dy = v7;$$

j' aurai, au lieu des équations (L) & (M), ces deux-ci

$$\frac{d^2y}{dt^2} + F + Gy + Hz + i(Ku + Lu1 + Mu2) +$$
$$i^2(Nv + Pv1 + Qv2 + Rv3) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + f + gy + hz + i(ku + lu1 + mu2) +$$
$$i^2(nv + pv1 + qv2 + rv3) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Maintenant on a 1.° $\frac{d^2u}{dt^2} = 2y\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy^2}{dt^2}$; donc $2y$ (L) + 2 (N) donnera, en négligeant les termes de l' ordre de i,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2A + 6Fy + 4Gy^2 + 2Hyz + 4H\int z\,dy$$
$$+ i(\frac{10K}{3}y^3 + 2Ly^2z + 2Myz^2 + 4L\int yz\,dy +$$
$$4M\int z^2\,dy) = 0,$$

& en faisant les substitutions précédentes,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2A + 6Fy + 4Gu + 2Hu1 + 4Hu3$$
$$+ i(\frac{10K}{3}v + 2Lv1 + 2Mv2 + 4Lv4 + 4Mv5)$$
$$= 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

2.° $\frac{d^2 u1}{dt^2} = z \frac{d^2y}{dt^2} + y \frac{d^2 z}{dt^2} + 2 \frac{dy\,dz}{dt^2}$; donc z (L) + y (M) + 2 (P) donnera

$$\frac{d^2 u1}{dt^2} + 2C + 3fy + 3Fz + 2gu + (3G + h)u1 + 2Hu2 + 2(h - G)u3 + i\left\{\frac{5k}{3}v + (3K + l)v1 + (2L + m)v2 + \frac{5M}{3}v3 + (2l - 4K)v4 + (2m - L)v5\right\} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

3.° $\frac{d^2 u2}{dt^2} = 2z \frac{d^2 z}{dt^2} + 2 \frac{dz^2}{dt^2}$; donc $2z$ (M) + 2 (O) donnera

$$\frac{d^2 u2}{dt^2} + 2B + 6fz + 6gu1 + 4hu2 - 4gu3 + i(6kv1 + 4lv2 + \frac{10m}{3}v3 - 8kv4 - 2lv5) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

4.° $\frac{d^2 u3}{dt^2} = z \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy\,dz}{dt^2}$, donc z (L) + (P) donnera

$$\frac{d^2 u3}{dt^2} + C + fy + 2Fz + \frac{g}{2}u + 2Gu1 + \frac{3H}{2}u2 + (h - G)u3 + i\left\{\frac{k}{3}v + 2Kv1 + \frac{3L}{2}v2 + \frac{4M}{3}v3 + (l - 2K)v4 + (m - \frac{L}{2})v5\right\} = 0 \quad . \quad . \quad (6)$$

5.° $\frac{d^2 v}{dt^2} = 3y^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 6y \frac{dy^2}{dt^2}$, donc $3y^2$ (L) + $6y$ (N) donnera, en rejettant les termes affectés de i, à cause que la variable v est déja elle même multipliée par i^2 dans les équations (1) & (2),

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 6Ay + 15Fu + gGv + 3Hv1 + 12Hv6 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

6.° $\frac{d^2 v1}{dt^2} = 2yz\frac{d^2y}{dt^2} + y^2\frac{d^2z}{dt^2} + 2z\frac{dy^2}{dt^2} + 4y\frac{dy\,dz}{dt^2}$; donc $2yz(L) + y^2(M) + 2z(N) + 4y(P)$ donnera, en négligeant par la même raiſon que ci-devant les termes de l'ordre de i,

$\frac{d^2 v1}{dt^2} + 4Cy + 2Az + 5fu + 10Fu1 + 3gv + (8G + h)v1 + 4Hv2 + 4(h - G)v6 + 4Hv7 = 0$ . . . . (8)

7.° $\frac{d^2 v2}{dt^2} = z^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2yz\frac{d^2z}{dt^2} + 2y\frac{dz^2}{dt^2} + 4z\frac{dy\,dz}{dt^2}$, donc $z^2(L) + 2yz(M) + 2y(O) + 4z(P)$ donnera

$\frac{d^2 v2}{dt^2} + 2By + 4Cz + 10fu1 + 5Fu2 + 8gv1 + (5G + 4h)v2 + 3Hv3 - 4gv6 + 4(h - G)v7 = 0$ . . . . (9)

8.° $\frac{d^2 v3}{dt^2} = 3z^2\frac{d^2z}{dt^2} + 6z\frac{dz^2}{dt^2}$, donc $3z^2(M) + 6z(O)$ donnera

$\frac{d^2 v3}{dt^2} + 6Bz + 15fu2 + 15gv2 + ghv3 - 12gv7 = 0$ . . . . (10)

9.° $\frac{d^2 v4}{dt^2} = yz\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{dy^2}{dt^2} + y\frac{dy\,dz}{dt^2}$, donc $yz(L) + z(N) + y(P)$ donnera

$\frac{d^2 v4}{dt^2} + Cy + Az + fu + 4Fu1 + \frac{g}{2}v + 3Gv1 + \frac{3H}{2}v2 + (h - G)v6 + 2Hv7 = 0$ . . . (11)

10.° $\frac{d^2 v5}{dt^2} = z^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2z\frac{dy\,dz}{dt^2}$; donc $z^2(L) + 2z(P)$ donnera

$\frac{d^2 v5}{dt^2} + 2Cz + 2fu1 + 3Fu2 + gv1 + 3Gv2 + 2Hv3 + 2(h - G)v7 = 0$ . . . . . (12)

11.° $\frac{d^2 v6}{dt^2} = (y z + \int z\, dy) \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 z \frac{dy^2}{dt^2} + y \frac{dy\, dz}{dt^2}$;
donc $(y z + \int z\, dy) \times (L) + 2 z (N) + y (P)$ donnera
$\frac{d^2 v6}{dt^2} + C y + 2 A z + f u + 6 F u1 + F u3 + \frac{g}{2} v$
$+ 4 G v1 + \frac{3H}{2} v2 + h v6 + 5 H v7 = 0$. (13)

12.° $\frac{d^2 v7}{dt^2} = z^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{d^2 z}{dt^2} \int z\, dy + 3 z \frac{dy\, dz}{dt^2}$; donc
$z^2 (L) + (M) \int z\, dy + 3 z (P)$ donnera
$\frac{d^2 v7}{dt^2} + 3 C z + 3 f u1 + 4 F u2 + f u3 + \frac{3g}{2} v1$
$+ 4 G v2 + \frac{5H}{2} v3 + g v6 + (4h - 3G) = 0$. (14)

Ayant ainſi autant d' équations que de variables, l' intégration qui doit donner la valeur de y & de z eſt facile par la méthode de l' Art. XXVI.; de ſorte que ſi on multiplie l' équation (1) par $e^{\rho t}$, l' équation (2) par $\lambda e^{\rho t}$, l' équation (3) par $i \mu e^{\rho t}$, l' équation (4) par $i \mu 1 e^{\rho t}$, l' équation (5) par $i \mu 2 e^{\rho t}$, l' équation (6) par $i \mu 3 e^{\rho t}$, l'équation (7) par $i^2 \nu e^{\rho t}$, l'équation (8) par $i^2 \nu 1 e^{\rho t}$, l'équation (9) par $i^2 \nu 2 e^{\rho t}$, l'équation (10) par $i^2 \nu 3 e^{\rho t}$, l'équation (11) par $i^2 \nu 4 e^{\rho t}$, l'équation (12) par $i^2 \nu 5 e^{\rho t}$, l'équation (13) par $i^2 \nu 6 e^{\rho t}$, & l'équation (14) par $i^2 \nu 7 e^{\rho t}$, & qu'on achéve le reſte comme dans l'Art. XLVI. on aura, en faiſant pour abreger

$\theta = y + \lambda z + i (\mu u + \mu 1 u1 + \mu 2 u2 + \mu 3 u3)$
$+ i^2 (\nu v + \nu 1 v1 + \nu 2 v2 + \nu 3 v3 + \nu 4 v4 +$
$\nu 5 v5 + \nu 6 v6 + \nu 7 v7)$ &

$\varkappa = F + \lambda f + i (2 \mu A + 2 \mu 1 C + 2 \mu 2 B + \mu 3 C)$
on aura dis-je

$(\frac{d\theta}{dt} - \rho\theta + \frac{\varkappa}{\theta}) e^{\rho t} = \text{conſt.}$ . . . . . . (Q)

& enſuite

$\rho^2 +$

$\rho^2 + G + g\lambda + i(6F\mu + 3f\mu_1 + f\mu_3) +$
$i^2(6A\nu + 4C\nu_1 + 2B\nu_2 + C\nu_4 + C\nu_6) = 0$

$H + (\rho^2 + h)\lambda + i(3F\mu_1 + 6f\mu_2 + 2F\mu_3)$
$+ i^2(2A\nu_1 + 4G\nu_2 + 6B\nu_3 + A\nu_4 + 2C\nu_5 +$
$2A\nu_6 + 3C\nu_7) = 0$

$K + k\lambda + (\rho^2 + 4G)\mu + 2g\mu_1 + \frac{g}{2}\mu_3 +$
$i(15F\nu + 5f\nu_1 + f\nu_4 + f\nu_6) = 0$

$L + l\lambda + 2H\mu + (\rho^2 + 3G + h)\mu_1 + 6g\mu_2$
$+ 2G\mu_3 + i(10F\nu_1 + 10f\nu_2 + 4F\nu_4 + 2f\nu_5$
$+ 6F\nu_6 + 3f\nu_7) = 0$

$M + m\lambda + 2H\mu_1 + (\rho^2 + 4h)\mu_2 + \frac{3H}{2}\mu_3 +$
$i(5F\nu_2 + 15f\nu_3 + 3F\nu_5 + 4F\nu_7) = 0$
$4H\mu + 2(h - G)\mu_1 - 4g\mu_2 + (\rho^2 + h - G)\mu_3$
$+ i(F\nu_6 + f\nu_7) = 0$

$N + n\lambda + \frac{10K}{3}\mu + \frac{5k}{3}\mu_1 + \frac{k}{3}\mu_3 + (\rho^2 + 9G)\nu$
$+ 3g\nu_1 + \frac{g}{2}\nu_4 + \frac{g}{2}\nu_6 = 0$

$P + p\lambda + 2L\mu + (3K + l)\mu_1 + 6k\mu_2 + 2K\mu_3$
$+ 3H\nu + (\rho^2 + 8G + h)\nu_1 + 8g\nu_2 + 3G\nu_4 + g\nu_5$
$+ 4G\nu_6 + \frac{3g}{2}\nu_7 = 0$

$Q + q\lambda + 2M\mu + (2L + m)\mu_1 + 4l\mu_2 +$
$\frac{3L}{2}\mu_3 + 4H\nu_1 + (\rho^2 + 5G + 4h)\nu_2 + 15g\nu_3$
$+ \frac{3H}{2}\nu_4 + 3G\nu_5 + \frac{3H}{2}\nu_6 + 4G\nu_7 = 0$

$R + r\lambda + \frac{5M}{3}\mu_1 + \frac{10m}{3}\mu_2 + \frac{4M}{3}\mu_3 + 3H\nu_2$
$+ (\rho^2 + 9h)\nu_3 + 2H\nu_5 + \frac{5H}{2}\nu_7 = 0$

$4L\mu + (2l - 4K)\mu 1 - 8k\mu 2 + (l - 2K)\mu 3$
$+ \rho^2 \nu 4 = 0$

$4M\mu + (2m - L)\mu 1 - 2l\mu 2 + (m - \frac{L}{2})\mu 3$
$+ \rho^2 \nu 5 = 0$

$12H\nu + 4(h - G)\nu 1 - 4g\nu 2 + (h - G)\nu 4$
$+ (\rho^2 + h)\nu 6 + g\nu 7 = 0$

$4H\nu 1 + 4(h - G)\nu 2 - 12g\nu 3 + 2H\nu 4 + 2(h - G)\nu 5$
$+ h\nu 6 + (\rho^2 + 4h - 3G)\nu 7 = 0,$

équations par lesquelles on déterminera les 14 inconnues ρ, λ, μ, $\mu 1$, $\mu 2$, $\mu 3$, ν, $\nu 1$, $\nu 2$, $\nu 3$, $\nu 4$, $\nu 5$, $\nu 6$, $\nu 7$, en ayant attention de pousser les valeurs des deux premières jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2, celles des quatre suivantes jusqu'aux quantités de l'ordre de i seulement, & enfin de rejetter dans les valeurs des sept dernières toutes les quantités affectés de i.

Or je remarque 1.° que la quantité ρ ne paroissant que sous la forme quadrative, elle aura nécessairement deux valeurs, l'une positive & l'autre négative; de sorte que si on suppose que ρ désigne la racine positive, on pourra écrire partout indifféremment $+\rho$, & $-\rho$. 2.° que si on représente les deux premières équations par

$\rho^2 + G + g\lambda + i\alpha = 0$ & $H + (\rho^2 + h)\lambda + i\beta = 0$,

on aura, en éliminant λ,

$$\rho^4 + (G + h + i\alpha)\rho^2 + Gh - Hg + i(\alpha h - \beta g) = 0 \quad \text{(R)}$$

d'où l'on tirera deux valeurs de ρ^2.

Soit maintenant, lorsque $t = 0$, $\theta = D$, & $\frac{d\theta}{dt} = E$; c'est-à-dire

$D = \gamma + \lambda\delta + i(\mu\gamma^2 + \mu 1\gamma\delta + \mu 2\delta^2 + \mu 3\Gamma)$
$+ i^2(\nu\gamma^3 + \nu 1\gamma^2\delta + \nu 2\gamma\delta^2 + \nu 3\delta^3 + \nu 4\Delta +$
$\nu 5\Lambda + \nu 6\gamma\Gamma + \nu 7\delta\Gamma)$ &

$E = \varepsilon + \lambda\eta + i[2\mu\gamma\varepsilon + \mu 1(\delta\varepsilon + \gamma\eta) + 2\mu 2\delta\eta$

$+ \mu 3 \delta \varepsilon] + i^2 [3 \nu \gamma^2 \delta + \nu 1 (2 \gamma \delta \varepsilon + \gamma^2 \eta) + \nu 2 (\delta^2 \varepsilon + 2 \gamma \delta \eta) + \nu 3 \delta^2 \eta + \nu 4 \gamma \delta \varepsilon + \nu 5 \delta^2 \varepsilon + \nu 6 (\Gamma \varepsilon + \gamma^2 \delta \varepsilon) + \nu 7 (\Gamma \eta + \gamma \delta^2 \varepsilon)$; l'équation (Q) donnera, en divisant par $e^{\rho t}$,

$$\frac{d\theta}{dt} - \rho\theta + \frac{x}{\rho} = \left(E - \rho D + \frac{x}{\rho}\right) e^{-\rho t},$$

& prenant la quantité ρ en $-\rho$,

$$\frac{d\theta}{dt} + \rho\theta - \frac{x}{\rho} = \left(E + \rho D - \frac{x}{\rho}\right) e^{\rho t},$$

d'où l'on tire

$$\theta = \frac{x}{\rho^2} + \left(D - \frac{x}{\rho^2}\right) \frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2} + E\, \frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}$$

ou bien

$$\theta = \frac{x}{\rho^2} + \left(D - \frac{x}{\rho^2}\right) \text{cos. } t\sqrt{-\rho^2} + \frac{E}{\sqrt{-\rho^2}} \text{ sin. } t\sqrt{-\rho^2}.$$

Soient maintenant ρ'^2 & ρ''^2 les deux racines de l'équation (R), & θ', θ'', λ', λ'', μ', μ'' &c. les valeurs correspondantes de θ, λ, μ &c.; on aura, en remettant au lieu de u, $u1$, $u2$ &c. leurs valeurs y^2, yz, z^2 &c., ces deux équations

$$y + \lambda' z + i (\mu' y^2 + \mu' 1 yz + \mu' 2 z^2 + \mu' 3 \int z\, dy) + i^2 (\nu' y^3 + \nu' 1 y^2 z + \nu' 2 y z^2 + \nu' 3 z^3 + \nu' 4 \int yz\, dy + \nu' 5 \int z^2 dy + \nu' 6 y \int z\, dy + \nu' 7 z \int z\, dy) = \theta',$$

$$y + \lambda'' z + i (\mu'' y^2 + \mu'' 1 yz + \mu'' 2 z^2 + \mu'' 3 \int z\, dy) + i^2 (\nu'' y^3 + \nu'' 1 y^2 z + \nu'' 2 y z^2 + \nu'' 3 z^3 + \nu'' 4 \int yz\, dy + \nu'' 5 \int z^2 dy + \nu'' 6 y \int z\, dy + \nu'' 7 z \int z\, dy) = \theta'',$$

d'où l'on tirera par approximation les valeurs de y & de z.

Il est évident que pour que les valeurs de y & de z ne contiennent que des *sinus* & des *cosinus*, il faut que les racines de l'équation (R) soient toutes deux réelles & négatives; par conséquent il faut 1.° que $(G + h + i\alpha)^2 > 4 [Gh - Hg + i (\alpha h - \beta g)]$, 2.° que $G + h + i\alpha > 0$, & $Gh - Hg + i (\alpha h - \beta g) > 0$. Si ces trois conditions n'ont point lieu à la fois, alors les

valeurs de y & de z contiendront des exponentielles réelles, & par conséquent la solution ne sera bonne que tant que t ne sera pas fort grande.

On pourroit ajouter que les expressions de y & de z renfermeroient l'angle t, si les deux valeurs de ρ^2 étoient égales; car alors, supposant $\rho'' = \rho' + \omega$, & regardant ω comme une quantité évanouissante, on trouveroit que la seconde des deux équations ci-dessus se réduiroit à celle-ci

$$\frac{d\lambda'}{d\rho'} z + i\left\{\frac{d\mu'}{d\rho'} y^2 + \frac{d\mu'1}{d\rho'} yz + \frac{d\mu'2}{d\rho'} z^2 + \frac{d\mu'3}{d\rho'} \int z dy\right\}$$
$$+ i^2 \left\{\frac{d\nu'}{d\rho'} y^3 + \frac{d\nu'1}{d\rho'} y^2 z + \frac{d\nu'2}{d\rho'} y z^2 + \frac{d\nu'3}{d\rho'} z^3 + \right.$$
$$\left. \frac{d\nu'4}{d\rho'} \int yz dy + \frac{d\nu'5}{d\rho'} \int z^2 dy + \frac{d\nu'6}{d\rho'} y \int z dy + \frac{d\nu'7}{d\rho'} z \int dy \right\}$$
$$= \frac{d\theta'}{d\rho'},$$

dans laquelle la quantité $\frac{d\theta'}{d\rho'}$ contient nécessairement des termes multipliées par l'angle t. Mais comme l'équation (R) n'est qu'approchée, quand il arriveroit que $(G + h + i\alpha)^2 = 4[Gh - Hg + i(\alpha h - \beta g)]$, ce qui est la condition des racines égales, on n'en pourroit conclure autre chose, si non que les deux valeurs de ρ^2 seroient égales aux quantités de l'ordre de i^3 près, & que par conséquent il faudroit pousser l'approximation jusqu'aux quantités de ce même ordre. Ce ne seroit qu'après avoir poussé l'approximation fort loin & avoir reconnu que les valeurs de ρ sont toujours égales, qu'on pourroit à la rigueur faire usage de l'équation que nous venons de donner.

LIII. On voit aisément que la méthode précédente est générale pour tel nombre d'équations qu'on voudra, pourvû que ces équations soient analogues aux équations (L) & (M) c'est-à-dire que les produits de deux di-

menſions ſoient affectés de i, ceux de trois ſoient affectés de i^2, & ainſi de ſuite.

Cette méthode feroit ſurtout utile pour déterminer auſſi près qu'on voudroit le mouvement d'un ſiſtème quelconque de corps qui agiroient les uns ſur les autres, & qui ne feroient que des très-petites oſcillations autour de leurs points d'équilibre. Car nommant $i y$, $i z$ &c. les eſpaces parcourus par ces corps dans leurs oſcillations, on trouveroit des équations de la forme de celles dont je viens de parler ; au reſte nous avons déja donné (*Art. XXX.*) la ſolution générale de ce problême pour le cas des oſcillations infiniment petites.

LIV. Si les équations propoſées contenoient des termes de la forme $i \int z\, dy$, $i^2 \int y z\, dy$, $i^2 \int z^2\, dy$, $i^2 y \int z\, dy$, $i^2 z \int z\, dy$, l'intégration n'auroit aucune difficulté de plus ; il faudroit ſeulement avoir attention de changer les expreſſions $\int dy \int z\, dy$ & $\int dz \int z\, dy$ qui ſe trouveroient dans les équations (N), (O), (P) en leurs équivalentes $y \int z\, dy - \int y z\, dy$, & $z \int z\, dy - \int z^2\, dy$.

LV. Si elles contenoient des termes de la forme $i \frac{dy^2}{dt^2}$, $i \frac{dy\, dz}{dt^2}$, $i \frac{dz^2}{dt^2}$, $i^2 y \frac{dy^2}{dt^2}$, $i^2 y \frac{dy\, dz}{dt^2}$ &c. on les feroit diſparoitre par des procédés ſemblables à ceux que nous avons ſuivis dans l' Art. XLIX. Il en feroit de même de tous les termes qui contiendroient des produits de $\frac{dy}{dt}$ & $\frac{dz}{dt}$ de dimenſions paires ; mais s'il ſe trouvoit des produits de dimenſions impaires de ces mêmes quantités, alors on feroit chacune d'elles égale à une nouvelle variable, & on acheveroit le reſte comme dans l'Art. L.

LVI. Enfin ſi l'on avoit des équations du troiſiéme ordre & au delà, on les réduiroit toujours au ſecond par la méthode de l'Art. LI.

De l' intégration de l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + i\left(My\,cof.\,Ht + N\frac{dy}{dt}\,fin.\,Ht\right) = T\ (S)$$

dans laquelle T *est une fonction quelconque de* t.

LVII. Je remarque d' abord que si T étoit $= o$, l'équation seroit dans le cas de l' Art. LV., car il n' y auroit qu'à faire cos. $Ht = z$, ce qui donneroit sin. $Ht = -\frac{dz}{Hdt}$ & $\frac{d^2z}{dt^2} + H^2z = o$. Or puisque l'indéterminée y ne n' y passe pas le premier dégré, il est clair qu'on pourra faire disparoitre le terme tout connu T par la méthode de l' Art. I. En effet si on multiplie l'équation proposée par $z\,dt$, & qu'on pratique les autres opérations que prescrit cette méthode, on aura les deux équations suivantes

$$\frac{d^2z}{dt^2} + K^2z + i\left[\left(M\ \text{cof.}\ Ht - \frac{d.N\ \text{fin.}\ Ht}{dt}\right)z - N\ \text{fin.}\ Ht\frac{dz}{dt}\right] = o, \ \& \ \frac{dy}{dt}z - y\frac{dz}{dt} = \int Tz\,dt,$$

dont la première est réductible au cas de l'Art. LV., & dont l'autre étant intégrée donnera $y = \int\frac{dt}{z^2}\int Tz\,dt$.

Au reste ces sortes d' équations peuvent encore s' intégrer par une méthode particulière & fort simple que je vais exposer.

Je fais y cos. $Ht = u$, y cos. $2Ht = v$ &c. & y sin. $Ht = U$, y sin. $2Ht = V$ &c.; ce qui me donne

$$\frac{dy}{dt}\ \text{cof.}\ Ht = \frac{du}{dt} + HU,\ \frac{dy}{dt}\ \text{cof.}\ 2Ht = \frac{dv}{dt} + 2HV\ \&c.$$

$$\frac{dy}{dt}\ \text{fin.}\ Ht = \frac{dU}{dt} - Hu,\ \frac{dy}{dt}\ \text{fin.}\ 2Ht = \frac{dV}{dt} - 2Hv\ \&c.$$

& ensuite

$$\frac{d^2y}{dt^2}\cos. Ht = \frac{d^2u}{dt^2} + 2H\frac{dU}{dt} - H^2u$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\cos. 2Ht = \frac{d^2v}{dt^2} + 4H\frac{dV}{dt} - 4H^2v$$

&c.

$$\frac{d^2y}{dt^2}\sin. Ht = \frac{d^2U}{dt^2} - 2H\frac{du}{dt} - H^2U$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\sin. 2Ht = \frac{d^2V}{dt^2} - 4H\frac{dv}{dt} - 4H^2V$$

&c.

Cela posé, j'aurai d' abord au lieu de l' équation (S) celle-ci

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + i\left[(M - HN)u + N\frac{dU}{dt}\right] = T \quad (1)$$

De plus la même équation (S) étant multipliée successivement par cof. Ht & par fin. Ht donnera

$$\frac{d^2y}{dt^2}\cos. Ht + K^2y\cos. Ht + i\left[My\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. Ht\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}N\frac{dy}{dt}\sin. 2Ht\right] = T\cos. Ht, \ \&$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\sin. Ht + K^2y\sin. Ht + i\left[\frac{1}{2}My\sin. 2Ht + \right.$$

$$\left. N\frac{dy}{dt}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos. 2Ht\right)\right] = T\sin. Ht,$$

c' est-à-dire, en faifant les fubftitutions ci-deffus

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2H\frac{dU}{dt} + (K^2 - H^2)u + i\left[\frac{M}{2}y + \left(\frac{M}{2} - NH\right)v\right.$$

$$\left. + \frac{N}{2} \times \frac{dV}{dt}\right] = T\cos. Ht \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} - 2H\frac{du}{dt} + (K^2 - H^2)U + i\left[\left(\frac{M}{2} - NH\right)V - \right.$$

$$\left. \frac{N}{2} \times \frac{dv}{dt}\right] = T\sin. Ht \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

Si on vouloit n'avoir égard, dans la valeur de y, qu'aux quantité de l'ordre de i, on négligeroit dans les valeurs de u & de U, & par conséquent aussi dans les équations (2) & (3) tous les termes affectés de i, moyennant quoi ces équations ne contiendroient plus que les trois variables y, u & U, de sorte qu'avec l'équation (1) elles suffiroient pour résoudre le problême; mais si on veut pousser l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2, comme nous l'avons fait dans les problêmes précédens, alors on conservera tous les termes des équations (2) & (3), & on multipliera de nouveau l'équation (S) par cos. $2Ht$, & par sin. $2Ht$; ce qui donnera, après les substitutions, deux équations en v & en V, dans lesquelles on pourra négliger les termes affectés de i, parceque les quantités v & V sont déja elles-mêmes multipliées par i dans les équations (2) & (3); ainsi l'on aura

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 4H\frac{dV}{dt} + (K^2 - 4H^2)v = T \text{ cos. } 2Ht \quad (4)$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} - 4H\frac{dv}{dt} + (K^2 - 4H^2)V = T \text{ sin. } 2Ht \quad (5)$$

& l'intégration de l'équation proposée sera réduite à celle de cinq équations (1), (2), (3), (4), & (5), lesquelles sont, comme l'on voit, dans le cas de l'Art. XXIX.

Ayant donc multiplié la première de ces équations par $\lambda e^{\rho t} dt$, la seconde par $\mu e^{\rho t} dt$, la troisiéme par $M e^{\rho t} dt$, la quatriéme par $\nu e^{\rho t} dt$, & la cinquiéme par $N e^{\rho t} dt$, on les ajoutera ensemble, & on en prendra l'intégrale, en faisant disparoitre de dessous le signe $\int$ les différences des variables y, u, U &c.; après-quoi on chassera les expressions intégrales $\int y e^{\rho t} dt$, $\int u e^{\rho t} dt$, $\int U e^{\rho t} dt$ &c. en égalant à zéro leurs coéficiens, ce qui donnera

$$(\rho^2 + K^2)\lambda + i\left(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}M\rho\right) = 0$$

(1) . . . .

i (M

$i(M - NH)\lambda + (\rho^2 + K^2 - H^2)\mu + 2H\mathrm{M}\rho = 0$

$- iN\lambda\rho - 2H\mu\rho + (\rho^2 + K^2 - H^2)\mathrm{M} = 0$

$i(\frac{M}{2} - NH)\mu + \frac{iN}{2}\mathrm{M}\rho + (\rho^2 + K^2 - 4H^2)\nu + 4H\mathrm{N}\rho = 0$

$-\frac{iN}{2}\mu\rho + i(\frac{M}{2} - NH)\mathrm{M} - 4H\nu\rho + (\rho^2 + K^2 - 4H^2)\mathrm{N} = 0.$

De cette manière on aura l' équation intégrale

$\left\{\lambda\frac{dy}{dt} + \mu\frac{du}{dt} + \mathrm{M}\frac{dU}{dt} + \nu\frac{dv}{dt} + \mathrm{N}\frac{dV}{dt} + (-\lambda\rho + \frac{iN}{2}\mathrm{M})y + (-\mu\rho - 2H\mathrm{M})u + (iN\lambda + 2H\mu - \mathrm{M}\rho)U + (-\frac{iN}{2}\mathrm{M} - \nu\rho - 4H\mathrm{N})v + (\frac{iN}{2}\mu + 4H\nu - \mathrm{N}\rho)V\right\}e^{\rho t} = \int T(\lambda + \mu \text{ cof. } Ht + \mathrm{M} \text{ fin. } Ht + \nu \text{ cof. } 2Ht + \mathrm{N} \text{ fin. } 2Ht)e^{\rho t}dt.$

Soit $\rho^2 = -R^2$, de forte que $\rho = R\sqrt{-1}$, & $\mu = i\alpha\lambda$, $\nu = i^2\beta\lambda$, $\mathrm{M} = i\mathrm{A}\rho\lambda$, $\mathrm{N} = i^2\mathrm{B}\rho\lambda$, & l' on aura premiérement

$-R^2 + K^2 + i^2(\frac{M}{2}\alpha + \frac{N}{2}R^2\alpha) = 0$

$M - NH + (-R^2 + K^2 - H^2)\alpha - 2HR^2\mathrm{A} = 0$

$-N - 2H\alpha + (-R^2 + K^2 - H^2)\mathrm{A} = 0$

$(\frac{M}{2} - NH)\alpha - \frac{N}{2}R^2\mathrm{A} + (-R^2 + K^2 - 4H^2)\beta - 4HR^2\mathrm{B} = 0$

$-\frac{N}{2}\alpha + (\frac{M}{2} - NH)\mathrm{A} - 4H\beta + (-R^2 + K^2 - 4H^2)\mathrm{B} = 0,$

d' où l' on tire

$$R^2 = \frac{K^2 + \frac{1}{2} i^2 M_\infty}{1 - \frac{1}{2} i^2 N A}$$

$$\alpha = \frac{(M - NH)(R^2 - K^2 + H^2) + 2 NHR^2}{(R^2 - K^2 + H^2)^2 - 4 H^2 R^2}$$

$$A = \frac{N(R^2 - K^2 + H^2) + 2(M - NH)H}{(R^2 - K^2 + H^2)^2 - 4 H^2 R^2}$$

$$\beta = \frac{(\frac{1}{2} M - NH)(R^2 - K^2 + 4 H^2) + 2 NHR^2}{(R^2 - K^2 + 4 H^2)^2 - 16 H^2 R^2}\,\alpha$$

$$- \frac{\frac{1}{2} N(R^2 - K^2 + 4 H^2) R^2 + 4(\frac{1}{2} M - NH) HR^2}{(R^2 - K^2 + 4 H^2)^2 - 16 H^2 R^2}\,A$$

$$B = \frac{(\frac{1}{2} M - NH)(R^2 - K^2 + 4 H^2) + 2 NH R^2}{(R^2 - K^2 + 4 H^2)^2 - 16 H^2 R^2}\,A$$

$$- \frac{\frac{1}{2} N(R^2 - K^2 + 4 H^2) + 4(\frac{1}{2} M - NH) H}{(R^2 - K^2 + 4 H^2)^2 - 16 H^2 R^2}\,\alpha$$

Et ensuite

$$\Big\{ \frac{dy}{dt} + i\alpha \frac{du}{dt} + i(N + 2 H\alpha + R^2 A) U$$

$$+ i^2 \beta \frac{dv}{dt} + i^2 (\frac{N}{2}\alpha + 4 H\beta + R^2 B) V$$

$$- [(1 - \frac{iN}{2} A) y + i(\alpha + 2 HA) u - i A \frac{dU}{dt}$$

$$+ i^2 (\frac{N}{2} A + \beta + 4 HB) v - i^2 B \frac{dV}{dt}] R\sqrt{-1} \Big\} e^{Rt\sqrt{-1}}$$

$$= \int T \, [1 + i\alpha \cos. Ht + i^2 \beta \cos. 2 Ht + (i A \sin. Ht + i^2 B \sin. 2 Ht) R\sqrt{-1}] e^{Rt\sqrt{-1}} dt;$$

ou divisant par $e^{Rt\sqrt{-1}}$, & changeant les exponentielles imaginaires en *sinus* & *cosinus*,

$$\frac{dy}{dt} + i\alpha\frac{du}{dt} + i(N + 2H\alpha + R^2 \mathrm{A})U$$
$$+ i^2\beta\frac{dv}{dt} + i^2(\frac{N}{2}\alpha + 4H\beta + R^2\mathrm{B})V$$
$$-[(1 - \frac{iN}{2}\mathrm{A})y + i(\alpha + 2H\mathrm{A})u - i\mathrm{A}\frac{dU}{dt}$$
$$+ i^2(\frac{N}{2}\mathrm{A} + \beta + 4H\mathrm{B})v - i^2\mathrm{B}\frac{dV}{dt}]R\sqrt{-1}$$
$$= \text{cof. } Rt \int T[(1 + i\alpha \text{ cof. } Ht + i^2\beta \text{ cof. } 2Ht) \text{ cof. } Rt$$
$$- i(\mathrm{A} \text{ fin. } Ht + i\mathrm{B} \text{ fin. } 2Ht) R \text{ fin. } Rt]\, dt$$
$$+ \text{fin. } Rt \int T[(1 + i\alpha \text{ cof. } Ht + i^2\beta \text{ cof. } 2Ht) \text{ fin. } Rt$$
$$+ i(\mathrm{A} \text{ fin. } Ht + i\mathrm{B} \text{ fin. } 2Ht) R \text{ cof. } Rt]\, dt$$
$$- \text{fin. } Rt \int T[(1 + i\alpha \text{ cof. } Ht + i^2\beta \text{ cof. } 2Ht) \text{ cof. } Rt$$
$$- i(\mathrm{A} \text{ fin. } Ht + i\mathrm{B} \text{ fin. } 2Ht) R \text{ fin. } Rt]\, dt \cdot \sqrt{-1}$$
$$+ \text{cof. } Rt \int T[(1 + i\alpha \text{ cof. } Ht + i^2\beta \text{ cof. } 2Ht) \text{ fin. } Rt$$
$$+ i(\mathrm{A} \text{ fin. } Ht + i\mathrm{B} \text{ fin. } 2Ht) R \text{ cof. } Rt]\, dt \cdot \sqrt{-1}.$$

Donc ſi on remet pour u, U, v, & V leurs valeurs, & qu'on compare les imaginaires avec les imaginaires, & les réelles avec les réelles, on aura

$$(1 - \frac{iN}{2}\mathrm{A} + i(\alpha + H\mathrm{A}) \text{ cof. } Ht + i^2(\frac{N}{2}\mathrm{A} + \beta +$$
$$2H\mathrm{B}) \text{ cof. } 2Ht]y - i(\mathrm{A} \text{ fin. } Ht + i\mathrm{B} \text{ fin. } 2Ht)\frac{dy}{dt}$$
$$= \text{fin. } Rt \int T[(1 + i\alpha \text{ cof. } Ht + i^2\beta \text{ cof. } 2Ht)\frac{\text{cof. } Rt}{R}$$
$$- i(\mathrm{A} \text{ fin. } Ht + i\mathrm{B} \text{ fin. } 2Ht) \text{ fin. } Rt]\, dt$$
$$- \text{cof. } Rt \int T[(1 + i\alpha \text{ cof. } Ht + i^2\beta \text{ cof. } Ht)\frac{\text{fin. } Rt}{R}$$
$$+ i(\mathrm{A} \text{ fin. } Ht + i\mathrm{B} \text{ fin. } 2Ht) \text{ cof. } Rt]\, dt,$$

& $(1 + i\alpha \text{ cof. } Ht + i^2\beta \text{ cof. } 2Ht)\frac{dy}{dt} + i[(N +$
$H\alpha + R^2\mathrm{A}) \text{ fin. } Ht + (\frac{N}{2}\alpha + 2H\beta + R^2\mathrm{B}) \text{ fin. } 2Ht]y$

$= \text{cos}.\, Rt \int T\,[(1 + i\alpha\, \text{cos}.\, Ht + i^2\beta\, \text{cos}.\, 2Ht)\, \text{cos}.\, Rt$
$- i\,(A\, \text{sin}.\, Ht + i\, B\, \text{sin}.\, 2Ht)\, R\, \text{sin}.\, Rt\,]\, dt$
$+ \text{sin}.\, Rt \int T\,[\,(1 + i\alpha\, \text{cos}.\, Ht + i^2\beta\, \text{cos}.\, 2Ht)\, \text{sin}.\, Rt$
$+ i\,(A\, \text{sin}.\, Ht + i B\, \text{sin}.\, 2Ht)\, R\, \text{cos}.\, Rt\,]\, dt.$

Deux équations, à l'aide desquelles on éliminera $\frac{dy}{dt}$.

De l'intégration des équations

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + i\,(My'\, cos.\, Ht + N\frac{dy'}{dt} sin.\, Ht) = T \quad . \quad (T)$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + K'^2y' + i\,(M'y\, cos.\, Ht - N'\frac{dy}{dt} sin.\, Ht) = T' \quad . \quad (U)$$

LVIII. Soit fait, comme dans l' Art. préc.,
$y\, \text{cos}.\, Ht = u$, $y\, \text{sin}.\, Ht = U$, $y\, \text{cos}.\, 2Ht = v$;
$y\, \text{sin}.\, 2Ht = V$ &c.
& de même
$y'\, \text{cos}.\, Ht = u'$, $y'\, \text{sin}.\, Ht = U'$, $y'\, \text{cos}.\, 2Ht = v'$,
$y'\, \text{sin}.\, 2Ht = V'$ &c.
on aura

$$\frac{dy}{dt}\, \text{cos}.\, Ht = \frac{du}{dt} + HU, \quad \frac{dy}{dt}\, \text{cos}.\, 2Ht = \frac{dv}{dt} + 2HV,$$

$$\frac{dy}{dt}\, \text{sin}.\, Ht = \frac{dU}{dt} - Hu, \quad \frac{dy}{dt}\, \text{sin}.\, 2Ht = \frac{dV}{dt} - 2Hv;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\, \text{cos}.\, Ht = \frac{d^2u}{dt^2} + 2H\frac{dU}{dt} - H^2u$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\, \text{cos}.\, 2Ht = \frac{d^2v}{dt^2} + 4H\frac{dV}{dt} - 4H^2v$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\, \text{sin}.\, Ht = \frac{d^2U}{dt^2} - 2H\frac{du}{dt} - H^2U$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\, \text{sin}.\, 2Ht = \frac{d^2V}{dt^2} - 4H\frac{dv}{dt} - 4H^2V$$

& pareillement

$\frac{dy'}{dt}$ cof. $Ht = \frac{du'}{dt} + HU'$, $\frac{dy'}{dt}$ cof. $2Ht = \frac{dv'}{dt} + 2HV'$,

$\frac{dy'}{dt}$ fin. $Ht = \frac{dU'}{dt} - Hu'$, $\frac{dy'}{dt}$ fin. $2Ht = \frac{dV'}{dt} - 2Hv'$,

$$\frac{d^2y'}{dt^2} \text{ cof. } Ht = \frac{d^2u'}{dt^2} + 2H\frac{dU'}{dt} - H^2u'$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} \text{ cof. } 2Ht = \frac{d^2v'}{dt^2} + 4H\frac{dV'}{dt} - 4H^2v'$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} \text{ fin. } Ht = \frac{d^2U'}{dt^2} - 2H\frac{du'}{dt} - H^2U'$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} \text{ fin. } 2Ht = \frac{d^2V'}{dt^2} - 4H\frac{dv'}{dt} - 4H^2V'.$$

Cela posé, on aura d' abord, au lieu des équations (T) & (U), ces deux-ci

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + i[(M - HN)u' + N\frac{dU'}{dt}] = T \quad . \ (1)$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + K'^2y' + i[(M' - HN')u - N'\frac{dU}{dt}] = T' \quad . \ (2)$$

Ensuite les mêmes équations (T) & (U) étant multipliées successivement par cos. Ht & par sin. Ht donneront (après les substitutions) ces quatre autres équations

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2H\frac{dU}{dt} + (K^2 - H^2)u + i[\frac{M}{2}y' + (\frac{M}{2} - NH)v'$$
$$+ \frac{N}{2} \cdot \frac{dV'}{dt}] = T \text{ cof. } Ht \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} - 2H\frac{du}{dt} + (K^2 - H^2)U + i[(\frac{M}{2} - NH)V' + \frac{N}{2} \cdot \frac{dy'}{dt}$$
$$- \frac{N}{2} \cdot \frac{dv'}{dt}] = T \text{ fin. } Ht \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

$$\frac{d^2u'}{dt^2} + 2H\frac{dU'}{dt} + (K'^2 - H^2)u' + i[(\frac{M'}{2}y + (\frac{M'}{2} + N'H)v$$
$$- \frac{N'}{2} \cdot \frac{dV}{dt}] = T' \text{ cof. } Ht \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

$$\frac{d^2 U'}{dt^2} - 2H\frac{du'}{dt} + (K'^2 - H^2)U' + i[(\frac{M'}{2} + N'H)V - \frac{N'}{2}\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$+ \frac{N'}{2}\cdot\frac{dv}{dt}] = T' \text{ fin. } Ht \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Enfin multipliant encore l'une & l'autre des équations (T) & (U) par cof. $2Ht$ & par fin. $2Ht$, & négligeant les termes affectés de i, on aura

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 4H\frac{dV}{dt} + (K^2 - 4H^2)v = T \text{ cof. } 2Ht \quad .. (7)$$
$$\frac{d^2 V}{dt^2} - 4H\frac{dv}{dt} + (K^2 - 4H^2)V = T \text{ fin. } 2Ht \quad .. (8)$$
$$\frac{d^2 v'}{dt^2} + 4H\frac{dV'}{dt} + (K'^2 - 4H^2)v' = T' \text{ cof. } 2Ht \quad .. (9)$$
$$\frac{d^2 V'}{dt^2} - 4H\frac{dv'}{dt} + (K'^2 - 4H^2)V' = T' \text{ fin. } 2Ht \quad . (10)$$

On aura donc en tout dix inconnues & dix équations, & le problême ne dépendra plus que de l'intégration de ces équations.

En fuivant notre méthode on multipliera l'équation (1) par λ, l'équation (2) par λ', l'équation (3) par μ, l'équation (4) par M, l'équation (5) par μ', l'équation (6) par M', l'équation (7) par ν, l'équation (8) par N, l'équation (9) par ν', l'équation (10) par N'; & après les avoir ajoutées enfemble on multipliera la fomme par $e^{\rho t}dt$, & on en prendra l'intégrale; ce qui donnera (en faifant difparoitre de deffous le figne $\int$ les différences des variables y, u, V, u' &c. & égalant enfuite à zéro les coéficiens des termes où ces mèmes variables fe trouveront fous le figne)

$$\left.\begin{array}{l}(\rho^2 + K^2)\lambda + i(\frac{M'}{2}\mu' + \frac{N'}{2}M'\rho) = 0 \\ (\rho^2 + K'^2)\lambda' + i(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}M\rho) = 0\end{array}\right\} . (V)$$

$$\left.\begin{array}{l}
i(M'+N'H)\lambda'+(\rho^2+K^2-H^2)\mu+2HM\rho=0\\
iN'\lambda'\rho-2H\mu\rho+(\rho^2+K^2-H^2)M=0\\
i(M-NH)\lambda+(\rho^2+K'^2-H^2)\mu'+2HM'\rho=0\\
-iN\lambda\rho-2H\mu'\rho+(\rho^2+K'^2-H^2)M'=0\\
i(\frac{M'}{2}+N'H)\mu'-\frac{iN'}{2}M'\rho+(\rho^2+K^2-4H^2)\nu\\
+4HN\rho=0\\
\frac{iN'}{2}\mu'\rho+i(\frac{M'}{2}+N'H)M'-4H\nu\rho+(\rho^2+K^2\\
-4H^2)N=0\\
i(\frac{M}{2}-NH)\mu+\frac{iN}{2}M\rho+(\rho^2+K'^2-4H^2)\nu'\\
+4HN'\rho=0\\
-\frac{iN}{2}\mu\rho+i(\frac{M}{2}-NH)M-4H\nu'\rho+(\rho^2+K'^2\\
-4H^2)N'=0.
\end{array}\right\}\quad (V)$$

Et
$$\left\{\begin{array}{l}
\lambda\frac{dy}{dt}+\lambda'\frac{dy'}{dt}+\mu\frac{du}{dt}+M\frac{dU}{dt}+\mu'\frac{du'}{dt}\\
+M'\frac{dU'}{dt}+\nu\frac{dv}{dt}+N\frac{dV}{dt}+\nu'\frac{dv'}{dt}+N'\frac{dV'}{dt}\\
+(-\lambda\rho-\frac{iN'}{2}M')y+(-\lambda'\rho+\frac{iN}{2}M)y'\\
+(-\mu\rho-2HM)u+(-iN'\lambda'+2H\mu-M\rho)U\\
+(-\mu'\rho-2HM')u'+(iN\lambda+2H\mu'-M'\rho)U'\\
+(\frac{iN'}{2}M'-\nu\rho-4HN)v+(-\frac{iN'}{2}\mu'+4H\nu-N\rho)V\\
+(-\frac{iN}{2}M-\nu'\rho-4HN')v'+(\frac{iN}{2}\mu+4H\nu'-N'\rho)V'
\end{array}\right\}e^{\rho t}$$
$$=\int[T(\lambda+\mu\,\text{cof.}\,Ht+M\,\text{fin.}\,Ht+\nu\,\text{cof.}\,2Ht+N\,\text{fin.}\,2Ht)+T'(\lambda'+\mu'\,\text{cof.}\,Ht+M'\,\text{fin.}\,Ht+\nu'\,\text{cof.}\,2Ht+N'\,\text{fin.}\,2Ht)]e^{\rho t}dt\quad .\ .\ .\ .\ .\ (X)$$

LIX. Qu'on multiplie la quatriéme, la ſixiéme, la huitiéme, & la dixiéme des équations (V) par $\pm\sqrt{-1}$,

& qu'on les ajoute enſuite chacune à ſa précédente, on aura, au lieu des dix équations (V), les ſix ſuivantes

$$(\rho^2 + K^2)\lambda + i\left(\frac{M'}{2}\mu' + \frac{N'}{2}M'\rho\right) = 0;$$

$$(\rho^2 + K'^2)\lambda' + i\left(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}M\rho\right) = 0$$

$$i[M' + N'(H + \rho\sqrt{-1})]\lambda'$$
$$+ (K^2 - [H + \rho\sqrt{-1}]^2)(\mu \pm M\sqrt{-1}) = 0$$

$$i[M - N(H + \rho\sqrt{-1})]\lambda$$
$$+ (K'^2 - [H + \rho\sqrt{-1}]^2)(\mu' + M'\sqrt{-1}) = 0$$

$$i(M' + N'[2H + \rho\sqrt{-1}])(\mu' \pm M'\sqrt{-1})$$
$$+ 2(K^2 - [2H + \rho\sqrt{-1}]^2)(\nu \pm N\sqrt{-1}) = 0$$

$$i(M - N[2H + \rho\sqrt{-1}])(\mu + M\sqrt{-1})$$
$$+ 2(K'^2 - [2H \pm \rho\sqrt{-1}]^2)(\nu' \pm N'\sqrt{-1}) = 0.$$

Les deux premières donnent, ou bien

$$-\rho^2 = K^2 + \frac{i}{\lambda}\left(\frac{M'}{2}\mu' + \frac{N'}{2}M'\rho\right) \quad \ldots \ldots \quad (Y)$$

& $\lambda' = -i\frac{M\mu - NM\rho}{2(\rho^2 + K^2)}$, ou bien

$$-\rho^2 = K'^2 + \frac{i}{\lambda'}\left(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}M\rho\right)$$

& $\lambda = -i\frac{M'\mu' + NM'\rho}{2(\rho^2 + K^2)}$.

Dans le premier cas, la troiſiéme équation deviendra, en ſubſtituant la valeur de λ',

$$(K^2 - [H \pm \rho\sqrt{-1}]^2)(\mu + M\sqrt{-1})$$
$$- i^3[M' + N'(H \pm \rho\sqrt{-1})]\frac{M'\mu' + NM'\rho}{2(\rho^2 + K^2)} = 0,$$

laquelle donnera ſéparément, à cauſe de l'ambiguité du ſigne, $\mu = 0$, & $M = 0$; de ſorte qu'on aura auſſi $\lambda' = 0$, $\nu' = 0$, & $N' = 0$; & l'on aura enſuite pour la détermination des quantités μ', M', ν, & N,

$\mu' \pm$

$$\left.\begin{array}{l} \mu' \pm M'\sqrt{-1} = -i\,\dfrac{M - N(H \pm \rho\sqrt{-1})}{K'^2 - (H \pm \rho\sqrt{-1})^2}\,\lambda \\ \nu \pm N\sqrt{-1} = -i\,\dfrac{M' + N'(2H \pm \rho\sqrt{-1})}{2(K^2 - (2H \pm \rho\sqrt{-1})^2)}\,(\mu' \pm M'\sqrt{-1}) \end{array}\right\} (Z)$$

d' où l' on voit que les quantités μ' & M' feront de l' ordre de i, & les quantités ν & N de celui de i^2.

Dans le fecond cas on trouvera d' abord $\mu' = 0$, $M' = 0$, & par conféquent $\lambda = 0$, $\nu = 0$, & $N = 0$; enfuite on aura

$$\mu \pm M\sqrt{-1} = -i\,\frac{M' + N'(H \pm \rho\sqrt{-1})}{K^2 - (H \pm \rho\sqrt{-1})^2}\,\lambda' \quad \&$$

$$\nu' \pm N'\sqrt{-1} = -i\,\frac{M - N(2H \pm \rho\sqrt{-1})}{2(K'^2 - (2H \pm \rho\sqrt{-1})^2)}\,(\mu \pm M\sqrt{-1}),$$

d' où l' on tirera, μ, M, ν', & N'.

Ayant ainfi les valeurs de tous les coéficiens on achevera le calcul comme on a fait dans l'Art. préc., & l'on aura, à l' aide des deux valeurs de ρ^2, deux équations finales qui ferviront à trouver y & y'.

Il y a cependant un cas qui demande une difcuffion particuliére; c' eft celui où le coéficient H feroit prefque égal à $K - K'$, la différence n'étant que de l'ordre de i; nons alons l' éxaminer dans les Articles fuivans.

Analife du cas où H *eft prefque égal à* K — K'.

LX. Soit $K = h + ik$, $K' = h' + ik'$, & $H = h - h'$; enforte que $H = K - K' + i(k - k')$.

Je fais $\rho\sqrt{-1} = h + im$, c' eft-à-dire $\rho = -(h + im)\sqrt{-1}$; ce qui me donne $\rho^2 + K^2 = -2ih(m - k) - 2i^2(m^2 - k^2)$; & les équations (Y) & (Z) de l' Art. préc. fe changeront en celles-ci

$$2h\,(m-k)+i\,(m^2-k^2)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{M'}{2}\mu'-\frac{N'(h+im)}{2}M'\sqrt{-1}\right)\quad .\quad (a)$$

$$\mu'\pm M'\sqrt{-1}=-i\,\frac{M-N(h-h'\pm(h+im))}{(h'+ik')^2-(h-h'\pm(h+im))^2}\,\lambda\ (b)$$

$$\nu\pm N\sqrt{-1}=-\frac{i}{2}\cdot\frac{M'+N'(2h-2h'\pm(h+im))}{(h+ik)^2-(2h-2h'\pm(h+im))^2}$$

$$\times(\mu'\pm M'\sqrt{-1})\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (c)$$

d'où l'on tirera les valeurs de m, μ', M', ν, & N.

L'équation (b) étant prise en — donnera

$$\mu'-M'\sqrt{-1}=-i\,\frac{M+N(h'+im)}{(h'+ik')^2-(h'+im)^2}\,\lambda\,.$$

Or $(h'+ik')^2-(h'+im)^2=2ih'(k'-m)+i^2(k'^2-m^2)=-i(m-k')(2h+i[m+k'])$; donc faisant cette substitution, & divisant ensuite le haut & le bas de la fraction par i, on aura

$$\mu'-M'\sqrt{-1}=\frac{M+N(h'+im)}{(m-k')(2h'+i(m+k'))}\,\lambda\,.$$

Equation, dans laquelle je remarque que la quantité i ne se trouve plus qu'au premier dégré; de sorte que cette équation ne doit être regardée comme exacte qu'aux quantités de l'ordre de i^2 près. C'est pourquoi il faudra négliger dans la suite toutes les quantités de ce même ordre.

Prenons maintenant l'équation (b) en +, & nous aurons, en rejettant les termes de l'ordre de i^2,

$$\mu'+M'\sqrt{-1}=-i\,\frac{M-N(2h-h)}{h'^2-(2h-h')^2}\,\lambda\,.$$

Donc

$$\mu'=\frac{1}{2}\left(\frac{M+N(h'+im)}{(m-k')(2h'+i(m+k'))}+i\,\frac{M-N(2h-h')}{4h(h-h')}\right)\lambda$$

$$M'=\frac{1}{2}\left(\frac{M+N(h'+im)}{(m-k')(2h'+i(m+k')}-i\,\frac{M-N(2h-h')}{4h(h-h')}\right)\lambda$$

c' est-à-dire, en faisant

$$\alpha = \frac{Nm}{4b'(m-k')} - \frac{(M+Nb')(m+k')}{8b'^2(m-k')} + \frac{M-N(2b-b')}{8b(b-b')} \;\&$$

$$A = \frac{Nm}{4b'(m-k)} - \frac{(M+Nb')(m+k')}{8b'^2(m-k')} - \frac{M-N(2k-b')}{8b(b-b')},$$

$$\mu' = \left(\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} + i\alpha\right)\lambda$$

$$\& \; M' = \left(\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} + iA\right)\lambda\sqrt{-1}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation (a) il viendra

$$2h(m-k) + i(m^2-k^2) = \frac{M'(M+Nk')}{8b'(m-k')} + i\alpha\frac{M'}{2}$$

$$+ \frac{N'(M+Nb)(b+im)}{8b'(m-k')} + iA\frac{N'b}{2},$$

ou multipliant par $\frac{m-k'}{2b}$ & réduisant,

$$(m-k)(m-k') - \frac{(M+Nb')(M'+N'b)}{16bb'}$$

$$+ i\left[(m^2-k^2)(m-k') - \frac{(M+Nb)N'm}{16bb'}\right.$$

$$\left. - \frac{(\alpha M' + AN'b)(m-k')}{4b}\right] = 0$$

De sorte que, si l' on fait

$$\Delta = (m^2-k^2)(m-k') - \frac{(M+Nb)N'm}{16bb'}$$

$$- \frac{(\alpha M' + AN'b)(m-k')}{4b},$$

on aura,

$$(m-k)(m-k') - \frac{(M+Nb')(M'+N'b)}{16bb'} + i\Delta = 0 \;. \quad (d)$$

équation d' où l' on tirera deux valeurs de m que j' appellerai $m\,1$ & $m\,2$.

Si on néglige le terme $i\Delta$ on aura les premières valeurs approchées de $m\,1$ & de $m\,2$; & substituant ensuite

ces valeurs dans l'expreſſion de Δ on aura les valeurs de $m \cdot 1$ & de $m\,2$ aux quantités de l'ordre de i^2 près.

Enfin l'équation (c) donnera, en ſubſtituant les valeurs de μ' & de M', & négligeant les termes de l'ordre de i^2,

$$\nu \pm N\sqrt{-1} = -i\,\frac{M + N(2h - 2h' \pm h)}{h^2 - (2h - 2h' \pm h)^2}$$

$$\times\ \frac{M + Nh'}{8h'(m - k')}(1 \mp 1)\lambda$$

d'où, en faiſant

$$\beta = -\frac{M + N(h - 2h')}{4h'(h - h')} \times \frac{M + Nh'}{8h'(m - k')},$$

on aura

$$\nu = i\beta\lambda,\ N = i\beta\lambda\sqrt{-1}.$$

A l'égard des autres coéficiens, ſavoir λ', μ, M, ν' & N' ils ſeront tous $= 0$, comme nous l'avons vû dans l'Art. préc.

LXI. On fera maintenant ces différentes ſubſtitutions dans l'équation intégrale (X) de l'Art. LVIII., & l'on aura, en rejettant les termes de l'ordre de i^2

$$\Big\{\frac{dy}{dt} + \frac{M + Nh'}{4h'(m-k')}\left(\frac{du'}{dt} + \frac{dU'}{dt}\sqrt{-1}\right)$$

$$+ hy\sqrt{-1} + (h - 2H)\frac{M + Nh'}{4h(m - k')}(u'\sqrt{-1} - U')$$

$$+ i\Big(\alpha\frac{du'}{dt} + A\frac{dU'}{dt}\sqrt{-1} + \beta\left(\frac{dv}{dt} + \frac{dV}{dt}\sqrt{-1}\right)$$

$$+ \left(m - \frac{N'(M + Nh')}{8h'(m - k')}\right)y\sqrt{-1}$$

$$+ \left(\frac{(M + Nh')m}{4h'(m - k')} + h\alpha - 2HA\right)u'\sqrt{-1}$$

$$+ \left(N + 2H\alpha - \frac{(M + Nh')m}{4h'(m - k')} - hA\right)U'$$

$$+ \left(\frac{N'(M+Nh')}{8h'(m-k')} + [h-4H]\beta\right)(v\sqrt{-1}-V)\Big)\Big\}\, e^{-(h + im)t\sqrt{-1}}$$

$$=\int\left\{T+\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}T'(\text{cof. } Ht+\text{fin. } Ht\sqrt{-1})\right.$$

$$+i\,(\beta T(\text{cof. } 2Ht+\text{fin. } 2Ht\sqrt{-1})$$

$$\left.+T'(\alpha\,\text{cof. } Ht+\text{A fin. } Ht\sqrt{-1}))\right\}e^{-(h+im)t\sqrt{-1}}dt \quad \text{(e)}$$

Suppoſons que cette intégrale ſoit priſe de telle manière qu'elle ſoit nulle lorſque $t=0$, & qu'alors on ait $y=f$, $\frac{dy}{dt}=g$, $y'=f'$, $\frac{dy'}{dt}=g'$, & par conſéquent $u'=f'$, $\frac{du'}{dt}=g'$, $U'=0$, $\frac{dU'}{dt}=Hf'$, $v=f$, $\frac{dv}{dt}=g$, $V=0$, & $\frac{dV}{dt}=2Hf$ (*Art. LVIII.*) ; il eſt clair qu'il faudra ajouter au ſecond membre de l'équation précédente, la quantité

$$g+\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}(g'+Hf'\sqrt{-1})+hf\sqrt{-1}$$
$$+(h-2H)\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}f'\sqrt{-1}$$
$$+i\left\{\alpha g'+\text{A}Hf'\sqrt{-1}+\beta(g+2Hf\sqrt{-1})\right.$$
$$+(m-\frac{N'(M+Nb')}{8b'(m-k')})f\sqrt{-1}$$
$$+(\frac{(M+Nb')m}{4b'(m-k')}+h\alpha-2H\text{A})f'\sqrt{-1}$$
$$\left.+(\frac{N'(M+Nb')}{8b'(m-k')}+[h-4H]\beta)f\sqrt{-1}\right\}$$

c'eſt-à-dire, à cauſe de $H=h-h'$,

$$g+hf\sqrt{-1}+\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}(g'+h'f'\sqrt{-1})$$
$$+i\left\{\alpha g'+\beta g+(\frac{(M+Nb')m}{4b'(m-k')}+h\alpha-H\text{A})f'\sqrt{-1}\right.$$
$$\left.+(m-[h-2h']\beta)f\sqrt{-1}\right\}.$$

LXII. Pour rendre le calcul plus ſimple nous négligerons d'abord les termes de l'ordre de i; moyennant quoi l'équation (e) deviendra (en mettant $h - h'$ au lieu de H, & $e^{(h-h')t\sqrt{-1}}$ au lieu de coſ. Ht + ſin. $Ht\sqrt{-1}$)

$$\left\{\frac{dy}{dt} + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\left(\frac{du'}{dt} + [h - 2h']U'\right)\right.$$
$$\left. + \left(hy + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\left[\frac{dU'}{dt} - (h-2h')u'\right]\right)\sqrt{-1}\right\} e^{-(h+im)t\sqrt{-1}}$$
$$= g + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}g' + \left(hf + \frac{M+Nb'}{4(m-k')}f'\right)\sqrt{-1}$$
$$+ \int\left\{Te^{-(h+im)t\sqrt{-1}} + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}T'e^{-(h'+im)t\sqrt{-1}}\right\}dt \quad (f)$$

Si on multiplie cette équation par $e^{(h+im)t\sqrt{-1}}$, qu'enſuite, après avoir réduit les exponentielles imaginaires en *ſinus* & *coſinus*, on compare la partie imaginaire du premier membre à la partie imaginaire du ſecond, & qu'on faſſe pour abreger

$$\theta = \text{ſin.}\,(h + im)t\int T\,\text{coſ.}\,(h + im)t\,dt$$
$$- \text{coſ.}\,(h + im)t\int T\,\text{ſin.}\,(h + im)t\,dt,$$
$$\vartheta = \text{ſin.}\,(h + im)t\int T'\,\text{coſ.}\,(h' + im)t\,dt$$
$$- \text{coſ.}\,(h + im)t\int T'\,\text{ſin.}\,(h' + im)t\,dt,$$

on aura l'équation ſuivante

$$hy + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\left[\frac{dU'}{dt} - (h - 2h')u'\right]$$
$$= \left(hf + \frac{M+Nb'}{4(m-k')}f'\right)\text{coſ.}\,(h + im)t$$
$$+ \left(g + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}g'\right)\text{ſin.}\,(h + im)t$$
$$+ \theta + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\vartheta,$$

laquelle, (en mettant ſucceſſivement $m1$ & $m2$ à la place de m, & dénotant par $\theta 1$ & $\theta 2$, $\vartheta 1$ & $\vartheta 2$ les valeurs correſpondantes de θ & de ϑ) en fournira deux

autres, dont la seconde étant multipliée par $\frac{m2-k'}{b(m1-m2)}$, & ensuite retranchée de la première aussi multipliée par $\frac{m1-k'}{b(m1-m2)}$, on aura

$$y = \left(\frac{m1-k'}{m1-m2}f + \frac{M+Nb'}{4b(m1-m2)}f'\right)\text{cos.}\,(h+im1)\,t$$
$$+\left(\frac{m1-k'}{b(m1-m2)}g + \frac{M+Nb'}{4bb'(m1-m2)}g'\right)\text{sin.}\,(h+im1)\,t$$
$$-\left(\frac{m2-k'}{m1-m2}f + \frac{M+Nb'}{4b(m1-m2)}f'\right)\text{cos.}\,(h+im2)\,t$$
$$-\left(\frac{m2-k'}{b(m1-m2)}g + \frac{M+Nb'}{4bb'(m1-m2)}g'\right)\text{sin.}\,(h+im2)\,t$$
$$+\frac{m1-k'}{b(m1-m2)}\theta 1 - \frac{m2-k'}{b(m1-m2)}\theta 2 + \frac{M+Nb'}{4bb'(m1-m2)}(\vartheta 1-\vartheta 2)\ \text{(g)}$$

LXIII. Il faudroit maintenant faire un calcul semblable pour trouver la valeur de y', en employant les autres formules de l' Art. LIX.; mais sans entrer dans un nouveau détail à cet égard, il suffira de considérer que les équations proposées (T) & (U), dans lesquelles $H = h - h'$, sont telles que l' une se change en l' autre, en marquant seulement d' un trait les lettres y, K, M, N, h, T, & effaçant celui des lettres y', K', M', N', h', & T'; d' où il s' ensuit que pour avoir l' expression de y' il ne faudra que mettre dans celle de y, f', g', h', k', M', N', T', au lieu de f, g, h, k, M, N, T, & *viceversa*.

A l' égard des valeurs de m, on remarquera qu'en négligeant le terme $i\Delta$, elles seront les mêmes pour les deux cas, puisque les quantités M, N, h, k, & M', N', h', k' entrent de la même manière dans l' équation (d) de l' Art. LX.

LXIV. Ayant trouvé les premières valeurs de y & de y', si on veut avoir une plus grande précision & tenir compte aussi des quantités de l' ordre de i, on nommera

ces valeurs y & y', & on déſignera de même par u', U', v, & V les valeurs correſpondantes des quantités u', U', v, & V; enſuite on ſuppoſera $y = \mathrm{y} + i y^{\cdot}$, $u' = \mathrm{u}' + i u'^{\cdot}$, $U' = \mathrm{U}' + i U'^{\cdot}$, & l' on fera ces ſubſtitutions dans l' équation (e) de l' Art. LXI., en négligeant les termes de l' ordre de i^2; après quoi on effacera tous les termes qui ne feront point affectés de i, parceque ces termes ſe détruiront d'eux mêmes, en vertu de l'équation (f), & l' on diviſera les autres par i. De cette manière on aura

$$\Big\{ \frac{dy^{\cdot}}{dt} + \frac{M + Nb'}{4b'(m-k')} \Big(\frac{du'^{\cdot}}{dt} + [h - 2h'] U'^{\cdot} \Big)$$

$$+ \Big(h y^{\cdot} + \frac{M + Nb'}{4b'(m-k')} \Big(\frac{dU'^{\cdot}}{dt} - [h - 2h'] u'^{\cdot} \Big) \Big) \sqrt{-1}$$

$$+ \alpha \frac{d\mathrm{u}'}{dt} + \beta \frac{d\mathrm{v}}{dt} + \Big(N + 2H\alpha - \frac{(M + Nb')m}{4b(m-k')} - h\mathrm{A} \Big) \mathrm{U}'$$

$$- \Big(\frac{N'(M + Nb')}{8b'(m-k')} + [h - 4H]\beta \Big) \mathrm{V}$$

$$+ \Big(\mathrm{A} \frac{d\mathrm{U}'}{dt} + \beta \frac{d\mathrm{V}}{dt} + \Big(m - \frac{N'(M + Nb')}{8b'(m-k')} \Big) \mathrm{y}$$

$$+ \Big(\frac{(M + Nb')m}{4b'(m-k')} + h\alpha - 2H\mathrm{A} \Big) \mathrm{u}'$$

$$+ \Big(\frac{N'(M + Nb')}{8b'(m-k')} + [h - 4H]\beta \Big) \mathrm{v} \Big) \sqrt{-1} \Big\} e^{-(h+im)t\sqrt{-1}}$$

$$= \alpha g' + \beta g + \Big(\Big(\frac{(M + Nb')m}{4b'(m-k')} + h\alpha - H\mathrm{A} \Big) f'$$

$$+ (m - [h - 2h']\beta) f \Big) \sqrt{-1}$$

$$+ \int \Big\{ \beta T \, (\text{coſ.}\, 2Ht + \text{ſin.}\, 2Ht \sqrt{-1})$$

$$+ T' (\alpha \, \text{coſ.}\, Ht + \mathrm{A} \, \text{ſin.}\, Ht \sqrt{-1}) \Big\} e^{-(h+im)t\sqrt{-1}} dt.$$

On traitera cette équation comme on a fait ci-devant l' équation (f), & ſuppoſant pour abreger

$$\varphi = \text{fin.}\,(h + im)\,t \int T \,\text{cof.}\,(2h' - h + im)\,t\,dt$$
$$-\ \text{cof.}\,(h + im)\,t \int T \,\text{fin.}\,(2h' - h + im)\,t\,dt,$$
$$\chi = \text{fin.}\,(h + im)\,t \int T' \,\text{cof.}\,(h' + im)\,t\,dt$$
$$-\ \text{cof.}\,(h + im)\,t \int T' \,\text{fin.}\,(h' + im)\,t\,dt,$$
$$\psi = \text{fin.}\,(h + im)\,t \int T' \,\text{cof.}\,(2h - h' + im)\,t\,dt$$
$$-\ \text{cof.}\,(h + im)\,t \int T' \,\text{fin.}\,(2h - h' + im)\,t\,dt,$$

& de plus

$$\gamma = m - \frac{N'(M + Nh')}{8h'(m - k')}$$
$$\delta = \frac{(M + Nh')m}{4h'(m - k')} + h\alpha - 2HA$$
$$\varepsilon = \frac{N'(M + Nh')}{8h'(m - k')} + (h - 4H)\beta$$
$$\zeta = ag' + \beta g$$
$$\eta = \left[\frac{(M + Nh)m}{4h'(m - k')} + h\alpha - HA\right]f' + [m - (h - 2h')\beta]\,f,$$

on trouvera

$$y\cdot = \frac{m1 - k'}{h(m1 - m2)} \Big\{ \eta 1 \,\text{cof.}\,(h + im1)t + \zeta 1 \,\text{fin.}\,(h + im1)t$$
$$+ A1 \frac{dU'}{dt} + \beta 1 \frac{dV'}{dt} + \gamma 1 \,y + \delta 1 \,u' + \varepsilon 1 \,v$$
$$+ \beta 1 \varphi 1 + \frac{\alpha 1 + A1}{2}\chi 1 + \frac{\alpha 1 - A1}{2}\psi 1 \Big\}$$
$$- \frac{m2 - k'}{h(m1 - m2)} \Big\{ \eta 2 \,\text{cof.}\,(h + im2)t + \zeta 2 \,\text{fin.}\,(h + im2)t$$
$$+ A2 \frac{dU'}{dt} + \beta 2 \frac{dV'}{dt} + \gamma 2 \,y + \delta 2 \,u' + \varepsilon 2 \,v$$
$$+ \beta 2 \varphi 2 + \frac{\alpha 2 + A1}{2}\chi 2 + \frac{\alpha 2 - A1}{2}\psi 2 \Big\};$$

$\eta 1$, $\eta 2$, $\zeta 1$, $\zeta 2$ &c. étant les valeurs de η, ζ &c. qui répondent à $m1$ & $m2$.

Si on vouloit encore pouffer la précifion plus loin il faudroit alors reprendre les calculs de l' Art. LVIII., & y

avoir égard aux quantités de l'ordre de i^3 que nous y avons négligées.

LXV. Soit $T = AP$, A étant une quantité conftante, & P une fonction de P telle que $\frac{d^2P}{dt^2} + a^2 P = 0$; on aura donc $\int T \text{ cof. } (h + im)\, t\, dt = A \int P \text{ cof. } (h + im)\, t\, dt$, & $\int P \text{ cof. } (h + im)\, t\, dt = - \frac{1}{a^2} \int \frac{d^2P}{dt^2} \text{ cof. } (h + im)\, t\, dt$ $=$ (en intégrant par parties) $- \frac{dP}{a^2 dt} \text{ cof. } (h + im)\, t$ $- \frac{h + im}{a^2} P \text{ fin. } (h + im)\, t + \frac{(h + im)^2}{a^2} \int P \text{ cof. } (h + im)\, t\, dt$; donc fuppofant que l'intégrale $\int P \text{ cof. } (h + im)\, t\, dt$ foit prife de manière qu'elle foit nulle lorfque $t = 0$, & qu'alors on ait $\frac{dP}{dt} = \alpha$, on aura

$$\int P \text{ cof. } (h + im)\, t\, dt = \left[(h + im) P \text{ fin. } (h + im)\, t + \frac{dP}{dt} \text{ cof. } (h + im)\, t - \alpha \right] \frac{1}{(h + im)^2 - a^2}.$$

On trouvera de même, en prenant β pour ce que devient P lorfque $t = 0$

$$\int P \text{ fin. } (h + im)\, t\, dt = \left[-(h + im) P \text{ cof. } (h + im)\, t + \frac{dP}{dt} \text{ fin. } (h + im)\, t + (h + im)\beta \right] \frac{1}{(h + im)^2 - a^2}.$$

De forte qu'on aura (*Art. LXII.*)

$$\theta = \frac{A}{(h + im)^2 - a^2} \left[(h + im) P - \alpha \text{ fin. } (h + im)\, t - \beta (h + im) \text{ cof. } (h + im)\, t \right].$$

Pareillement fi on a $T' = A' P'$, & $\frac{d^2P'}{dt^2} + a'^2 P' = 0$, & que α', β' foient les valeurs de $\frac{dP'}{dt}$ & de P' quand $t = 0$, on trouvera

$\vartheta = \frac{A'}{(h' + im) - a'^2} [(h' + i m) P \text{ cos.} (h - h') t + \frac{dP}{dt}$ $\text{sin.} (h - h') t - \alpha' \text{ sin.} (h' + i m) t - \beta' (h' + i m)$ $\text{cos.} (h' + i m) t]$.

Donc si on a

$T = A P + B Q + C R + \&c.$ &

$\frac{d^2 P}{dt^2} + a^2 P = 0, \frac{d^2 Q}{dt^2} + b^2 Q = 0, \frac{d^2 R}{dt^2} + c^2 R = 0$ &c.

& de même

$T' = A' P' + B' Q' + C' R' + \&c.$, &

$\frac{d^2 P'}{dt^2} + a'^2 P' = 0, \frac{d^2 Q'}{dt^2} + b'^2 Q' = 0, \frac{d^2 R'}{dt^2} + c'^2 R' = 0$;

& qu'on fasse

$\Theta = \frac{A}{h^2 - a^2} P + \frac{B}{h^2 - b^2} Q + \frac{C}{h^2 - c^2} R + \&c.$

$\Theta' = \frac{A'}{h'^2 - a'^2} P' + \frac{B'}{h'^2 - b'^2} Q' + \frac{C'}{h'^2 - c'^2} R' + \&c.$

& de plus

$F = f - \Lambda, G = g - \Gamma, F' = f' - \Lambda', G' = g' - \Gamma'$,

(Λ, Γ, Λ', & Γ' étant les valeurs de Θ, $\frac{d\Theta}{dt}$, Θ' & $\frac{d\Theta'}{dt}$, lorsque $t = 0$) la formule (g) de l' Art. LXII. donnera, en négligeant les termes de l' ordre de i,

$$y = \left\{ \frac{m1 - k'}{m1 - m2} F + \frac{M + Nh'}{4h'(m1 - m2)} F' \right\} \text{cos.} (h + im1) t$$
$$+ \left\{ \frac{m1 - k'}{h(m1 - m2)} G + \frac{M + Nh'}{4hh'(m1 - m2)} G' \right\} \text{sin.} (h + im1) t$$
$$- \left\{ \frac{m2 - k'}{m1 - m2} F + \frac{M + Nh'}{4h'(m1 - m2)} F' \right\} \text{cos.} (h + im2) t$$
$$- \left\{ \frac{m2 - k'}{h(m1 - m2)} G + \frac{M + Nh'}{4hh'(m1 - m2)} G' \right\} \text{sin.} (h + im2) t$$
$$+ \Theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

Par là on aura la valeur de y lorſque les fonctions T, & T' feront exprimées par des ſuites quelconques de différens *ſinus* & *coſinus* d' angles multiples de t.

Il faut obſerver que ſi a étoit égal ou preſque égal à h, il ne feroit pas permis de négliger les termes affectés de i dans l' expreſſion de θ; & l' on trouveroit alors dans la valeur de y des termes dont les coéficiens feroient très-grands; il en faudra dire autant du cas où a' ne feroit que très-peu différent de h'; nous en laiſſons le détail au Lecteur.

Mais ſi a étoit exactement égal à $h + im$ le dénominateur $a^2 - (h + im)^2$ de l'expreſſion de θ deviendroit $= 0$, & comme cette quantité n'eſt point infinie, le numérateur correſpondant feroit auſſi égal à zéro dans ce cas là; faiſant donc $h + im = a + \omega$, & regardant ω comme une quantité évanouiſſante on trouveroit

$$\theta = -\frac{A}{2a}\left[\alpha t \cos. at + \beta(\cos. at - at \sin. at) - P - a\frac{dP}{da}\right];$$

de forte que la formule (h) contiendroit des termes multipliés par l' angle t. Il en feroit de même ſi $a' = h' + im$. Au reſte ces deux cas ſont ſuſceptibles de remarques analogues à celle que nous avons faite à la fin de l' Art. LII.

LXVI. Comme les quantités $m1$ & $m2$ ſont les racines d'une équation du ſecond dégré (*Art. LX.*) il peut arriver qu'elles ſoient égales ou imaginaires; ainſi il ne fera pas inutile de nous arrêter ici à diſcuter ces deux cas.

1.° Si $m2 = m1$, je fais $m2 = m1 + \omega$ (ω étant une quantité évanouiſſante) ce qui me donne $\frac{m1 - k'}{m1 - m2} = -\frac{m1 - k'}{\omega}$, $\frac{m2 - k'}{m1 - m2} = -\frac{m1 - k'}{\omega} - 1$, $\frac{M + Nb'}{m1 - m2} =$

$-\frac{M+Nb'}{\omega}$, cof. $(h+im2)t = $ cof. $(h+im1)t - it\omega$ fin. $(h+im1)t$, & fin. $(h+im2)t = $ fin. $(h+im1)t + it\omega$ cof. $(h+im1)t$; donc faifant ces fubftitutions dans la formule (h) on aura, après avoir effacé ce qui fe détruit,

$$y = F \text{ cof. } (h+im1)t + \frac{G}{h} \text{ fin. } (h+im1)t$$
$$+ i[(m1-k')F + \frac{M+Nb'}{4h}F']t \text{ fin. } (h+im1)t$$
$$- i[\frac{m1-k'}{h}G + \frac{M+Nb'}{4hb'}G']t \text{ cof. } (h+im1)t$$
$$+ \Theta.$$

Mais il faut bien remarquer que pour que cette équation ait lieu il faut que les valeurs de m foient égales rigoureufement, & fans rien négliger (*Voyés l' Artic. cité ci-deffus*).

2.° Si $m1$ & $m2$ font imaginaires, enforte que $m1 = \mu + \nu\sqrt{-1}$, & $m2 = \mu - \nu\sqrt{-1}$, on aura $\frac{m1-k'}{m1-m2} = \frac{\mu-k'}{2\nu\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}$, $\frac{m2-k'}{m1-m2} = \frac{\mu-k'}{2\nu\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}$, $\frac{M+Nb'}{m1-m2} = \frac{M+Nb'}{2\nu\sqrt{-1}}$; enfuite on trouvera

$$\text{cof. } (h+im1)t = \text{cof. } (h+i\mu)t \times \frac{e^{i\nu t}+e^{-i\nu t}}{2}$$
$$+ \text{fin. } (h+i\mu)t \times \frac{e^{i\nu t}-e^{-i\nu t}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\text{fin. } (h+i\mu1)t = \text{fin. } (h+i\mu)t \times \frac{e^{i\nu t}+e^{-i\nu t}}{2}$$
$$- \text{cof. } (h+i\mu)t \times \frac{e^{i\nu t}-e^{-i\nu t}}{2\sqrt{-1}},$$ & de même

$$\text{cof.}\,(h + i m 2)\, t = \text{cof.}\,(h + i\mu)\, t \times \frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2}$$
$$- \text{fin.}\,(h + i\mu) t \times \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2\sqrt{-1}},$$
$$\text{fin.}\,(h + i m 2)\, t = \text{fin.}\,(h + i\mu)\, t \times \frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2}$$
$$+ \text{cof.}\,(h + i\mu)\, t \times \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces fubftitutions faites, on verra que les imaginaires fe détruiront dans la formule (h), & qu'elle deviendra

$$y = \left\{ F\,\text{cof.}\,(h + i\mu)\, t + \frac{G}{h}\,\text{fin.}\,(h + i\mu)\, t \right\} \times \frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2}$$
$$- \left\{ \left(\frac{\mu - k'}{\nu} F + \frac{M + Nh'}{4h\nu} F'\right) \text{fin.}\,(h + i\mu)\, t - \left(\frac{\mu - k'}{h\nu} G \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{M + Nh'}{4hh'\nu} G'\right) \text{cof.}\,(h + i\mu) t \right\} \times \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2} + \Theta.$$

Ainfi dans le cas où l'équation (d) a fes deux racines imaginaires, la valeur de y contient néceffairement des exponentielles toutes réelles, & qui croiffent à l'infini à mefure que t croit.

Application de la folution précédente à la Théorie de Jupiter & de Saturne.

LXVII. Soit I la maffe du Soleil, J celle de Jupiter, r le rayon vecteur de l'orbite de cette planète projettée fur le plan de l'écliptique (plan que nous regarderons comme abfolument fixe & immobile), φ l'angle décrit par le rayon r, pendant le tems t, & q la tangente de la latitude héliocentrique de Jupiter.

Soit de même J' la maffe de Saturne, r' le rayon vecteur de fon orbite réduit au plan de l'écliptique, φ' l'an-

gle décrit par ce rayon durant le même tems t, & q' la tangente de la latitude héliocentrique de Saturne.

Enfin soit la perpendiculaire menée du centre de Jupiter sur le plan de l'écliptique p, la perpendiculaire menée du centre de Saturne sur le même plan p', la distance de Jupiter au Soleil, c'est-à-dire le rayon mené du Soleil à Jupiter u, la distance de Saturne au Soleil u', & la distance de Jupiter à Saturne v, ensorte que $p = rq$, $p' = r'q'$, $u = \sqrt{(r^2 + p^2)} = r\sqrt{(1 + q^2)}$, $u' = r'\sqrt{(1 + q'^2)}$, & $v = \sqrt{([r \text{ fin.} (\varphi - \varphi')]^2 + [r' - r \text{ cof.} (\varphi - \varphi')]^2 + (p - p')^2)} = \sqrt{(r^2(1 + q^2) - 2rr'[\text{cof.} (\varphi - \varphi') + qq'] + r'^2(1 + q'^2))}$, & supposant

$$R = J' \left(\frac{r - r' \text{ cof.} (\varphi - \varphi')}{v^3} + \frac{r' \text{ cof.} (\varphi - \varphi')}{u'^3}\right),$$

$$Q = J' \left(\frac{r'}{v^3} - \frac{r'}{u'^3}\right) r \text{ fin.} (\varphi - \varphi'),$$

$$P = J' \left(\frac{p - p'}{v^3} + \frac{p'}{u'^3}\right),$$

$$R' = J \left(\frac{r' - r \text{ cof.} (\varphi' - \varphi)}{v^3} + \frac{r \text{ cof.} (\varphi' - \varphi)}{u^3}\right),$$

$$Q' = J \left(\frac{r}{v^3} - \frac{r}{u^3}\right) r' \text{ fin.} (\varphi' - \varphi),$$

$$P' = J \left(\frac{p' - p}{v^3} + \frac{p}{u^3}\right),$$

on aura les six équations suivantes (Voy. *Artt. XIV.* & *XVI.* du Mém. intit. *Application de la méthode précedente &c.*, imprimé dans le Vol. préc.)

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r\, d\varphi^2}{dt^2} + (I + J)\frac{r}{u^3} + R = 0$$

$$\frac{d\cdot(r^2 d\phi)}{dt^2} + Q = 0$$

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + (I + J)\frac{p}{u^3} + P = 0$$

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} - \frac{r' d\phi'^2}{dt^2} + (I + J')\frac{r'}{u'^3} + R' = 0$$

$$\frac{d\cdot(r'^2 d\phi')}{dt^2} + Q' = 0$$

$$\frac{d^2 p'}{dt^2} + (I + J')\frac{p'}{u'^3} + P' = 0,$$

dont les trois premières repréſentent le mouvement de Jupiter dérangé par Saturne, & les trois autres celui de Saturne dérangé par Jupiter.

D'où l'on voit, que quand on aura calculé les dérangemens de Jupiter, les mêmes formules ſerviront à calculer ceux de Saturne, puiſqu'il n'y aura qu'à changer r', ϕ', p', u', & J' en r, ϕ, p, u, & J, & *viceverſa.*

LXVIII. Puiſque $p = rq$, l'équation $\frac{d^2 p}{dt^2} + (I + J)\frac{p}{u^3} + P = 0$, deviendra (en diviſant par r) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{2dqdr}{rdt^2} + q\frac{d^2 r}{rdt^2} + (I + J)\frac{q}{u^3} + \frac{P}{r} = 0$, & mettant au lieu de $\frac{d^2 r}{dt^2}$ ſa valeur tirée de la première équation, on aura après avoir effacé ce qui ſe détruit,

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + q\frac{d\phi^2}{dt^2} + \frac{2dqdr}{rdt^2} + \frac{P - Rq}{r} = 0.$$

Enſuite l'équation $\frac{d\cdot(r^2 d\phi)}{dt^2} + Q = 0$ donnera $\frac{r^2 d\phi}{dt} = c - \int Q dt$, c étant une conſtante arbitraire ; d'où l'on tire $\frac{d\phi}{dt} = \frac{c - \int Q dt}{r^2}$.

Donc

Donc les équations du mouvement de Jupiter seront à cause de $u = r\sqrt{(1+q^2)}$,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{(c - \int Q dt)^2}{r^3} + \frac{I + J}{r^2 (1+q^2)^{\frac{3}{2}}} + R = 0 \\ \frac{d^2 q}{dt^2} + q \frac{(c - \int Q dt)^2}{r^4} + \frac{2 dq dr}{r dt^2} + \frac{P - Rq}{r} = 0 \\ \frac{d\varphi}{dt} - \frac{c - \int Q dt}{r^2} = 0. \end{array}\right\} (i)$$

LXIX. Les équations (i) donneront r, q, & φ en t; d'où l'on connoitra le lieu de la planete à chaque instant. Si on vouloit de plus avoir l'orbite qu'elle décrit, on n'auroit qu'à éliminer le tems t au moyen de l'équation $\frac{d.(r^2 d\varphi)}{dt^2} + Q = 0$, laquelle étant multipliée par $2 r^2 d\varphi$, & ensuite intégrée donne $(\frac{r^2 d\varphi}{dt})^2 + 2\int Q r^2 d\varphi = C$, ($C$ étant une constante arbitraire); d'où l'on tire

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{\sqrt{(C - 2\int Q r^2 d\varphi)}}.$$

Et cette valeur étant substituée dans les deux premières des équations (i), on aura, en prenant $d\varphi$ constant au lieu de dt, & faisant $\frac{1}{r} = s$, $Rr^2 + Q\frac{dr}{d\varphi} = U$, & $r^3 (P - Rq + Q\frac{dq}{r d\varphi}) = V$, les équations suivantes

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s - \frac{(I+J)(1+q^2)^{-\frac{3}{2}} + U}{C - 2\int Q r^2 d\varphi} = 0$$

$$\frac{d^2 q}{d\varphi^2} + q + \frac{V}{C - 2\int Q r^2 d\varphi} = 0.$$

LXX. Supposons que les forces perturbatrices R, Q, P soient nulles, ensorte que l'orbite soit décrite en vertu

de la feule force $\frac{I+J}{u^2}$ tendante au centre du Soleil, & les équations que nous venons de trouver deviendront

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} + s - \frac{I+J}{C(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \ \& \ \frac{d^2q}{d\varphi^2} + q = 0,$$

lesquelles étant intégrées donneront

$q = \varepsilon$ fin. $(\varphi - \alpha)$, & $s = \frac{I+J}{D}\sqrt{(1+q^2)} + \eta$ cof. $(\varphi - \omega)$ ε, α, η, & ω étant des conftantes arbitraires, & $D = C(1+\varepsilon^2)$.

La première de ces deux formules nous montre que l'orbite eft toute dans un plan fixe paffant par le centre des rayons r, & coupant ce plan de manière que ε foit la tangente de l'inclinaifon, & α le lieu du nœud afcendant.

La feconde fait voir que l'orbite eft une ellipfe, dont le foyer eft dans le centre même des rayons vecteurs r; & pour en déterminer l'efpace & la pofition on confidérera, que fi on nomme Φ, & A les angles dont φ, & α font les projections, on aura (Φ — A étant l'argument de latitude, & $\varphi - \alpha$ fa projection) $\frac{\text{cof.}(\varphi - \alpha)}{\text{cof.}(\Phi - A)} = \sqrt{(1+q^2)}$, & $\frac{\text{fin.}(\varphi - \alpha)}{\text{fin.}(\Phi - A)} = \frac{\sqrt{(1+q^2)}}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)}}$; & par conféquent cof. $(\varphi - \alpha) = \sqrt{(1+q^2)} \times$ cof. $(\Phi - A)$ & fin. $(\varphi - \alpha) = \frac{\sqrt{(1+q^2)}}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)}} \times$ fin. $(\Phi - A)$; donc cof. $(\varphi - \omega) =$ cof. $(\varphi - \alpha + \alpha - \omega) =$ cof. $(\varphi - \alpha)$ $\times$ cof. $(\alpha - \omega)$ — fin. $(\varphi - \alpha) \times$ fin. $(\alpha - \omega) =$ [cof. $(\alpha - \omega) \times$ cof. $(\Phi - A) - \frac{\text{fin.}(\alpha - \omega)}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)}}$ fin. $(\Phi - A)$] $\sqrt{(1+q^2)}$; & faifant, pour plus de fimplicité, cof. $(\alpha - \omega) =$ E cof. (A — B) & $\frac{\text{fin.}(\alpha - \omega)}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)}} =$ E fin.

$(A - B)$, ce qui donne $E = \sqrt{(\frac{1 + \varepsilon^2 \operatorname{cos}.(\alpha - \omega)^2]}{1 + \varepsilon^2})}$, & tang. $(A - B) = \frac{\text{tang.}(\alpha + \omega)}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2)}}$, on aura cof. $(\varphi - \omega) = E$ cof. $(\Phi - B) \times \sqrt{(1 + q^2)}$; donc $\frac{s}{\sqrt{(1 + q^2)}} = \frac{I + J}{D} + \eta E$ cof. $(\Phi - B)$.

Or $s = \frac{1}{r}$, & $r \sqrt{(1 + q^2)} = u$ rayon vecteur de l'orbite réelle ; donc l'équation de cette orbite fera

$$u = \frac{1}{\frac{I + J}{D} + \eta E \text{ cof. } (\Phi - B)},$$

laquelle eft vifiblement celle d'une ellipfe dont $\frac{I + J}{D}$ eft le paramètre & ηE l'excentricité. A l'égard de la pofition du grand axe de cette ellipfe, il eft clair que $\Phi = B$ donnera le lieu du périhélie, & pour avoir l'angle correfpondant φ, que nous nommerons β, on obfervera que tang. $(\varphi - \alpha) = \frac{\text{tang.}(\Phi - A)}{\sqrt{(1 + \varepsilon)}}$; de forte qu'on aura tang. $(\beta - \alpha) = \frac{\text{tang.}(B - A)}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2)}} = \frac{\text{tang.}(\omega - \alpha)}{1 + \varepsilon^2}$.

LXXI. Imaginons maintenant que l'effet des forces perturbatrices confifte à faire varier les quantités ε, α, η, & ω; enforte que l'orbite foit repréfentée par une ellipfe qui change continuellement d'efpace & de pofition ; nous aurons donc

1.° $q = \varepsilon$ fin. $(\varphi - \alpha)$, & $\frac{dq}{d\varphi} = \varepsilon$ cof. $(\varphi - \alpha) + \frac{d\varepsilon}{d\varphi}$ fin. $(\varphi - \alpha) - \frac{d\alpha}{d\varphi}\varepsilon$ cof. $(\varphi - \alpha)$; or puifque on a deux indéterminées ε & α, dont l'une peut être tout ce qu'on

voudra, nous ſuppoſerons ſin. $(\varphi-\alpha)\, d\varepsilon = \varepsilon$ coſ. $(\varphi-\alpha)\, d\alpha$; ce qui donnera $\frac{dq}{d\varphi} = \varepsilon$ coſ. $(\varphi-\alpha)$, de ſorte que la variation inſtantanée de la latitude ſera la même que ſi le plan de l'orbite ne changoit point de poſition. Donc $\frac{d^2 q}{d\varphi^2} = -\varepsilon$ ſin. $(\varphi-\alpha) + \frac{d\varepsilon}{d\varphi}$ coſ. $(\varphi-\alpha) + \frac{d\alpha}{d\varphi}\varepsilon$ ſin. $(\varphi-\alpha) =$ (en mettant, pour $d\varepsilon$, $\frac{\varepsilon \text{ coſ. } (\varphi-\alpha)\, d\alpha}{\text{ſin. } (\varphi-\alpha)}$) $-\varepsilon$ ſin. $(\varphi-\alpha) + \frac{\varepsilon\, d\alpha}{\text{ſin. } (\varphi-\alpha)\, d\varphi}$. Donc on aura au lieu de l'équation

$$\frac{d^2 q}{d\varphi^2} + q + \frac{V}{C - 2\int Q r^2 d\varphi} = 0,$$

ces deux-ci

$$\frac{\varepsilon\, d\alpha}{\text{ſin. } (\varphi-\alpha)\, d\varphi} + \frac{V}{\frac{D}{1+\varepsilon^2} - 2\int Q r^2\, d\varphi} = 0,$$

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{d\alpha}{\text{tang. } (\varphi-\alpha)} = 0,$$

par leſquelles on connoitra le mouvement de la ligne des nœuds, & la variation de l'inclinaiſon de l'orbite.

2.° On aura $s = \frac{I+J}{D}\sqrt{(1+q^2)} + \eta$ coſ. $(\varphi-\omega)$; d'où l'on tire $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{I+J}{D} \times \frac{q\, dq}{d\varphi\sqrt{(1+q^2)}} - \eta$ ſin. $(\varphi-\omega)$ $+ \frac{d\eta}{d\varphi}$ coſ. $(\varphi-\omega) + \frac{d\omega}{d\varphi}\eta$ ſin. $(\varphi-\omega)$. Suppoſons ici à l'imitation de ce que nous venons de faire plus haut, coſ. $(\varphi-\omega)\, d\eta = -\eta$ ſin. $(\varphi-\omega)\, d\omega$, de manière que l'on ait ſimplement $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{I+J}{D} \times \frac{q\, dq}{d\varphi\sqrt{(1+q^2)}}$ $-\eta$ ſin. $(\varphi-\omega)$, c'eſt-à-dire que la variation inſtan-

tanée du rayon $r = \frac{1}{s}$, soit la même que si l' ellipse demeuroit constante, & différentiant cette valeur de $\frac{ds}{d\varphi}$, on trouvera $\frac{d^2 s}{d\varphi^2} = \frac{I+J}{D}\left(\frac{dq^2 + q\,d^2q}{d\varphi^2 \sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q^2 dq^2}{d\varphi^2 (1+q^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$
$- \eta \operatorname{cof.}(\varphi - \omega) - \frac{d\eta}{d\varphi} \operatorname{fin.}(\varphi - \omega) + \frac{d\omega}{d\varphi}\eta \operatorname{cof.}(\varphi - \omega)$;
or $\frac{dq^2}{d\varphi^2 \sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q^2 dq^2}{d\varphi^2(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dq^2}{d\varphi^2(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} =$ (à cause de $\frac{dq^2}{d\varphi^2} + q^2 = \varepsilon^2$) $\frac{\varepsilon^2 - q^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1+\varepsilon^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{(1+q^2)}}$; de plus $\frac{d^2 q}{d\varphi^2} = -q - \frac{V}{C - 2\int Q r^2 d\varphi}$, donc
$\frac{q\,d^2 q}{d\varphi^2 \sqrt{(1+q^2)}} = -\frac{q^2}{\sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q}{\sqrt{(1+q^2)}} \times \frac{V}{C - 2\int Q r^2 d\varphi}$
$= -\sqrt{(1+q^2)} + \frac{1}{\sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q}{\sqrt{(1+q^3)}} \times \frac{V}{C - 2\int Q r^2 d\varphi}$;
donc on aura (à cause de $d\eta = -\frac{\eta \operatorname{fin.}(\varphi - \omega)}{\operatorname{cof.}(\varphi - \omega)} d\omega$) $\frac{d^2 s}{d\varphi^2}$
$= \frac{I+J}{D}\left(\frac{1+\varepsilon^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{(1+q^2)} - \frac{q}{\sqrt{(1+q^2)}} \times \frac{V}{C - 2\int Q r^2 d\varphi}\right)$
$- \eta \operatorname{cof.}(\varphi - \omega) + \frac{\eta\, d\omega}{d\varphi \operatorname{cof.}(\varphi - \omega)}$. De sorte que l'équation

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s - \frac{(I+J)(1+q^2)^{\frac{3}{2}} + U}{C - 2\int Q r^2 d\varphi} = 0$$

se changera en ces deux-ci

$$\frac{\eta\, d\omega}{\text{cof.}(\varphi-\omega)d\varphi} - \frac{U + \frac{I+J}{D}\left(2\frac{1+\varepsilon^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}}\int Q r^3 d\varphi + \frac{q}{\sqrt{(1+q^2)}}V\right)}{\frac{D}{1+\varepsilon^2} - 2\int Q r^2 d\varphi} = 0$$

$$\frac{d\eta}{\eta} + \text{tang.}\ (\varphi - \omega)\, d\varphi = 0,$$

lefquelles ferviront à trouver η, & ω.

Au refte dès qu'on aura trouvé r, & q en φ, ou bien r, q, & φ en t, on pourra, fi l'on veut, trouver tout de fuite les valeurs de α, ε, ω, & η; car les équations $q = \varepsilon$ fin. $(\varphi - \alpha)$ & $\frac{dq}{d\varphi} = \varepsilon$ cof. $(\varphi - \alpha)$ donneront

$\varepsilon = \sqrt{[q^2 + (\frac{dq}{d\varphi})^2]}$, & tang. $(\varphi - \alpha) = \frac{q\, d\varphi}{dq}$.

Et de même les équations $s = \frac{I+J}{D}\sqrt{(1+q^2)} + \eta$ cof. $(\varphi - \omega)$, & $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{I+J}{D} \times \frac{q\, dq}{d\varphi \sqrt{(1+q^2)}} - \eta$ fin. $(\varphi - \omega)$, donneront, en faifant pour abreger $S - \frac{I+J}{D}\sqrt{(1+q^2)} = u$,

$\eta = \sqrt{[u^2 + (\frac{du}{d\varphi})^2]}$, & tang. $(\varphi - \omega) = -\frac{du}{u\, d\varphi}$.

LXXII. Les obfervations nous apprenent que le mouvement de Jupiter autour du Soleil eft à peu près circulaire & uniforme, & que le plan de fon orbite ne fait qu'un très-petit angle avec celui de l' écliptique; d' où il s' enfuit que fi on nomme a la diftance moyenne de Jupiter au Soleil, & h fa viteffe angulaire moyenne, on pourra fuppofer

$$r = a(1 + iy),\ \varphi = ht + ix,\ q = iz,$$

y, x, z étant des quantités variables, & i un coéficient

très-petit ; où il faut remarquer que les valeurs de y & de $\frac{dx}{dt}$ ne doivent renfermer aucun terme tout conſtant ; autrement a & h ne ſeroient plus les valeurs moyennes de r & de $\frac{d\phi}{dt}$ contre l' hypothèſe.

Cela poſé, ſi on fait ces ſubſtitutions dans les équations (i) de l' Art. LXVIII, & qu'on diviſe la première par a, on aura, en pouſſant la préciſion juſqu'aux quantités de l' ordre de i^3,

$$i\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{(c-\int Q\,dt)^2}{a^4}(1 - 3iy + 6i^2y^2 - 10i^3y^3)$$
$$+ \frac{I+J}{a^3}(1 - 2iy + 3i^2y^2 - \frac{3}{2}i^2z^2 - 4i^3y^3 + 3i^3yz^2)$$
$$+ \frac{R}{a} = 0,$$

$$i\frac{d^2z}{dt^2} + i\frac{(c-\int Q\,dt)^2}{a^4}z(1 - 4iy + 10i^2y^2) +$$
$$2i^2\left(\frac{dz\,dy}{dt^2} - iy\frac{dz\,dy}{dt^2}\right) + \frac{P-Rq}{r} = 0,$$

$$h + i\frac{dx}{dt} - \frac{c-\int Q\,dt}{a^2}(1 - 2iy + 3i^2y^2 - 4i^3y^3)$$
$$= 0.$$

On voit d'abord par ces équations que les quantités $\frac{(c-\int Q\,dt)^2}{a^4} + \frac{I+J}{a^3} + \frac{R}{a}$, $\frac{P-Rq}{r}$, & $h - \frac{c-\int Q\,dt}{a^2}$ doivent être chacune très-petites de l' ordre de i, pour que les hypothéſes que nous avons faites puiſſent ſubſiſter.

Suppoſons donc

$$\left.\begin{aligned} \frac{c-\int Q\,dt}{a^2} &= h + iX \\ \frac{I+J}{a^3} + \frac{R}{a} &= h^2 + iY \\ \frac{P-Rq}{r} &= iZ, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(k)}$$

& les équations précédentes étant divisées par i deviendront, en faisant $b = \frac{I+J}{a^3}$,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (3h^2 - 2b)y + Y - 2hX$$
$$- i(6h^3 - 3b)y^2 - \frac{3}{2}ib\zeta^2 + 6ihyX - iX^2$$
$$+ i^2(10h^2 - 4b)y^3 + 3i^2by\zeta^2 - 12i^2hy^2X + 3i^2yX^2 = 0,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + h^2\zeta + Z$$
$$- 4ih^2\zeta y + 2i\frac{dzdy}{dt^2} + 2ih\zeta X$$
$$+ 10i^2h^2\zeta y^2 - 2i^2\frac{dzdy}{dt^2}y - 8i^2h\zeta yX + i^2\zeta X^2 = 0;$$
$$\frac{dx}{dt} + 2hy - X$$
$$- 3ihy^2 + 2iyX$$
$$+ 4i^2hy^3 - 3i^2y^2X = 0.$$

Si l' on nomme de même a' la distance moyenne de Saturne au Soleil, h' sa vitesse angulaire moyenne, & qu'on suppose

$$r' = a'(1 + iy'),\ \phi' = h't + ix',\ q' = i\zeta',$$

on aura les mêmes équations que ci-devant, en marquant seulement les lettres d' un trait.

LXXIII. Il faut maintenant faire les mêmes substitutions dans les valeurs de P, Q, R, & premiérement dans celle de $\frac{1}{v^3}$ qui entre dans la valeur de ces quantités, mais pour rendre le calcul plus simple nous n' aurons égard dans cette opération qu'aux termes de l' ordre de i; une plus grande précision étant d' ailleurs inutile dans la présente Recherche.

Mettons d' abord $a(1 + iy)$ à la place de r, & $a'(1 + iy')$ à la place de r', & nous aurons, en négli-

négligeant les termes q^2, qq', & q'^2 qui seroient du second ordre, & faisant pour plus de simplicité $\phi - \phi' = \theta$, $v = \sqrt{[a^2(1 + 2iy) - 2aa'(1 + iy + iy')\text{cos.}\,\theta + a'^2(1 + 2iy')]}$, savoir

$v = \sqrt{[a^2 - 2aa'\text{ cos.}\,\theta + a'^2 + 2i(a^2y + a'^2y') - 2iaa'(y + y')\text{ cos.}\,\theta]}$,

d'où l'on tire par les séries

$$\frac{1}{v^3} = [a^2 - 2aa'\text{ cos.}\,\theta + a'^2]^{-\frac{3}{2}} - 3i[a^2y + a'^2y' - aa'(y + y')\text{ cos.}\,\theta] \times [a^2 - 2aa'\text{ cos.}\,\theta + a'^2]^{-\frac{5}{2}}.$$

Or les quantités $[a^2 - 2aa'\text{ cos.}\,\theta + a'^2]^{-\frac{3}{2}}$ & $[a^2 - 2aa'\text{ cos.}\,\theta + a'^2]^{-\frac{5}{2}}$ étant irrationnelles, il est nécessaire de les réduire à une forme rationelle, sans quoi l'intégration des équations proposées ne réussiroit point.

Pour cela je remarque qu'en faisant $a' = \alpha a$, la question se réduit à changer en une fonction rationelle une quantité de cette forme $(1 - 2\alpha\text{ cos.}\,\theta + \alpha^2)^{-s}$, dans laquelle α est une fraction moindre que l'unité. Or puisque $1 - 2\alpha\text{ cos.}\,\theta + \alpha^2 = [1 - \alpha(\text{cos.}\,\theta + \text{sin.}\,\theta\sqrt{-1})] \times [1 - \alpha(\text{cos.}\,\theta - \text{sin.}\,\theta\sqrt{-1})]$, on élevera la quantité $1 - \alpha(\text{cos.}\,\theta + \text{sin.}\,\theta\sqrt{-1})$ à la puissance $-s$; ce qui donnera, à cause de $(\text{cos.}\,\theta \pm \text{sin.}\,\theta\sqrt{-1})^m = \text{cos.}\,m\theta + \text{sin.}\,m\theta\sqrt{-1}$,

$$[1 - \alpha(\text{cos.}\,\theta \pm \text{sin.}\,\theta\sqrt{-1})]^{-s} = 1 + s\alpha(\text{cos.}\,\theta \pm \text{sin.}\,\theta\sqrt{-1}) + \frac{s(s+1)}{2}\alpha^2(\text{cos.}\,2\theta \pm \text{sin.}\,2\theta\sqrt{-1}) + \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^3(\text{cos.}\,3\theta \pm \text{sin.}\,3\theta\sqrt{-1}) + \&c.$$

De sorte que si l'on fait

$$P = 1 + s\alpha \text{ cos. } \theta + \frac{s(s+1)}{2}\alpha^2 \text{ cos. } 2\theta$$
$$+ \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^3 \text{ cos. } 3\theta + \&c.$$
$$Q = s\alpha \text{ sin. } \theta + \frac{s(s+1)}{2}\alpha^2 \text{ sin. } 2\theta$$
$$+ \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^3 \text{ sin. } 3\theta + \&c.$$

on aura

$[1 - \alpha(\text{cos. } \theta + \text{sin. } \theta\sqrt{-1})]^{-s} = P + Q\sqrt{-1}$, &
$[1 - \alpha(\text{cos. } \theta - \text{sin. } \theta\sqrt{-1})]^{-s} = P - Q\sqrt{-1}$.
Donc $(1 - 2\alpha \text{ cos. } \theta + \alpha^2)^{-s} = P^2 + Q^2$.

Or si on fait les quarrés des deux séries P & Q, & qu'on ajoute ensemble les termes qui auront le même coéficient, en faisant attention que cos. $m\theta \times$ cos. $n\theta$ + sin. $m\theta \times$ sin. $n\theta$ = cos. $(m - n)\theta$, on trouvera
$(1 - 2\alpha \text{ cos. } \theta + \alpha^2)^{-s} = A + B \text{ cos. } \theta + C \text{ cos. } 2\theta + D \text{ cos. } 3\theta + \&c.$
les coéficiens A, B, C &c. étant exprimés de la manière suivante

$$A = 1 + s^2\alpha^2 + \left(\frac{s(s+1)}{2}\right)^2\alpha^4 + \left(\frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\right)^2\alpha^6 + \&c.$$
$$\frac{B}{2} = s\alpha + s \times \frac{s(s+1)}{2}\alpha^3 + \frac{s(s+1)}{2} \times \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^5 + \&c.$$
$$\frac{C}{2} = \frac{s(s+1)}{2}\alpha^2 + s \times \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^4 + \frac{s(s+1)}{2} \times \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{2.3.4}\alpha^6 + \&c.,$$

& ainsi de suite.

Au reste quand on aura déterminé par ces séries les deux premiers coéficiens A & B, on trouvera tous les suivans d'une manière très-simple & très-facile ; car si on prend les différentielles logarithmiques de l'équation

$(1 - 2\alpha \cos. \theta + \alpha^2)^{-s} = A + B \cos. \theta + C \cos. 2\theta +$ &c.
& qu'après avoir multiplié les deux membres en croix, on compare terme à terme, on aura, comme M. Euler l'a trouvé le premier dans ſes *Recherches ſur le mouvement de Saturne*,

$$C = \frac{(1 + \alpha^2)B - 2s\alpha A}{(2 - s)\alpha}$$

$$D = \frac{2(1 + \alpha^2)C - (1 + s)\alpha B}{(3 - s)\alpha}$$

$$E = \frac{3(1 + \alpha^2)D - (2 + s)\alpha C}{(4 - s)\alpha}$$

&c.

Connoiſſant ainſi tous les coéficiens de la ſérie qui repréſente $(1 - 2\alpha \cos. \theta + \alpha^2)^{-s}$, on trouvera tout de ſuite ceux de la ſérie qui exprime $(1 - 2\alpha \cos. \theta + \alpha^2)^{-s-1}$; car dénotant ces derniers par P, Q, R &c. il faudra que la ſérie $P + Q \cos. \theta + R \cos. 2\theta +$ &c. étant multipliée par $1 - 2\alpha \cos. \theta + \alpha^2$ devienne égale à la ſérie $A + B \cos. \theta + C \cos. 2\theta +$ &c. La multiplication faite, on trouvera, en comparant les deux premiers termes, $A = (1 + \alpha^2)P - \alpha Q$, & $B = (1 + \alpha^2)Q - 2\alpha P - \alpha R$. Or R eſt donné en P & Q de la même manière que C eſt donné en A & B, de ſorte qu'on aura, en mettant $s + 1$ à la place de s,

$$R = \frac{(1 + \alpha^2)Q - 2(s + 1)\alpha P}{(1 - s)\alpha}.$$

Donc ſubſtituant cette valeur de R on aura deux équations en A, B, P, & Q, d'où l'on tirera

$$P = \frac{(1 + \alpha^2)A + \frac{s-1}{s}\alpha B}{(1 - \alpha^2)^2}$$

$$Q = \frac{\frac{s-1}{s}(1 + \alpha^2)B + 4\alpha A}{(1 - \alpha^2)^2}.$$

Enſuite on aura

$$S = \frac{2(1+\alpha^2)R-(2+s)\alpha Q}{(2-s)\alpha}$$

$$T = \frac{3(1+\alpha^2)S-(3+s)\alpha R}{(3-s)\alpha}$$

&c.

Tout ſe réduit donc à trouver les valeurs de A & de B, lorſque $s = \frac{3}{2}$; or les ſéries ci-deſſus donnent pour ce cas

$$A = 1 + \frac{9}{4}\alpha^2 + \frac{9.25}{4.16}\alpha^4 + \frac{9.25.49}{4.16.36}\alpha^6 + \&c.$$

$$\frac{B}{2} = \frac{3}{2}\alpha + \frac{9.5}{4.4}\alpha^3 + \frac{9.25.7}{4.16.6}\alpha^5 + \&c.$$

leſquelles, à cauſe de $\alpha = \frac{5}{9}$ environ, dans la théorie de Jupiter & de Saturne, ſeront aſsès convergentes pour qu'on puiſſe ſe contenter d'un petit nombre de termes.

Pour faciliter le calcul de ces deux ſéries, leſquelles peuvent auſſi être d'uſage dans pluſieurs autres occaſions, je vais donner ici les logarithmes des différentes puiſſances de α qui entrent dans les valeurs de A & de $\frac{B}{2}$.

	log. des coéficiens		*log. des coéficiens*		*log. des coéficiens*
α	0.1760913	α^2	0.3521825	α^3	0.4490925
α^4	0.5460025	α^5	0.6129493	α^6	0.6798961
α^7	0.7310486	α^8	0.7822012	α^9	0.8235939
α^{10}	0.8649865	α^{11}	0.8997486	α^{12}	0.9345108
α^{13}	0.9644740	α^{14}	0.9944372	α^{15}	1.0207661

	log. des coéficiens		log. des coéficiens		log. des coéficiens
α^{16}	1.0470951	α^{17}	1.0705762	α^{18}	1.0940573
α^{19}	1.1152466	α^{20}	1.1364359	α^{21}	1.1557410
α^{22}	1.1750462	α^{23}	1.1927749	α^{24}	1.2105037
α^{25}	1.2268941	α^{26}	1.2432845	α^{27}	1.2585245
α^{28}	1.2737645	α^{29}	1.2880049	α^{30}	1.3022454
α^{31}	1.3156093	α^{32}	1.3289733	α^{33}	1.3415624
α^{34}	1.3541515	α^{35}	1.3660508	α^{36}	1.3779500
α^{37}	1.3892310	α^{38}	1.4005120	α^{39}	1.4112359
α^{40}	1.4219598	&c.	&c.	&c.	&c.

En examinant cette table il eſt aiſé de voir que les différences des logarithmes forment une progreſſion décroiſſante ; d'où il s'enſuit que, ſi après avoir pris la ſomme d' un nombre quelconque de termes de l' une ou de l'autre ſérie, on en regarde le reſte comme une progreſſion géométrique, l'erreur ſera toujours moindre que la ſomme de cette progreſſion; ainſi il ſera aiſé de juger de la quantité de l' approximation.

LXXIV. Suppoſons donc

$$(a^2 - 2\,a\,a'\,\text{coſ.}\,\theta + a'^2)^{-\frac{3}{2}} = A\,1 + B\,1\ \text{coſ.}\,\theta + C\,1\ \text{coſ.}\,2\,\theta + D\,1\ \text{coſ.}\,3\,\theta + \&c.\quad \&$$

$$(a^2 - 2\,a\,a'\,\text{coſ.}\,\theta + a'^2)^{-\frac{5}{2}} = P\,1 + Q\,1\ \text{coſ.}\,\theta + R\,1\ \text{coſ.}\,2\,\theta + S\,1\ \text{coſ.}\,3\,\theta + \&c.$$

& nous aurons

$$\frac{1}{v^3} = A\,1 + B\,1\,\text{cof.}\,\theta + C\,1\,\text{cof.}\,2\,\theta + D\,1\,\text{cof.}\,3\,\theta + \&c.$$

$$- 3\,iy \left\{ a^2 P\,1 - aa' \frac{Q\,1}{2} + (a^2 Q\,1 - aa' P\,1 - aa' \frac{R\,1}{2})\,\text{cof.}\,\theta + (a^2 R\,1 - aa' \frac{Q\,1 + S\,1}{2}\,\text{cof.}\,2\,\theta + \&c. \right\}$$

$$- 3\,iy' \left\{ a'^2 P\,1 - aa' \frac{Q\,1}{2} + (a'^2 Q\,1 - aa' P\,1 - aa' \frac{R\,1}{2})\,\text{cof.}\,\theta + (a'^2 R\,1 - aa' \frac{Q\,1 + S\,1}{2})\,\text{cof.}\,2\,\theta + \&c. \right\}$$

ou bien, en faifant pour abreger,

$$P\,2 = 3\,(aa' \frac{Q\,1}{2} - a^2 P\,1)$$

$$Q\,2 = 3\,(aa' \frac{2\,P\,1 + R\,1}{2} - a^2 Q\,1)$$

$$R\,2 = 3\,(aa' \frac{Q\,1 + S\,1}{2} - a^2 R\,1)$$

$$S\,2 = 3\,(aa' \frac{R\,1 + T\,1}{2} - a^2 S\,1)$$

&c.

$$P\,3 = 3\,(aa' \frac{Q\,1}{2} - a'^2 P\,1)$$

$$Q\,3 = 3\,(aa' \frac{2\,P\,1 + R\,1}{2} - a'^2 Q\,1)$$

$$R\,3 = 3\,(aa' \frac{Q\,1 + S\,1}{2} - a'^2 R\,1)$$

$$S\,3 = 3\,(aa' \frac{R\,1 + T\,1}{2} - a'^2 S\,1)$$

&c.

$$\frac{1}{v^3} = A\,1 + B\,1\,\text{cof.}\,\theta + C\,1\,\text{cof.}\,2\,\theta + D\,1\,\text{cof.}\,3\,\theta + \&c.$$

$$+ iy\,(P\,2 + Q\,2\,\text{cof.}\,\theta + R\,2\,\text{cof.}\,2\,\theta + S\,2\,\text{cof.}\,3\,\theta + \&c.)$$

$$+ iy'\,(P\,3 + Q\,3\,\text{cof.}\,\theta + R\,3\,\text{cof.}\,2\,\theta + S\,3\,\text{cof.}\,3\,\theta + \&c.)$$

LXXV. Cela posé, on aura d' abord

$\frac{r}{v^3} = a\,(A1 + B1\ \text{cos}\,\theta + C1\ \text{cos}\,2\theta + D1\ \text{cos}\,3\theta + \&c.)$
$+ iya\,[A1 + P2 + (B1 + Q2)\ \text{cos}\,\theta + (C1 + R2)\ \text{cos}\,2\theta$
$+ (D1 + S2)\ \text{cos}\,3\theta + \&c.]$
$+ iy'a\,(P3 + Q3\ \text{cos}\,\theta + R3\ \text{cos}\,2\theta + S3\ \text{cos}\,3\theta + \&c.)$

Et de même

$\frac{r'}{v^3} = a'\,(A1 + B1\ \text{cos}\,\theta + C1\ \text{cos}\,2\theta + D1\ \text{cos}\,3\theta + \&c.)$
$+ iya'\,(P2 + Q2\ \text{cos}\,\theta + R2\ \text{cos}\,2\theta + S2\ \text{cos}\,3\theta + \&c.)$
$+ iy'a'\,[A1 + P3 + (B1 + Q3)\ \text{cos}\,\theta + (C1 + R3)\ \text{cos}\,2\theta$
$+ (D1 + S3)\ \text{cos}\,3\theta + \&c.]$

Donc multipliant cette dernière quantité par cos. θ, on aura

$\frac{r'}{v^3}\ \text{cos}\,\theta = a'\,[\frac{B1}{2} + (A1 + \frac{C1}{2})\ \text{cos}\,\theta + \frac{B1 + D1}{2}\ \text{cos}\,2\theta$
$+ \&c.]$
$+ iya'\,[\frac{Q2}{2} + (P2 + \frac{R2}{2})\ \text{cos}\,\theta + \frac{Q2 + S2}{2}\ \text{cos}\,2\theta$
$+ \&c.]$
$+ iy'a'\,[\frac{B1 + Q3}{2} + (A1 + P3 + \frac{C1 + R3}{2})\ \text{cos}\,\theta$
$+ \frac{B1 + Q3 + D1 + S3}{2}\ \text{cos}\,2\theta + \&c.]$.

Or $\frac{r'}{u'^3} = \frac{1}{r'^2(1 + q'^2)^{\frac{3}{2}}}$ = (en négligeant les termes de l' ordre de i^2) $\frac{1 - 2iy'}{a'^2}$, & par conséquent

$$\frac{r'}{u'^3}\ \text{cos}\,\theta = \frac{1}{a'^2}\ \text{cos}\,\theta - 2iy'\frac{1}{a'^2}\ \text{cos}\,\theta.$$

Donc si on fait

$$A2 = a^3 A1 - a^2 a' \frac{B1}{2}$$

$$B\,2 = a^3 B\,1 - a^2 a' \frac{2A\,1 + C\,1}{2} + \frac{a^2}{a'^2}$$

$$C\,2 = a^3 C\,1 - a^2 a' \frac{B\,1 + D\,1}{2}$$

$$D\,2 = a^3 D\,1 - a^2 a' \frac{C\,1 + E\,1}{2}$$

&c.

$$P\,4 = a^3 (A\,1 + P\,2) - a^2 a' \frac{Q\,2}{2}$$

$$Q\,4 = a^3 (B\,1 + Q\,2) - a^2 a' \frac{2P\,2 + R\,2}{2}$$

$$R\,4 = a^3 (C\,1 + R\,2) - a^2 a' \frac{Q\,2 + S\,2}{2}$$

$$S\,4 = a^3 (D\,1 + S\,2) - a^2 a' \frac{R\,2 + T\,2}{2}$$

&c.

$$P\,5 = a^3 P\,3 - a^2 a' \left(\frac{B\,1}{2} + \frac{Q\,3}{2}\right)$$

$$Q\,5 = a^3 Q\,3 - a^2 a' \left(\frac{2A\,1 + C\,1}{2} + \frac{2P\,3 + R\,3}{2}\right) - \frac{2a}{a'^2}$$

$$R\,5 = a^3 R\,3 - a^2 a' \left(\frac{B\,1 + D\,1}{2} + \frac{Q\,3 + S\,3}{2}\right)$$

$$S\,5 = a^3 S\,3 - a^2 a' \left(\frac{C\,1 + E\,1}{2} + \frac{R\,3 + T\,3}{2}\right)$$

&c.

on aura (*Art. LXVII.*)

$$R = \frac{J'}{a^2} (A_2 + B_2 \text{ cof. } \theta + C_2 \text{ cof. } 2\theta + D_2 \text{ cof. } 3\theta + \&c.)$$
$$+ i \frac{J'}{a^2} y (P_4 + Q_4 \text{ cof. } \theta + R_4 \text{ cof. } 2\theta + S_4 \text{ cof. } 3\theta + \&c.)$$
$$+ i \frac{J'}{a^2} y' (P_5 + Q_5 \text{ cof. } \theta + R_5 \text{ cof. } 2\theta + S_5 \text{ cof. } 3\theta + \&c.).$$

Maintenant on aura

$\frac{r'}{v^2}$ fin.

$\frac{r'}{v^3}$ sin. $\theta = a' [(A1 - \frac{C1}{2}) \text{sin.}\theta + \frac{B1 - D1}{2} \text{sin. } 2\,\theta +$ &c.]

$+ i y a' [(P2 - \frac{R2}{2} \text{sin. } \theta + \frac{Q2 - S2}{2} \text{sin. } 2\,\theta +$ &c.]

$+ i y' a' [(A1 + P3 - \frac{C1 + R3}{2} \text{sin. } \theta + (\frac{B1 + Q3}{2} -$
$\frac{D1 + S3}{2}) \text{sin. } 2\,\theta +$ &c.] &

$$\frac{r'}{u'^3} \text{sin. } \theta = \frac{1}{a'^2} \text{sin. } \theta - 2\, i y' \frac{1}{a'^2} \text{sin. } \theta .$$

Donc si on multiplie ces deux quantités par $r = a\,(i + i y)$, & qu'on fasse

$$A3 = a^2 a' \frac{2A1 - C1}{2} - \frac{a^2}{a'^2}$$

$$B3 = a^2 a' \frac{B1 - D1}{2}$$

$$C3 = a^2 a' \frac{C1 - E1}{2}$$

&c.

$$P6 = a^2 a' (\frac{2A1 - C1}{2} + \frac{2P2 - R2}{2}) - \frac{a^2}{a'^2}$$

$$Q6 = a^2 a' (\frac{B1 - D1}{2} + \frac{Q2 - S2}{2})$$

$$R6 = a^2 a' (\frac{C1 - E1}{2} + \frac{R2 - T2}{2})$$

&c.

$$P7 = a^2 a' (\frac{2A1 - C1}{2} + \frac{2P3 - R3}{2}) + \frac{2a^2}{a'^2}$$

$$Q7 = a^2 a' (\frac{B1 - D1}{2} + \frac{Q3 - S3}{2})$$

$$R7 = a^2 a' (\frac{C1 - E1}{2} + \frac{R3 - T3}{2})$$

&c.

on aura (*Art. cité*)

$$Q = \frac{J'}{a} (A\,3 \text{ fin. } \theta + B\,3 \text{ fin. } 2\,\theta + C\,3 \text{ fin. } 3\,\theta + \&c.)$$

$$+ i \frac{J'}{a} y (P6 \text{ fin. } \theta + Q\,6 \text{ fin. } 2\,\theta + R\,6 \text{ fin. } 3\,\theta + \&c.)$$

$$+ i \frac{J'}{a} y' (P\,7 \text{ fin. } \theta + Q\,7 \text{ fin. } 2\,\theta + R\,7 \text{ fin. } 3\,\theta + \&c.)$$

Enfin on a $\frac{p - p'}{v^3} = i (z \frac{r}{v^3} - z' \frac{r'}{v^3})$ & $\frac{p'}{u'^3} = i z' \frac{1}{r'^2 (1 + q'^2)}$;

d'où, en négligeant les termes de l'ordre de i^2, on aura
$P = i J' [(z\,a - z' a') \times (A\,1 + B\,1 \text{ cof. } \theta + C\,1 \text{ cof. } 2\,\theta + \&c.) + \frac{z'}{a'^2}]$.

De forte que si on fait

$$A\,4 = a^3 A\,1 - A\,2$$
$$B\,4 = a^3 B\,1 - B\,2$$
$$C\,4 = a^3 C\,1 - C\,2$$
&c.

$$A\,5 = \frac{a^2}{a'^2} - a^2 a' A\,1$$
$$B\,5 = - a^2 a' B\,1$$
$$C\,5 = - a^2 a' C\,1$$
&c.

on aura, aux quantités de l'ordre de i^2 près,

$$\frac{P - R q}{r}$$

$$= i \frac{J'}{a^3} z (A4 + B4 \text{ cof. } \theta + C4 \text{ cof. } 2\theta + D4 \text{ cof. } 3\theta + \&c.)$$

$$+ i \frac{J'}{a^3} z' (A5 + B5 \text{ cof. } \theta + C5 \text{ cof. } 2\theta + D5 \text{ cof. } 3\theta + \&c.)$$

Et il ne reftera plus, pour achever les fubftitutions, qu'à mettre au lieu de θ, c'eft-à-dire au lieu de $\varphi - \varphi'$ fa valeur $(h - h') t + i (x - x')$, ou bien, (en faifant $h - h' = H$) $H t + i (x - x')$, ce qui eft très-facile ; car il

n'y aura qu'à mettre partout dans les expressions précédentes Ht à la place de θ, & ajouter ensuite à la valeur de R la quantité

$$-i\frac{J'}{a^2}(x-x')\times(\text{B}2\,\text{sin.}\,Ht+2\text{C}2\,\text{sin.}\,2Ht+3\text{D}2\,\text{sin.}\,3Ht+\&c.)$$

& à celle de Q la quantité

$$i\frac{J'}{a}(x-x')\times(\text{A}3\,\text{cos.}\,Ht+2\text{B}3\,\text{cos.}\,2Ht+3\text{C}3\,\text{cos.}\,3Ht+\&c.).$$

LXXVI. On sait que les masses de Jupiter & de Saturne sont très-petites par rapport à celle du Soleil, ensorte qu'on ne peut supposer $\frac{J}{I}=i\text{m}$ & $\frac{J'}{I}=i\text{m}'$; donc puisque $b=\frac{I+J}{a^3}$ (*Art. LXXII.*) on aura $J'=i\frac{\text{m}'}{1+i\text{m}}a^3b$ où, faisant $\frac{\text{m}'}{1+i\text{m}}b=\text{n}$, $J'=ia^3\text{n}$; d'où il s'ensuit que les quantités P, Q, R sont très-petites de l'ordre de i, & qu'ainsi pour satisfaire aux équations (k) de l'Art. cité, il est nécessaire de supposer $\frac{c}{a^2}$ presque égal à h & $\frac{I+J}{a^3}$, ou bien b presque égal à h^2.

Soit donc $\frac{c}{a^2}-h=i\text{f}$ & $b-h^2=i\text{g}$, & les équations (k) donneront, après avoir substitué les valeurs de R, Q, & $\frac{P-Rq}{r}$ trouvées ci-dessus, & divisé le tout par i,

$$\begin{aligned}X=\text{f}&+\frac{\text{n}}{H}(\text{A}3\ \text{cos.}\ Ht+\tfrac{1}{2}\text{B}3\ \text{cos.}\ 2Ht+\&c.)\\&-i\text{n}\textstyle\int y(\text{P}6\ \text{sin.}\ Ht+\text{Q}6\ \text{sin.}\ 2Ht+\&c.)\,dt\\&-i\text{n}\textstyle\int y'(\text{P}7\ \text{sin.}\ Ht+\text{Q}7\ \text{sin.}\ 2Ht+\&c.)\,dt\\&-i\text{n}\textstyle\int(x-x')\times(\text{A}3\ \text{cos.}\ Ht+\text{B}3\ \text{cos.}\ 2Ht+\&c.)\,dt,\end{aligned}$$

$$Y = g + n(A2 + B2 \text{ cof. } Ht + C2 \text{ cof. } 2Ht + \&c.)$$
$$+ iny(P4 + Q4 \text{ cof. } Ht + R4 \text{ cof. } 2Ht + \&c.)$$
$$+ iny'(P5 + Q5 \text{ cof. } Ht + R5 \text{ cof. } 2Ht + \&c.)$$
$$- in(x - x') \times (B2 \text{ fin. } Ht + C2 \text{ fin. } 2Ht + \&c.),$$
$$Z = inz(A4 + B4 \text{ cof. } Ht + C4 \text{ cof. } 2Ht + \&c.)$$
$$+ inz'(A5 + B5 \text{ cof. } Ht + C5 \text{ cof. } H2t + \&c.).$$

LXXVII. Ayant ainſi les valeurs de X, Y, & Z, il ne s' agira plus que de les ſubſtituer dans les équations de l'Art. LXXII. Or ſi on met $h^2 + ig$ au lieu de b, qu'on néglige les quantités affectées de $i^2 n$ & de in^2 (parceque n eſt auſſi une quantité fort petite comme on le verra plus bas), & qu'après avoir ajouté enſemble les coéficiens des termes analogues on faſſe

$$A6 = B2 - \frac{2(h + if)}{H} A3$$
$$B6 = C2 - \frac{2(h + if)}{2H} B3$$
&c.
$$A7 = B4 + \frac{2h}{H} A3$$
$$B7 = C4 + \frac{2h}{2H} B3$$
&c.
$$P8 = Q4 + \frac{6h}{H} A3$$
$$Q8 = R4 + \frac{6h}{2H} B3$$
&c.

& enſuite

$$\Phi = A6 \text{ cof. } Ht + B6 \text{ cof. } 2Ht + \&c.$$
$$+ iy(P8 \text{ cof. } Ht + Q8 \text{ cof. } 2Ht + \&c.)$$
$$+ iy'(P5 + Q5 \text{ cof. } Ht + R5 \text{ cof. } 2Ht + \&c.)$$
$$+ 2ih\int y(P6 \text{ fin. } Ht + Q6 \text{ fin. } 2Ht + \&c.)dt$$

$$+ 2 i h \int y' (P 7 \text{ fin. } H t + Q 7 \text{ fin. } 2 H t + \&c.) dt$$
$$- i (x - x) \times (B 2 \text{ fin. } H t + C 2 \text{ fin. } 2 H t + \&c.)$$
$$+ 2 i h \int (x - x') \times (A 3 \text{ cof. } Ht + B 3 \text{ cof. } 2Ht + \&c.) dt,$$
$$\Psi = z (A 7 \text{ cof. } H t + B 7 \text{ cof. } 2 H t + \&c.)$$
$$+ z' (A 5 + B 5 \text{ cof. } H t + C 5 \text{ cof. } 2 H t + \&c.)$$
$$\Xi = - \frac{1}{H} (A 3 \text{ cof. } H t + \frac{B 3}{2} \text{ cof. } 2 H t + \&c.)$$
$$+ \frac{2 i}{H} y (A 3 \text{ cof. } Ht + \frac{B 3}{2} \text{ cof. } 2 H t + \&c.)$$
$$+ i \int y (P 6 \text{ fin. } H t + Q 6 \text{ fin. } 2 H t + \&c.) d t$$
$$+ i \int y' (P 7 \text{ fin. } H t + Q 7 \text{ fin. } 2 H t + \&c.) d t$$
$$+ i \int (x - x) \times (A 3 \text{ cof. } Ht + B 3 \text{ cof. } 2Ht + \&c.) d t ,$$

on aura les équations ſuivantes

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + [h^2 + i (6 h \text{f} - 2 \text{g} + 3 i \text{f}^2 + \text{n P} 4)] y + \text{g} - 2 h \text{f} - i \text{f}^2 + \text{n A} 2 - 3 i [h^2 + i (4 h \text{f} - \text{g})] y^2 - \frac{3}{2} i (h^2 + i \text{g}) z^2 + 6 i^2 h^2 y^3 + 3 i^2 h^2 y z^2 + \text{n} \Phi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + [h^2 + i (2 h \text{f} + i \text{f}^2 + \text{n A} 4)] z - 4 i (h^2 + 2 i h \text{f}) z y + 2 i \frac{d z \, d y}{d t^2} + 10 i^2 h^2 z y^2 - 2 i^2 y \frac{d z \, d y}{d t^2} + i \text{n} \Psi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$

$$\frac{dx}{dt} + 2 (h + i \text{f}) y - \text{f} - 3 i (h + i \text{f}) y^2 + 4 i^2 h y^3 + \text{n} \Xi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (n)$$

Telles ſont les équations du mouvement de Jupiter, entant qu'il eſt altéré par l' action de Saturne.

On trouvera des équations ſemblables pour le mouvement de Saturne dérangé par Jupiter ; il ne faudra pour cela que mettre y', z', x' à la place de x, y, z & *viceverſa*, & marquer toutes les autres lettres d'un trait, à l'excep-

tion de H, laquelle étant $= h - h'$, deviendra $h' - h$, c' eſt-à-dire ſimplement négative.

LXXVIII. Je remarque maintenant que les équations (l) & (m) peuvent ſe réduire à cette forme plus ſimple $\frac{d^2 \mathrm{y}}{dt^2} + K^2 \mathrm{y} + n\,\mathrm{Y} = 0$, & $\frac{d^2 \mathrm{z}}{dt^2} + L^2 \mathrm{z} + i\,n\,\mathrm{Z} = 0$, en ſuppoſant

$$\mathrm{y} = y + \alpha + i\,(\beta y^2 + \gamma z^2) + i^2\,(\delta y^3 + \varepsilon y z^2 + \eta z \frac{dy\,dz}{dt^2}), \ \&$$

$$\mathrm{z} = z + i\,(\mu z y + \nu \frac{dz\,dy}{dt^2}) + i^2\,(\pi z^3 + \rho z y^2 + \sigma y \frac{dz\,dy}{dt^2}).$$

Pour le prouver, & déterminer en même tems les valeurs de α, β, γ &c. μ, ν, π &c., je prends d' abord les différentielles ſecondes de y & de z, j' ai

$$\frac{d^2 \mathrm{y}}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} + i\beta\,(2y \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy^2}{dt^2}) + i\gamma\,(2z \frac{d^2 z}{dt^2} + 2 \frac{dz^2}{dt^2}) + i^2\delta\,(3y^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6y \frac{dy^2}{dt^2}) + i^2\varepsilon\,(z^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2zy \frac{d^2 z}{dt^2} + 2y \frac{dz^2}{dt^2} + 4z \frac{dy\,dz}{dt^2}) + i^2\eta\,(2 \frac{dz^2}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy\,dz}{dt^2} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + z \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + z \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3 z}{dt^3} + 2z \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}),$$

$$\frac{d^2 \mathrm{z}}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} + i\mu\,(y \frac{d^2 z}{dt^2} + z \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dz\,dy}{dt^2}) + i\nu\,(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3 z}{dt^3} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}) + i^2\pi\,(3z^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + 6z \frac{dz^2}{dt^2}) + i^2\rho\,(y^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + 2zy \frac{d^2 y}{dt^2} + 2z \frac{dy^2}{dt^2} + 4y \frac{dz\,dy}{dt^2}) + i^2\sigma\,(2 \frac{dy^2}{dt^2} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + 3 \frac{dz\,dy}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + y \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3 z}{dt^3} + y \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + 2y \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}).$$

Ensuite je substitue à la place de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^3z}{dt}$, $\frac{dy^2}{dt^2}$, $\frac{dz^2}{dt^2}$ leurs valeurs tirées des équations (l) & (m), en négligeant les quantités qui seroient affectés de i^3, ou de i^2 n; & pour avoir les valeurs de $\frac{dy^2}{dt^2}$ & $\frac{dz^2}{dt^2}$ (car les autres se déduisent aisément des équations citées) je multiplie l'équation (l) par $2\,dy$, & l'équation (m) par $2\,dz$, & ensuite je les intégre; ce qui me donne (en négligeant les quantités de l'ordre de i^2 & de in, parceque $\frac{dy^2}{dt^2}$ & $\frac{dz^2}{dt^2}$ ne se trouvent que dans des termes déja affectés de i)

$$\frac{dy^2}{dt^2} + [h^2 + i(6hf - 2g)]y^2 + 2(g - 2hf - if^2 + nA2) + A - 2ih^2y^3 - 3ih^2\int z^2\,dy + 2n\int\Phi\,dy = 0,$$

$$\frac{dz^2}{dt^2} + (h^2 + 2ihf)z^2 + B - 8ih^2\int yz\,dz + 4i\int\frac{dz^2}{dt^2}dy + 2in\int\Psi\,dz = 0,$$

A, & B étant des constantes.

(Je conserve exprés le terme $2in\int\Psi\,dz$ parceque la quantité Ψ contient un terme de cette forme B 5 z' cos. Ht, lequel étant multiplié par dz, & ensuite intégré, après avoir substitué les valeurs de z & de z' en t, se trouvera divisé par des quantités de l'ordre de i).

Or l'équation (m) donne, en rejettant tous les termes affectés de i, $\frac{d^2z}{dt^2} + h^2 z = 0$; & par conséquent $\int z\frac{d^2z}{dt^2}dy + h^2\int z^2\,dy = 0$; mais $\int z\frac{d^2z}{dt^2}dy = z\frac{dy\,dz}{dt^2}$

$-\int(\frac{dz^2}{dt^2}dy + z\frac{d^2y}{dt^2}dz)$ = (en mettant au lieu de $\frac{dz^2}{dt^2}$ & de $\frac{d^2y}{dt^2}$ leurs valeurs approchées $-h^2z^2 - B$ & $-h^2y - g + 2hf$, car on peut négliger ici tous les termes affectés de i & de n) $z\frac{dydz}{dt^2} + h^2\int z^2dy + By + h^2\int yzdz + \frac{g-2hf}{2}z^2$ = (à cause de $\int yzdz = \frac{1}{2}yz^2 - \frac{1}{2}\int z^2dy$) $z\frac{dydz}{dt^2} + \frac{h^2}{2}\int z^2dy + By + \frac{h^2}{2}yz^2 + \frac{g-2hf}{2}z^2$. Donc on aura $\frac{3}{2}h^2\int z^2dy + \frac{h^2}{2}yz^2 + z\frac{dydz}{dt^2} + By + \frac{g-2hf}{2}z^2 = 0$; d'où l'on tire $\int z^2dy = -\frac{1}{3}yz^2 - \frac{2}{3h^2}z\frac{dydz}{dt^2} - \frac{2B}{3h^2}y - \frac{g-2hf}{3h^2}z^2$.

Donc si on met cette valeur dans la premiére des deux équations ci-dessus, & qu'on substitue dans la seconde à la place de $\int\frac{dz^2}{dt^2}dy$, $-h^2\int z^2dy - By$, & à la place de $\int\Psi dz$, $B5\int \text{cos}.\, Ht\, z' dz$, on aura après les réductions

$$\frac{dy^2}{dt^2} + [h^2 + i(6hf - 2g)]y^2 + 2[g - 2hf - i(f^2 - B) + nA2]y + A + i(g - 2hf)z^2 - 2ih^2y^3 + ih^2yz^2 + 2iz\frac{dydz}{dt^2} + 2n\int\Phi dy = 0 \quad (o)$$

$$\frac{dz^2}{dt^2} + [h^2 + 2ihf]z^2 + B - 4iBy - 4ih^2yz^2 + 2inB5\int \text{cos}.\, Ht\, z' dz = 0 \quad \ldots\ldots \quad (p)$$

Ces substitutions faites, on trouvera, en ordonnant les termes

$\frac{d^2y}{dt}$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = [\, - h^2 - i(6h\mathrm{f} - 2\mathrm{g} + 3i\mathrm{f}^2 + \mathrm{n}P4)$$

$$- 6i\beta(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f} - i\mathrm{f}^2 + \frac{2}{3}iB + \mathrm{n}A2) + 8i^2\gamma B$$

$$- 6i^2\delta A - 2i^2\varepsilon B + 2i^2\eta h^2 B\,]\,y$$

$$- (\mathrm{g} - 2h\mathrm{f} - i\mathrm{f}^2 + \mathrm{n}A2) - 2i\beta A - 2i\gamma B$$

$$+ 2i^2\eta(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f})B$$

$$+ [\,3ih^2 + 3i^2(4h\mathrm{f} - \mathrm{g}) - 4i\beta(h^2 + i(6h\mathrm{f}$$

$$- \mathrm{g})) - 15i^2\delta(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f})\,]\,y^2$$

$$+ [\,\frac{3}{2}i(h^2 + i\mathrm{g}) - 2i^2\beta(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f}) - 4i\gamma(h^2 + 2ih\mathrm{f})$$

$$- i^2\varepsilon(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f}) + 4i^2\eta h^2(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f})\,]\,z^2$$

$$+ [\,-6i^2h^2 + 10i^2\beta h^2 - 9i^2\delta h^2\,]\,y^3$$

$$+ [\,-3i^2h^2 + i^2\beta h^2 + 16i^2\gamma h^2 - 5i^2\varepsilon h^2 + 4i^2\eta h^4\,]\,yz^2$$

$$+ [\,-4i^2\beta - 4i^2\gamma + 4i^2\varepsilon - 5i^2\eta h^2\,]\,z\frac{dy\,dz}{dt^2}$$

$$+ \mathrm{n}[\,-\Phi - 2i\beta\Phi y - 4i\beta\int\Phi dy - 4i^2\gamma B\,5\int \mathrm{cos.}\,Htz'dz\,],$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = [\,-h^2 - i(2h\mathrm{f} + i\mathrm{f}^2 + \mathrm{n}A4) - i\mu(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f}$$

$$- i\mathrm{f}^2 + \mathrm{n}A2) + 2i\nu(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f} - i\mathrm{f}^2 + \mathrm{n}A2) \times$$

$$(h^2 + 2ih\mathrm{f}) - 3i^2\nu h^2(2A + B) - 6i^2\pi B - 2i^2\rho A$$

$$+ 2i^2\sigma h^2 A\,]\,z$$

$$+ [\,4i(h^2 + 2ih\mathrm{f}) - 2i\mu(h^2 + i(4h\mathrm{f} - \mathrm{g})) +$$

$$2i\nu(h^2 + i(6h\mathrm{f} - 2\mathrm{g})) \times (h^2 + 2ih\mathrm{f}) - 20i^2\nu h^2(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f})$$

$$- 6i^2\rho(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f}) + 6i^2\sigma h^2(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f})\,]\,zy$$

$$+ [\,-2i + 2i\mu - i\nu(2h^2 + i(20h\mathrm{f} - 8\mathrm{g}))$$

$$- 3i^2\sigma(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f})\,]\,\frac{dy\,dz}{dt^2}$$

$$+ [\,\frac{3}{2}i^2\mu h^2 - 6i^2\nu h^4 - 9i^2\pi h^2\,]\,z^3$$

$$+ [\,-10i^2h^2 + 7i^2\mu h^2 - 20i^2\nu h^4 - 5i^2\rho h^2 +$$

$$4i^2\sigma h^4\,]\,y^2 z$$

$+ [2i^2 - 2i^2\mu + 16i^2\nu h^2 + 4i^2\rho - 5i^2\sigma h^2]\, y\, \frac{dydz}{dt^2}$

$+ n[-i\Psi - i\mu\zeta\Phi - i\nu\frac{d\Phi dz}{dt^2} + 2i\nu h^2\zeta\Phi].$

Je mets donc ces valeurs de y, z, $\frac{d^2y}{dt^2}$ & $\frac{d^2z}{dt^2}$ dans les équations $\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + nY = 0$, & $\frac{d^2z}{dt^2} + L^2z + inZ = 0$, & ensuite j'égale à zéro les termes homogénes; ce qui me donne les équations suivantes

$-h^2 - i(6hf - 2g + 3if^2 + nP4) - 6i\beta(g - 2hf - if^2 + \frac{2}{3}iB + nA2) + 8i^2\gamma B - 6i^2\delta A - 2i^2\varepsilon B + 2i^2\eta h^2 B + K^2 = 0,$

$-(g - 2hf - if^2 + nA2) - 2i\beta A - 2i\gamma B + 2i^2\eta(g - 2hf)B + \alpha K^2 = 0,$

$3h^2 + 3i(4hf - g) - 4\beta(h^2 + i(6hf - 2g)) - 15i\delta(g - 2hf) + \beta K^2 = 0,$

$\frac{3}{2}(h^2 + ig) - 2i\beta(g - 2hf) - 4\gamma(h^2 + 2ihf) - i\varepsilon(g - 2hf) + 4i\eta h^2(g - 2hf) + \gamma K^2 = 0,$

$-6h^2 + 10\beta h^2 - 9\delta h^2 + \delta K^2 = 0,$

$-3h^2 + \beta h^2 + 16\gamma h^2 - 5\varepsilon h^2 + 4\eta h^4 + \varepsilon K^2 = 0,$

$-4\beta - 4\gamma + 4\varepsilon - 5\eta h^2 + \eta K^2 = 0,$

$-\Phi - 2i\beta\Phi y - 4i\beta\int\Phi dy - 4i^2\gamma B5\int \text{cos.}\, Ht\zeta d\zeta + Y = 0,$

$-h^2 - i(2hf + if^2 + nA4) - i\mu(g - 2hf - if^2 + nA2) + 2i\nu(g - 2hf - if^2 + nA2)\times(h^2 + 2ihf) - 3i^2\nu h^2(2A + B) - 6i^2\pi B - 2i^2\rho A + 2i^2\sigma h^2 A + L^2 = 0,$

$4(h^2 + 2ihf) - 2\mu[h^2 + i(4hf - g)] + 2\nu[h^2 + i(6hf - 2g)]\times[h^2 + 2ihf] - 20i\nu h^2(g - 2hf) - 6i\rho(g - 2hf) + 6i\sigma h^2(g - 2hf) + \mu L^2 = 0,$

$- 2 + 2\mu - \nu [2h^2 + i(20hf - 8g)] - 3i\sigma(g - 2hf) + \nu L^2 = 0,$

$\frac{3}{2}\mu h^2 - 6\nu h^4 - 9\pi h^2 + \pi L^2 = 0,$

$- 10h^2 + 7\mu h^2 - 20\nu h^4 - 5\rho h^2 + 4\sigma h^4 + \rho L^2 = 0,$

$2 - 2\mu + 16\nu h^2 + 4\rho - 5\sigma h^2 + \sigma L^2 = 0,$

$- \Psi - (\mu - 2\nu h^2) z\Phi - \nu \frac{d\Phi\, dz}{dt^2} + Z = 0;$

par où l'on déterminera les valeurs des coéficiens K^2, α, β, γ, δ, ε, η, L^2, μ, ν, π, ρ, σ, ainsi que celles de Y & de Z; en ayant soin de pousser les valeurs de K^2, L^2, & α jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2 & de i n, celles de β, γ, μ, ν jusqu'aux quantités de l'ordre de i & de n seulement, & enfin de négliger dans les autres toutes les quantités affectées de i & de n.

LXXIX. Si on regarde la quantité α comme connuë, & qu'on s'en serve pour déterminer g, on aura

$g = \alpha K^2 + 2hf - nA2 + i(f^2 - 2\beta A - 2\gamma B) + 2i^2\eta\alpha K^2 B;$

ensuite, supposant $K = h + ik$ & $L = h + il$, on trouvera

$$k = f + 2h\alpha + \frac{i}{2h}(4hf\alpha + 15h^2\alpha^2 - 5A - B) + \frac{n}{2h}(P4 + 2A2),$$

$$l = f + 2h\alpha + \frac{i}{2h}(4hf\alpha + 15h^2\alpha^2 - 5A - B) + \frac{n}{2h}A4,$$

$\beta = 1 + \frac{i}{2}\alpha$, $\gamma = \frac{1}{2} + i\alpha\eta h^2$, $\delta = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{3}{2} + \eta h^2$,

$$\mu = i(15 + 2\sigma h^2)\alpha,\ \nu = -\frac{2}{b^2} + i\left(\frac{4\mathrm{f}}{b^2} + \frac{6 + \sigma b^2}{b^2}\alpha\right),$$

$$\pi = \frac{3}{2},\ \rho = \frac{15}{2} + \sigma h^2 \quad \&$$

$$Y = \Phi + 2i\beta\Phi y + 4i\beta\int\Phi dy + 4i^2\gamma B 5 \int \text{cof. } Ht\, z' dz,$$

$$Z = \Psi + (\mu - 2\nu h^2)\Phi z + \nu \frac{d\Phi\, dz}{dt^2}.$$

Et l'on remarquera qu'il reſtera encore deux indéterminées η & σ, leſquelles pourront être ſuppoſées égales à tout ce qu'on voudra, ſelon ce qu'on jugera plus commode.

A l'égard des quantités α & f, il faudra les prendre de telle manière que les deux conditions exprimées dans l'Art. LXXII. ayent lieu, c'eſt-à-dire que les valeurs de y & de $\frac{dx}{dt}$ ne renferment aucun terme tout conſtant ; ainſi ce ne ſera qu'après avoir trouvé les expreſſions générales de y & de $\frac{dx}{dt}$ en t, qu'on pourra déterminer les conſtantes α & f.

Au reſte comme il n'eſt pas abſolument néceſſaire que la quantité a repréſente exactement la diſtance moyenne de la planète, on pourra, ſi l'on veut, ſe contenter de remplir la ſeconde des deux conditions dont nous venons de parler, & pour lors on aura encore une nouvelle indéterminée α à volonté.

Enfin pour déterminer A & B on ſubſtituera d'abord dans les équations (o) & (p) les valeurs de y & z en t, & on fera enſuite des équations ſéparées des termes dans leſquels t n'entre pas, les autres étant cenſés ſe détruire d'eux-mêmes. Or, en mettant au lieu de y & z leurs valeurs approchées y $-$ α & z, & négligeant tous les termes affectés de i, ainſi que ceux qui contiennent des *ſinus* & des *coſinus*, on a (à cauſe de g $-$ $2h$f $= \alpha h^2$ à très-peu près)

$$\frac{dy^2}{dt^2} + h^2 y^2 - \alpha h^2 + A = 0, \quad \&$$
$$\frac{dz^2}{dt^2} + h^2 z^2 + B = 0.$$

De forte qu'en ne prenant, dans les valeurs de y^2, $\frac{dy^2}{dt^2}$, z^2 & $\frac{dz^2}{dt^2}$, que les termes conftans & omettant les autres, on aura

$$A = \alpha^2 h^2 - h^2 y^2 - \frac{dy^2}{dt^2} \quad \&$$
$$B = - h^2 z^2 - \frac{dz^2}{dt^2}.$$

LXXX. Pour mettre nos formules fous une forme plus commode & plus fimple, nous ferons $\alpha = 0$, $\eta = 0$, & $\sigma = - \frac{11}{2h^2}$; moyennant quoi nous aurons

$$y + i(y^2 + \frac{1}{2}z^2) + i^2(\frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{2}yz^2) = y \quad \&$$
$$z - 2i(1 - \frac{2if}{h})\frac{dzdy}{h^2dt^2} + i^2(\frac{3}{2}z^3 + 2zy^2 - \frac{11}{2} y\frac{dydz}{h^2dt^2}) = z;$$

d' où l' on tire, en ne pouffant la précifion que jufques aux quantités de l' ordre de i^2,

$$y = y - i(y^2 + \frac{1}{2}z^2) + i^2(\frac{3}{2}y^3 - \frac{1}{2}yz^2 - 2z\frac{dydz}{h^2dt^2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (q)$$

$$z = z + 2i(1 - \frac{2if}{h})\frac{dzdy}{h^2dt^2} - i^2(\frac{3}{2}z^3 + 2zy^2 - \frac{3}{.}y\frac{dzdy}{h^2dt^2} + 2z\frac{dz^2}{h^2dt^2} - 4\frac{dy\,d\cdot(dzdy)}{h^4dt^4}),$$

ou bien (en mettant pour $\frac{d^2 \mathrm{y}}{dt^2}$ & $\frac{d^2 \mathrm{z}}{dt^2}$ leurs valeurs approchées $-h^2 \mathrm{y}$ & $-h^2 \mathrm{z}$),

$$z = \mathrm{z} + 2i\left(1 - \frac{2i\mathrm{f}}{h}\right)\frac{d\mathrm{z}\,d\mathrm{y}}{h^2dt^2} - i^2\left(\frac{3}{2}\mathrm{z}^3 + 2\mathrm{z}\mathrm{y}^2 + \frac{5}{2}\mathrm{y}\frac{d\mathrm{z}\,d\mathrm{y}}{h^2dt^2} + 2\mathrm{z}\frac{d\mathrm{z}^2}{h^2dt^2} + 4\mathrm{z}\frac{d\mathrm{y}^2}{h^2dt^2}\right) \quad .\ .\ .\ .\ . \quad (\mathrm{r})$$

Et si on substitue cette valeur de y dans l'équation (n) de l' Art. LXXVII., on aura

$$\frac{dx}{dt} = -2(h + i\mathrm{f})\mathrm{y} + \mathrm{f} + i(h + i\mathrm{f}) \times (5\mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2) - i^2 h\left(13\mathrm{y}^3 + 2\mathrm{y}\mathrm{z}^2 - 4\mathrm{z}\frac{d\mathrm{y}\,d\mathrm{z}}{h^2dt^2}\right) - \mathrm{n}\Xi \quad .\ . \quad (\mathrm{s})$$

équation facile à intégrer dès qu'on aura les valeurs de y & z en t. On se souviendra seulement qu'il faudra, avant l' intégration, faire $= 0$ tous les termes constants.

De plus, si on veut avoir l' expression du rayon vecteur u de l'orbite réelle, on fera $u = a(1 + iv)$, & comme $u = r\sqrt{(1 + q^2)}$, on trouvera $v = y + \frac{i}{2}z^2 + \frac{i^2}{2}yz^2$; & mettant au lieu de y & z leurs valeurs en y & z,

$$v = \mathrm{y} - i\mathrm{y}^2 + \frac{3}{2}i^2\mathrm{y}^3.$$

Ainsi le problème ne dépendra plus que de l' intégration des équations

$$\frac{d^2\mathrm{y}}{dt^2} + K^2\mathrm{y} + \mathrm{n}\,\mathrm{Y} = 0 \quad .\ .\ .\ . \quad (\mathrm{t})$$

$$\frac{d^2\mathrm{z}}{dt^2} + L^2\mathrm{z} + i\,\mathrm{n}\,\mathrm{Z} = 0 \quad .\ .\ .\ .\ . \quad (\mathrm{u})$$

LXXXI. Si on fait $\mathrm{n} = 0$, on aura le cas ordinaire où l' orbite est une ellipse immobile.

On trouvera donc pour ce cas

$y = \Delta$ cof. $(Kt - A)$, & $z = \Lambda$ fin. $(Lt - E)$,
Δ, Λ, A & E étant des conftantes.

Donc 1.° $A = - h^2 \Delta^2$, & $B = - h^2 \Lambda^2$ (*Art. LXXIX.*); 2.° fi on fubftitue ces valeurs de y & de z dans le fecond membre de l'équation (s), & qu'après avoir développé les puiffances des *finus* & des *cofinus* on égale à zéro tous les termes conftans, on aura, aux quantités de l'ordre de i^2 près, $f + ih\left(\frac{5}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2\right) = 0$; d'où

$$f = - ih\left(\frac{5}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2\right).$$

De forte qu'on trouvera, (à caufe de $\alpha = 0$ & de $n = 0$) $k = 0$, & $l = 0$, & par conféquent $K = h$ & $L = h$ (*Art. LXXIX.*).

Si on n'eut pas fuppofé $\alpha = 0$, on eut eu $A = h^2(\alpha^2 - \Delta^2)$, $B = - h^2\Lambda^2$, & $2(h + if)\alpha + f + 5ih\left(\frac{1}{2}\Delta^2 + \alpha\right) + \frac{ih}{2}\Lambda^2 = 0$; d'où $f = - 2h\alpha - ih\alpha^2 - \frac{ih}{2}(5\Delta^2 + \Lambda^2)$, & l'on trouveroit, après les fubftitutions, que tous les termes des valeurs de k & de l fe détruiroient d'eux mêmes, de manière que ces quantités feroient auffi nulles, comme elles le doivent être dans ce cas; ce qui pourroit fervir, s'il en étoit befoin, à confirmer la bonté de nos formules.

Il ne s'agira donc plus que de mettre, dans les équations de l'Art. préc., Δ cof. $(ht - A)$ à la place de y & Λ fin. $(ht - E)$ à la place de z; ce qui n'aura aucune difficulté; d'ailleurs ce cas eft fi connu des Géomètres qu'il feroit fuperflu de nous y arrêter. Je me contenterai d'obferver;

1.° Que les Apfides de l'orbite fe trouveront aux points où $dy = 0$, & par conféquent où fin. $(ht - A) = 0$;

ce qui donnera pour l' aphelie cof. $(h t - A) = 1$ & $v = \Delta - i\Delta^2 + \frac{3}{2} i^2\Delta^3$, & pour le périhélie cof. $(ht - A) = -1$ & $v = -\Delta - i\Delta^2 - \frac{3}{2} i^2\Delta^3$; d' où il s' ensuit que le demi-axe de l' ellipse sera $= a(1 - i^2\Delta^2)$ & l' excentricité $= i\Delta \frac{1 + \frac{3}{2} i^2\Delta^2}{1 - i^2\Delta^2} = i\Delta(1 + \frac{5}{2} i^2\Delta^2) = i\Delta$ à très-peu près;

2.° Que par conséquent l' angle $ht - A$ représentera l' anomalie moyenne, & A le lieu de l' aphelie;

3.° Que les limites, c'est-à-dire les plus grandes latitudes seront aux points où $dz = \frac{2izdy}{1-2iy}$, & par conséquent (en négligeant les quantités de l' ordre de i^2) aux points où $\frac{\text{cof.}(ht - E)}{\text{fin.}(ht - E)} = 2i\frac{dy}{hdt}$, c'est-à-dire où cof. $(ht - E) = 2i\frac{dy}{hdt}$; d' où la plus grande valeur de z sera $\Lambda(1 - 2i^2h^2\Delta^2 - \frac{3}{2} i^2h^2\Lambda^2)$; de sorte qu'on aura pour la tangente de l' inclinaison de l' orbite $i\Lambda(1 - 2i^2h^2\Delta^2 - \frac{3}{2} i^2h^2\Lambda^2) = i\Lambda$ à très-peu près;

4.° Que, comme $\frac{d^2y}{dt^2} + h^2y = 0$, on aura $\frac{dy}{dt} = - h^2\int y\,dt =$ (à cause de $\frac{dx}{dt} = -2hy$, en négligeant les termes affectés de i) $\frac{h}{2}x$; donc on aura dans les limites $\frac{\text{cof.}(ht - E)}{\text{fin.}(ht - E)} = ix$; & par conséquent cof. $(ht - E) - ix$ fin. $(ht - E) = 0$, ou bien cof. $(ht + ix - E) = 0$, c'est-

c' eſt-à-dire coſ. $(\varphi - E) = 0$; ce qui montre que E eſt le lieu du nœud aſcendant, & qu'ainſi l' angle $ht - E$ dénote la diſtance moyenne de la planète au nœud.

LXXXII. Il eſt bon de remarquer que ſi on vouloit réſoudre le problème de l' Art. LXXVIII. d'une manière plus générale, en donnant à tous les termes des équations (l) & (m) des coéficiens indéterminés, on trouveroit, après en avoir fait le calcul, deux équations de condition entre ces mêmes coéficiens; de ſorte que la ſolution ne pourroit avoir lieu que quand ces équations ſeroient identiques d' elles mêmes; or c' eſt préciſément ce qui arrive dans notre cas, & c' eſt-là la raiſon pourquoi il reſte deux coéficiens indéterminés η & σ. Au reſte il eſt facile de voir que cet inconvénient ne vient que de ce que nous avons conſervé la quantité $\frac{dy\,dz}{dt^2}$ au lieu d' y ſubſtituer ſa valeur tirée des équations (l) & (m) comme nous l' avons pratiqué dans l'Art. LII. Ainſi il ſera très-aiſé d'y remédier, & de donner par-là à notre méthode toute la généralité dont elle eſt ſuſceptible.

LXXXIII. Revenons maintenant à notre ſujet, & voyons comment il faut s' y prendre pour intégrer les équations (t) & (u). Pour cela on commencera par mettre dans les expreſſions de Y & Z, à la place de y, z, & x leurs valeurs approchées y, z, & $-2h\int y\,dt$ tirées des équations (q), (r), (s), & de même à la place de y', z', x', les valeurs correſpondantes y', z', & $-2h'\int y'\,dt$; puis on cherchera, par l' intégration, les valeurs de y, z, & de y', z', en y négligeant d' abord tous les termes affectés de i & n; & ces premiéres valeurs étant enſuite ſubſtituées dans Y & Z ſerviront à déterminer plus exactement les mêmes quantités y, z, y', z'.

Or il ſemble d' abord qu'on pourroit ſe contenter de prendre pour premiéres valeurs approchées de y & z celles

que nous avons trouvées plus haut (*Art. LXXXI.*), ſavoir

$$y = \Delta \text{ coſ. } (K t - A), \quad z = \Lambda \text{ ſin. } (L t - E),$$

& par conſéquent auſſi

$$y' = \Delta' \text{ coſ. } (K' t - A'), \quad z' = \Lambda' \text{ ſin. } (L' t - E').$$

Mais ces valeurs étant ſubſtituées dans les quantités Y & Z, on verra, après le développement des produits des différens *ſinus* & *coſinus*, qu'on aura des termes de cette forme coſ. $[(h t + i k') t - A']$ & ſin. $[(h t + i l') t - E']$, leſquels étant de l'ordre de i n dans les équations différentielles ſe trouveront diviſés, après l'intégration, par des quantités du même ordre; de ſorte qu'ils appartiendront auſſi aux premiéres valeurs de y & z.

Le terme i Q 5 y' coſ. $H t$, par exemple, qui ſe trouve dans la quantité Φ donnera par la ſubſtitution de la valeur de y' le terme $\frac{i Q 5}{2} \Delta'$ coſ. $[(h + ik') t - A']$, à cauſe de $K' = h' + ik'$ & de $H = h - h'$; de ſorte que la quantité Y contiendra le terme $\frac{i n Q 5}{2} \Delta'$ coſ. $[(h + ik') t - A']$, lequel étant intégré (*Art. XLII.*) donnera dans la valeur de y le nouveau terme

$$\frac{i n Q 5}{2 ((h + i k')^2 - K^2)} \Delta \text{ coſ. } [(h + i k') t - A'];$$

or $(h + i k')^2 - K^2 =$ (en mettant $h + i k$ au lieu de K, & négligeant les termes de l'ordre de i^2) $2 i (k' - k) h$; de plus on a, à cauſe de $\alpha = 0$ & $f = \frac{i}{h} (\frac{5}{2} A + \frac{1}{2} B)$ (*Art. LXXXI.*), $k = \frac{n}{2 h} (P 4 + 2 A 2)$ (*Art. LXXIX.*), & de même $k' = \frac{n'}{2 h'} (P' 4 + 2 A' 2)$; donc le terme dont il s'agit deviendra

$$\frac{Q 5}{2 \frac{n' h}{n h'} (P' 4 + 2 A' 2) - 2 (P 4 + 2 A 2)} \Delta \text{ coſ. } [(h + ik') t - A'],$$

lequel appartient, comme l'on voit, à la première valeur de y.

On trouvera de même dans la première valeur de y' un terme contenant cos. $[(h' + ik)t - A]$, & qui étant substitué dans le même terme $inQ5y'$ cos. Ht de la quantité Y donnera un terme de cette forme cos. $[(h + ik)t - A]$, savoir cos. $(Kt - A)$; de sorte que la nouvelle valeur de y renfermera un arc de cercle (*Art. XLII.*).

Le même inconvénient aura lieu, comme il est aisé de s'en assurer, par rapport à tous les termes de Y & de Z qui renferment y', ou z' multipliés par cos. Ht, ou par sin. Ht. Tels sont dans la quantité Y les termes $i(Q5y'\cos. Ht + 2hP7\int y' \sin. Ht\,dt - 2h'B2\int y'dt$

$\times \sin. Ht + 4hh'A3\int\int y'dt \times \cos. Ht\,dt)$, & dans la

quantité Z le terme $B5z'\cos. Ht$. Ainsi il sera nécessaire d'avoir égard à ces termes dans la première approximation des valeurs de y & z.

On aura donc en premier lieu l'équation suivante en y

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + in(Q5y'\cos. Ht + 2hP7\int y' \sin. Ht\,dt$$

$$- 2h'B2\int y'dt \times \sin. Ht + 4hh'A3\int\int y\,dt \times \cos. Ht\,dt)$$

$$= 0,$$

ou bien, parceque $\int\int y'dt \times \cos. Ht\,dt = \frac{1}{H}\int y'dt \times \sin. Ht$

$- \frac{1}{H}\int y' \sin. Ht\,dt$,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + in\left[Q5y'\cos. Ht + \left(\frac{4hh'}{H}A3 - 2h'B2\right)\right.$$

$$\left.\int y'dt \times \sin. Ht - \left(\frac{4hh'}{H}A3 - 2hP7\right)\int y' \sin. Ht\,dt\right]$$

$$= 0.$$

Or on a, aux quantités de l'ordre de n près, $\frac{d^2 y}{dt^2}$ + $K^2 y = 0$; donc on aura auſſi, dans la même hypothèſe, $\frac{d^2 y'}{dt^2} + K'^2 y' = 0$; donc 1.° $\frac{dy'}{dt} + K'^2 \int y'\, dt = 0$, d'où $\int y'\, dt = -\frac{dy'}{K'^2 dt}$; 2.° $\int \frac{d^2 y'}{dt^2}$ ſin. $Htdt + K'^2 \int y'$ ſin. $Htdt = 0$; mais $\int \frac{d^2 y'}{dt^2}$ ſin. $H t\, dt = \frac{dy'}{dt}$ ſin. $Ht - Hy'$ coſ. $Ht - H^2 \int y'$ ſin. $H t\, dt$; donc $\frac{dy'}{dt}$ ſin. $Ht - Hy'$ coſ. $Ht + (K'^2 - H^2) \int y'$ ſin. $Htdt$; par conſéquent $\int y'$ ſin. $Htdt = [\frac{dy'}{dt}$ ſin. $Ht - Hy'$ coſ. $Ht] : [H^2 - K'^2]$. Donc ſubſtituant ces valeurs dans l' équation précédente, elle deviendra

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 y + in [(Q_5 + \frac{4hh'}{H^2 - K'^2} A_3 - \frac{2hH}{H^2 - K'^2} P_7) y' \text{ coſ. } Ht + (\frac{2h}{H^2 - K'^2} P_7 - \frac{4hh'H}{(H^2 - K'^2) K'^2} A_3 + \frac{2h'}{K'^2} B_2) \frac{dy'}{dt} \text{ ſin. } Ht] = 0 .$$

Enſuite on aura cette équation en z

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + L^2 z + in B_5 z' \text{ coſ. } Ht = 0 .$$

On trouvera de même des équations ſemblables en y' & z', ſuivant la remarque de l'Art. LXXVII., & l'on aura ainſi quattre équations, leſquelles s' intégreront, comme l' on voit, par la méthode de l' Art. LVIII.

LXXXIV. Puiſque $H = h - h'$ (*Art. LXXXV.*) & $K = h + ik$, $L = h + il$ (*Art. LXXIX.*), & de même $K' = h' + ik'$, $L' = h' + il'$, on aura le cas de l' Art. LX.

Donc 1.° si on fait

$$M = n' (Q\,5 + \frac{4\,b\,b'}{H^2-K'^2} A\,3 - \frac{2\,b\,H}{H^2-K'^2} P\,7)$$

$$N = n \left(\frac{2\,b}{H^2-K'^2} P\,7 - \frac{4\,b\,b'\,H}{(H^2-K'^2)\,K'^2} A\,3 + \frac{2\,b'}{K'^2} B\,2\right),$$

& de même

$$M' = n' (Q'\,5 + \frac{4\,b'\,b}{H^2-K^2} A'\,3 + \frac{2\,b'\,H}{H^2-K^2} P'\,7)$$

$$N' = n' \left(\frac{2\,b'}{H^2-K^2} P'\,7 + \frac{4\,b'\,b\,H}{(H^2-K^2)\,K^2} A'\,3 + \frac{2\,b}{K^2} B'\,2\right),$$

ensuite

$$P = \frac{M + N\,b'}{4\,b},\quad P' = \frac{M' + N'\,b}{4\,b'},$$

& qu'on appelle $m\,1$, $m\,2$ les racines de l'équation $(m - k)\times(m - k') - P\,P' = 0$, ensorte que

$$m\,1 = \frac{k + k' + \sqrt{((k-k')^2 + 4\,P\,P')}}{2},$$

$$m\,2 = \frac{k + k' - \sqrt{((k-k')^2 + 4\,P\,P')}}{2},$$

on trouvera (*Art. LXII. & LXV.*) que la première valeur approchée de y sera de cette forme

$$\begin{aligned} y = {} & \frac{(m\,1 - k')\,F + P\,F'}{m\,1 - m\,2} \operatorname{cos.} (h + i\,m\,1)\,t \\ & + \frac{(m\,1 - k')\,G + P\,G'}{m\,1 - m\,2} \operatorname{sin.} (h + i\,m\,1)\,t \\ & - \frac{(m\,2 - k')\,F + P\,F'}{m\,1 - m\,2} \operatorname{cos.} (h + i\,m\,2)\,t \\ & - \frac{(m\,2 - k')\,G + P\,G'}{m\,1 - m\,2} \operatorname{sin.} (h + i\,m\,2)\,t. \quad . \quad (\text{v}) \end{aligned}$$

2.° Si on fait de même

$$Q = \frac{n\,B\,5}{4\,b},\quad Q' = \frac{n'\,B'\,5}{4\,b'},$$

& qu'on nomme $n1$, $n2$ les racines de l'équation $(n - l) \times (n - l') - QQ' = 0$, enforte que

$$n1 = \frac{l + l + \sqrt{((l - l')^2 + 4QQ')}}{2}$$

$$n2 = \frac{l + l' - \sqrt{((l - l')^2 + 4QQ')}}{2},$$

on aura

$$z = \frac{(n1 - l')B + QB'}{n1 - n2} \text{ cof. } (h + in1)t$$
$$+ \frac{(n1 - l')C + QC'}{n1 - n2} \text{ fin. } (h + in1)t$$
$$- \frac{(n2 - l')B + QB'}{n1 - n2} \text{ cof. } (h + in2)t$$
$$- \frac{(n2 - l')C + QC'}{n1 - n2} \text{ fin. } (h + in2)t \quad . \quad (x)$$

(F, F', G, G', B, B', C, C' étant des conftantes qu'il faudra déterminer par les obfervations).

Telles font les premières valeurs approchées de y & z; & pour avoir celles de y' & z', il n'y aura qu'à marquer fimplement d'un trait toutes les lettres qui ne le font point, & *viceverfa*.

Si on vouloit maintenant pouffer l'approximation plus loin, & déterminer plus exactement les quantités y, z, y', z', on fubftitueroit d'abord les valeurs qu'on vient de trouver, dans les termes de Y & de Z que nous avons négligés; après quoi il n'y auroit plus qu'à fuivre la méthode qui a été expofée dans l'Art. LXIV.

Le peu de tems qui me refte ne me permettant pas d'entrer dans ce détail, je me contenterai d'avoir établi les principes néceffaires pour réfoudre le problème dont il s'agit; & je me bornerai à examiner ici, d'après les formules données ci-deffus, les inégalités des mouvemens de Jupiter & de Saturne qui font varier l'excentricité &

position de l'aphelie de ces deux Planètes, aussi bien que l'inclinaison & le lieu du nœud de leurs orbites, & qui produisent surtout une altération apparente dans leurs moyens mouvemens; inégalités que les observations ont fait connoitre depuis long-tems, mais que personne jusqu'ici n'a encor entrepris de déterminer avec toute l'exactitude qu'on peut exiger dans un sujet si important.

LXXXV. Soit $m1 + m2 = 2\mu h$ & $m1 - m2 = 2\nu h$, ensorte que

$$\mu = \frac{k + k'}{2h}, \text{ \& } \nu = \frac{\sqrt{((k-k')^2 + 4PP')}}{2h};$$

supposons de plus

$$F1 = \frac{(k-k')F + 2PF'}{2h\nu}$$

$$G1 = \frac{(k-k')G + 2PG'}{2h\nu},$$

& nous aurons au lieu de l'équation (v) celle-ci

$$\begin{aligned} y = {} & F \text{ cos. } (1 + i\mu)ht \times \text{cos. } i\nu ht \\ & - F1 \text{ sin. } (1 + i\mu)ht \times \text{sin. } i\nu ht \\ & + G \text{ sin. } (1 + i\mu)ht \times \text{cos. } i\nu ht \\ & + G1 \text{ cos. } (1 + i\mu)ht \times \text{sin. } i\nu ht. \end{aligned}$$

Soit maintenant

$$F = \delta \text{ cos. } \alpha,\ G = \delta \text{ sin. } \alpha,$$

$$F1 = \delta 1 \text{ cos. } \alpha 1,\ G1 = \delta 1 \text{ sin. } \alpha 1,$$

on aura

$$\begin{aligned} y = {} & \delta \text{ cos. } [(1 + i\mu)ht - \alpha] \times \text{cos. } i\nu ht \\ & - \delta 1 \text{ sin. } [(1 + i\mu)ht - \alpha 1] \times \text{sin. } i\nu ht. \end{aligned}$$

Soit encore

$$\alpha 1 = \alpha + \eta, \text{ \& } \delta 1 = \beta\delta,$$

on aura $\text{sin. } [(1 + i\mu)ht - \alpha 1] = \text{sin. } [(1 + i\mu)ht - \alpha] \times \text{cos. } \eta - \text{cos. } [(1 + i\mu)ht - \alpha] \times \text{sin. } \eta$; donc

$$\begin{aligned} y = {} & \delta(\text{cos. } i\nu ht + \beta \text{ sin. } \eta \text{ sin. } i\nu ht) \text{ cos. } [(1 + i\mu)ht - \alpha] \\ & - \delta\beta \text{ cos. } \eta \text{ sin. } i\nu ht \text{ sin. } [(1 + i\mu)ht - \alpha]. \end{aligned}$$

Enfin soit $\frac{\text{cos. } i\nu h t + \beta \text{ sin. } \eta \text{ sin. } i\nu h t}{\beta \text{ cos. } \eta \text{ sin. } i\nu h t} = \frac{\text{cos. } \psi}{\text{sin. } \psi}$, c'est-à-dire

$$\text{cot. } \psi = \frac{\text{cot. } i\nu ht}{\beta \text{ cos. } \eta} + \text{tang. } \eta,$$

& nous aurons

$y = \delta \surd [(\text{cos. } i\nu ht + \beta \text{ sin. } \eta \text{ sin. } i\nu ht)^2 + (\beta \text{ cos. } \eta \text{ sin. } i\nu ht)^2]$
$\times \text{cos. } [(1 + i\mu) h t + \psi - \alpha]$

ou bien, en faisant

$\Delta = \delta \surd [\frac{1 + \beta^2}{2} + \frac{1 - \beta^2}{2} \text{ cos. } 2 i\nu h t + \beta \text{ sin. } \eta \text{ sin. } 2 i\nu h t]$

& $A = \alpha - \psi - i\mu h t$,

$$y = \Delta \text{ cos. } (h t - A).$$

De même, si on fait $n1 + n2 = 2 \rho h$, $n1 - n2 = 2 \sigma h$, ensorte que

$$\rho = \frac{l + l'}{2h}, \sigma = \frac{\surd ((l - l')^2 + 4 Q Q')}{2h},$$

ensuite

$$B1 = \frac{(l - l') B + 2 Q B'}{2h\sigma},$$

$$C1 = \frac{(l - l') C + 2 Q C'}{2h\sigma},$$

& de plus

$$B = - \lambda \text{ sin. } \varepsilon, C = \lambda \text{ cos. } \varepsilon,$$

$$B1 = - \lambda 1 \text{ sin. } \varepsilon 1, C1 = \lambda 1 \text{ cos. } \varepsilon 1,$$

$$\varepsilon 1 = \varepsilon + \omega, \lambda 1 = \gamma \lambda,$$

$$\text{cot. } \zeta = \frac{\text{cot. } i\sigma ht}{\gamma \text{ cos. } \omega} + \text{tang. } \omega,$$

enfin

$\Lambda = \lambda \surd [\frac{1 + \gamma^2}{2} + \frac{1 - \gamma^2}{2} \text{ cos. } 2i\sigma ht + \gamma \text{ sin. } \omega \text{ sin. } 2i\sigma ht]$

& $E = \varepsilon - \zeta - i\rho h t$,

on aura par l'équation (x)

$$z = \Lambda \text{ sin. } (h t - E).$$

Voilà donc les valeurs de y & de z réduites à la même forme que celles de l' Art. LXXI. ; d' où il est aisé de conclure que l' orbite de Jupiter est un ellipse, dans laquelle l' excentricité est $i\Delta$, le lieu de l' aphelie A, la tangente de l' inclinaison à l' ecliptique $i\Lambda$, & le lieu du nœud ascendant E. Il en sera de même de l'orbite de Saturne, en marquant seulement les lettres d'un trait.

LXXXVI. Il faudroit présentement substituer ces valeurs de y & de z dans les équations (q), (r), & (s) de l' Art. LXXX., pour en déduire les expressions des quantités y, z, & x, & par conséquent celles de r, q, & φ (*Art. LXXII.*); mais sans entrer dans ce détail, il suffira de remarquer

1.° Que les quantités μ, ν, ρ, & σ étant de l'ordre de n, comme on le verra ci-après, les variations des quantités Δ, Λ; A, & E seront de l' ordre de i n; d' où il s' ensuit que les expressions de y & de z seront à très-peu près les mêmes (c' est-à-dire aux quantités de l' ordre de i^2 n près), que si ces quantités étoient constantes. De sorte que pour avoir le rayon vecteur de l' orbite, ainsi que la tangente de l' inclinaison, pour un instant quelconque, il n'y aura qu'à calculer l'un & l' autre par les méthodes ordinaires, d' après les élémens $i\Delta$, $i\Lambda$, A, & E regardés comme constans.

2.° Que, si on dénote par $(\frac{dx}{dt})$ la valeur de $\frac{dx}{dt}$, en supposant Δ, Λ, A, & E constantes, on aura (abstraction faite du terme n Ξ qu'on doit négliger ici)

$$\frac{dx}{dt} = (\frac{dx}{dt}) + f + i(h + if) \times (\frac{5}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2) = 0,$$

parceque, dans l' hypothèse de Δ & Λ constantes, les termes tous constans $f + i(h + if) \times (\frac{5}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta^2)$ doivent être supposés $= 0$, comme nous l' avons fait

(*Art. LXXXI.*); or dans le cas préfent où les quantités Δ & Λ font en partie conftantes, & en partie variables, on fera fimplement $f + i[h + if] \times [\frac{5}{4}\delta^2(1+\beta^2) + \frac{1}{4}\lambda^2(1+\gamma^2)] = 0$, & on confervera dans la valeur de $\frac{dx}{dt}$ les termes variables qui entrent dans Δ^2 & de Λ^2, favoir $\delta^2(\frac{1-\beta^2}{2}\cos. 2i\nu ht + \beta \sin. \eta \sin. 2i\nu ht)$, & $\lambda^2(\frac{1-\gamma^2}{2}\cos. 2i\sigma ht + \gamma \sin. \omega \sin. 2i\sigma ht)$; de forte que l'on aura, en négligeant les quantités de l'ordre de i^3,

$$f = -\frac{ih}{4}[5\delta^2(1+\beta^2) + \lambda^2(1+\gamma^2)],$$

& enfuite

$$\frac{dx}{dt} = (\frac{dx}{dt}) + \frac{5ih}{2}\delta^2(\frac{1-\beta^2}{2}\cos. 2i\nu ht + \beta \sin. \eta \sin. 2i\nu ht) + \frac{ih}{2}\lambda^2(\frac{1-\gamma^2}{2}\cos. 2i\sigma ht + \gamma \sin. \omega \sin. 2i\sigma ht).$$

Pour intégrer cette équation, foit (x) la valeur de x, dans la fuppofition de Δ, Λ, A, & E conftantes, & dénotons par $d(x)$ la différentielle de (x) en faifant ces quantités feules variables, il eft clair que la valeur compléte de $\frac{d(x)}{dt}$ fera $(\frac{dx}{dt}) + \frac{d(x)}{dt}$; de manière qu'on aura, en intégrant, $(x) = \int(\frac{dx}{dt})dt + \int d(x)$, & par conféquent $\int(\frac{dx}{dt})dt = (x) - \int d(x)$. Mais comme les différences des quantités Δ, Λ, A, & E, font de l'ordre de i n, la quantité $\int d(x)$ fera auffi du même ordre, & par conféquent elle pourra être négligée, du moins dans

la recherche présente ; on aura donc simplement $\int \left(\frac{dx}{dt}\right) dt$ $= (x)$; donc

$$x = (x) + \frac{5\delta^2}{4\nu}\left[\frac{1-\beta^2}{2} \text{ sin. } 2i\nu ht - \beta \text{ sin. } \eta\, (\text{cos. } 2i\nu ht - 1)\right] + \frac{\lambda^2}{4\sigma}\left[\frac{1-\gamma^2}{2} \text{ sin. } 2i\sigma ht - \gamma \text{ sin. } \omega\, (\text{cos. } 2i\sigma ht - 1)\right],$$

& par conséquent

$$\varphi = ht + i(x) + \frac{5i\delta^2}{4\nu}\left[\frac{1-\beta^2}{2} \text{ sin. } 2i\nu ht - \beta \text{ sin. } \eta\, (\text{cos. } 2i\nu ht - 1)\right] + \frac{i\lambda^2}{4\sigma}\left[\frac{1-\gamma^2}{2} \text{ sin. } 2i\sigma ht - \gamma \text{ sin. } \omega\, (\text{cos. } 2i\sigma ht - 1)\right],$$

où l' on remarquera que ht est l' angle du mouvement moyen, & $i(x)$ l' équation du centre calculée à l' ordinaire, & combinée avec la réduction à l' écliptique.

Or comme les coéficiens $i\nu$ & $i\sigma$ sont extrémement petits, il est visible que, tant que l'angle ht ne sera pas fort grand, on aura à très-peu près sin. $2i\nu ht = 2i\nu ht$, cos. $2i\nu ht = 1$, & sin. $2i\sigma ht = 2i\sigma ht$, cos. $2i\sigma ht = 1$, & par conséquent

$$\varphi = \left[1 + \frac{5}{4} i^2\delta^2(1-\beta^2) + \frac{1}{4} i^2\lambda^2(1-\gamma^2)\right] ht + i(x);$$

de sorte que le mouvement moyen sera augmenté en raison de $1 + \frac{5}{4} i^2\delta^2(1-\beta^2) + \frac{1}{4} i^2\lambda^2(1-\gamma^2)$ à 1.

Si donc on veut que le terme ht représente le moyen mouvement *apparent* de la Planète, c' est-à-dire celui qui résulte des observations de sa révolution, il faudra faire simplement $f = -\frac{ib}{2}(5\delta^2 + \lambda^2)$; & l' on aura pour lors

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{5ib}{2}\delta^2 \left[\frac{1-\beta^2}{2}(\text{cof. } 2ivht - 1) + \beta \text{ fin. } \eta \text{ fin. } 2ivht\right] + \frac{ib}{2}\lambda^2 \left[\frac{1-\gamma^2}{2}(\text{cof. } 2i\sigma ht - 1) + \gamma \text{ fin. } \omega \text{ fin. } 2i\sigma ht\right],$$

d' où l' on trouvera

$$\varphi = ht + i(x) + \frac{5i\delta^2}{4v}\left[\frac{1-\beta^2}{2}(\text{fin. } 2ivht - 2ivht) - \beta \text{ fin. } \eta (\text{cof. } 2ivht - 1)\right] + \frac{i\lambda^2}{4\sigma}\left[\left(\frac{1-\gamma^2}{2}\text{ fin. } 2i\sigma ht - 2i\sigma ht\right) - \gamma \text{ fin. } \omega (\text{cof. } 2i\sigma ht - 1)\right].$$

Ainſi, tant que les angles $2ivht$ & $2i\sigma ht$ ſeront fort petits, ce qui aura lieu pendant un certain nombre de révolutions, on aura à très-peu près $\varphi = ht + i(x)$; c'eſt-à-dire que la longitude de la Planète ſera auſſi la même que celle qu'on trouveroit par les méthodes ordinaires d'après les élémens $i\Delta$, $i\Lambda$, A, & E ſuppoſés conſtans.

LXXXVII. Pour faire maintenant uſage de nos formules, on remarquera

1.° Que $\mathrm{n} = \frac{\mathrm{m}'}{1+i\mathrm{m}}\, b$ (*Art. LXXVI.*) $= \mathrm{m}'h^2$ à très-peu près, enſorte que $i\mathrm{n} = i\mathrm{m}'h^2 = \frac{J'}{I}h^2$, & $i\,\mathrm{n}' = \frac{J}{I}h'^2$.

2.° Que l'on aura par l'Art. LXXIX. $A = h^2(\alpha^2 - \Delta^2)$ & $B = -h^2\Lambda^2$, c' eſt-à-dire, en ne prenant, comme on le doit, que les termes conſtans des valeurs de Δ^2 & de Λ^2, $A = h^2[\alpha^2 - \frac{1}{2}\delta^2(1+\beta^2)]$ & $B = -\frac{1}{2}h^2\lambda^2(1+\gamma^2)$; ce qui donnera, à cauſe de $\alpha = 0$, & de $\mathrm{f} = -\frac{ib}{4}$

$\times [5\delta^2$

$\times[\,5\,\delta^2(1+\beta^2)+\lambda^2(1+\gamma^2)\,]$, $k=\frac{n}{2b}(P4+2A2)$ & $l=\frac{n'}{2b}A\,4$; de sorte qu'on aura

$$ik=\frac{J'}{2I}h(P\,4+2\,A\,2),\ il=\frac{J'}{2I}h\,A\,4$$

& de même

$$ik'=\frac{J}{2I}h'(P'\,4+2\,A'\,2),\ il'=\frac{J}{2I}h'A'\,4.$$

Si on vouloit employer l' autre valeur de f, savoir $-\frac{ib}{2}(5\,\delta^2+\lambda^2)$, il faudroit alors mettre dans les valeurs de A & de B, δ^2 au lieu de Δ^2, & λ^2 au lieu de Λ^2, & l'on trouveroit les mêmes expressions de k & de l que ci-devant.

3.° Que $\frac{I+J}{a^3}=b=h^2+ig$ (*Art. LXXVI.*) $=h^2$ à très-peu près, parceque g est déja une quantité très-petite (*Art. LXXIX.*). Donc on aura aussi $\frac{I+J'}{a'^3}=h'^2$, & par conséquent $\frac{I+J'}{I+J}\times\frac{a^3}{a'^3}=\frac{h'^2}{h^2}$, ou bien, à cause-que les masses J & J' de Jupiter & de Saturne sont très-petites par rapport à celle du Soleil I, $\frac{a^3}{a'^3}=\frac{h'^2}{h^2}$, de sorte qu'on aura $\frac{a}{a'}=(\frac{h'}{h})^{\frac{2}{3}}$.

Cela posé, on commencera par déterminer, suivant la méthode de l' Art. LXXIII. les coéficiens A, B, C &c., & P, Q, R &c.; après quoi on cherchera les valeurs des quantités A 2, A 3, A 4, B 2, B 5, P 4, P 7, & Q 5, ainsi que celles de A′ 2, A′ 3, A′ 4 &c. qui entrent dans les expressions de k, l, P, Q, & de k', l',

P', Q'. Or en faisant $s = \frac{3}{2}$, & $\frac{a}{a'} = a$ (je mets ici a au lieu de α, parceque j'aurai occasion dans la suite de faire servir cette dernière lettre à un autre usage) on aura par l'Art. cité $(1 - 2\,a\,\text{cos.}\,\theta + a^2)^{-\frac{3}{2}} = A + B\,\text{cos.}\,\theta + C\,\text{cos.}\,2\,\theta + \&c.$; donc, ayant supposé (*Art. LXXIV.*) $(a^2 - 2\,a\,a'\,\text{cos.}\,\theta + a'^2)^{-\frac{3}{2}} = A\,1 + B\,1\,\text{cos.}\,\theta + C\,1\,\text{cos.}\,2\,\theta + \&c.$, on aura $A\,1 = \frac{A}{a'^3}$, $B\,1 = \frac{B}{a'^3}$, $C\,1 = \frac{C}{a'^3}$ &c. On trouvera de même $P\,1 = \frac{P}{a'^5}$, $Q\,1 = \frac{Q}{a'^5}$, $R\,1 = \frac{R}{a'^5}$ &c., & l'on remarquera que les quantités $A\,1$, $B\,1$, $C\,1$ &c., $P\,1$, $Q\,1$, $R\,1$ &c. restent nécessairement les mêmes, en changeant a en a' & a' en a, de sorte qu'on aura aussi $A'\,1 = \frac{A}{a'^3}$, $B'\,1 = \frac{B}{a'^3}$ &c., $P'\,1 = \frac{P}{a'^5}$, $Q'\,1 = \frac{Q}{a'^5}$ &c. Faisant donc ces substitutions dans les formules de l'Art. LXXV., & mettant par tout a au lieu de $\frac{a}{a'}$, on trouvera d'abord

$$A\,2 = a^3\,A - a^2\,\frac{B}{2}$$

$$A\,3 = a^2\,\frac{2A - C}{2} - a^2$$

$$A\,4 = a^3\,A - A\,2 = a^2\,\frac{B}{2}$$

$$B\,2 = a^3\,B - a^2\,\frac{2A + C}{2} + a^2$$

$$B\,5 = -\,a^2\,B,$$

ensuite on aura (*Art. LXXIV.*)

$$P\,2 = \frac{3}{a'^3}\left(a\,\frac{Q}{2} - a^2\,P\right)$$

$$Q\,2 = \frac{3}{a'^3}\left(a\,\frac{2P + R}{2} - a^2\,Q\right)$$

$$R_2 = \frac{3}{a'^3} \left(a \frac{Q+S}{2} - a^2 R \right)$$

&c.

$$P_3 = \frac{3}{a'^3} \left(a \frac{Q}{2} - P \right)$$

$$Q_3 = \frac{3}{a'^3} \left(a \frac{2P+R}{2} - Q \right)$$

$$R_3 = \frac{3}{a'^3} \left(a \frac{Q+S}{2} - R \right)$$

&c.

ou bien, en faisant pour plus de simplicité

$$p = 3 \left(a \frac{Q}{2} - a^2 P \right)$$

$$q = 3 \left(a \frac{2P+R}{2} - a^2 Q \right)$$

$$r = 3 \left(a \frac{Q+S}{2} - a^2 R \right)$$

&c.

$$p1 = 3 \left(a \frac{Q}{2} - P \right)$$

$$q1 = 3 \left(a \frac{2P+R}{2} - Q \right)$$

$$r1 = 3 \left(a \frac{Q+S}{2} - R \right)$$

&c.

on aura

$$P_2 = \frac{p}{a'^3},\ Q_2 = \frac{q}{a'^3},\ R_2 = \frac{r}{a'^3} \text{ \&c.}$$

$$P_3 = \frac{p1}{a'^3},\ Q_3 = \frac{q1}{a'^3},\ R_3 = \frac{r1}{a'^3} \text{ \&c.}$$

De là on trouvera, par les formules de l'Art. LXXV.,

$$P_4 = a^3 (A + p) - a^2 \frac{q}{2},$$

$$P\,7 = a^2 \left(\frac{2A-C}{2} + \frac{2p\,1 - r\,1}{2}\right) + 2\,a^2, \;\&$$

$$Q\,5 = a^3\,q\,1 - a^2 \left(\frac{2A+C}{2} + \frac{2p\,1 + r\,1}{2}\right) - 2\,a^2.$$

On trouvera de méme les autres quantités $A'2$, $B'3$ &c.; il n' y aura pour cela qu'à mettre dans les formules des Art. cités, a' au lieu de a & a au lieu de a', & marquer ensuite toutes les autres lettres d' un trait; ce qui donnera, apres les substitutions,

$$A'2 = A - a\frac{B}{2}$$

$$A'3 = a\frac{2A-C}{2} - \frac{1}{a^2}$$

$$A'4 = A - A'2 = a\frac{B}{2}$$

$$B'2 = B - a\frac{2A+C}{2} + \frac{1}{a^2}$$

$$B'5 = - a\,B,$$

& ensuite

$$P'2 = \frac{p\,1}{a'^3},\; Q'2 = \frac{q\,1}{a'^3},\; R'2 = \frac{r\,1}{a'^3} \;\&c.$$

$$P'3 = \frac{p}{a'^3},\; Q'3 = \frac{q}{a'^3},\; R'3 = \frac{r}{a'^3} \;\&c.$$

d' où

$$P'4 = A + p\,1 - a\frac{q\,1}{2}$$

$$P'7 = a\left(\frac{2A-C}{2} + \frac{2p-r}{2}\right) + \frac{2}{a^2}$$

$$Q'5 = q - a\left(\frac{2A+C}{2} + \frac{2p+r}{2}\right) - \frac{2}{a^2}.$$

Enfin on trouvera par l' Art. LXXXIV., en mettant à la place de H, $h - h'$, à la place de K & de K' leurs valeurs approchées h & h', & la place de i n & de i n', $\frac{J'}{I}h^2$ & $\frac{J}{I}h'^2$,

$$iP = \frac{J'}{4I} h(Q5 - 4A3 - 2P7 + 2B2)$$

$$iP' = \frac{J}{4I} h'(Q'5 - 4A'3 - 2P'7 + 2B'2).$$

$$iQ = \frac{J'}{4I} hB5 \quad \& \quad iQ' = \frac{J}{4I} h'B'5.$$

Par ces valeurs de iP, iP', iQ, iQ', & par les valeurs de ik, ik', il, il' trouvées ci-dessus, on trouvera les valeurs de $i\mu$, $i\nu$, $i\rho$, $i\sigma$ (*Art. LXXXV.*) & ces mêmes valeurs étant ensuite multipliées par $\frac{h}{h'}$, on aura celles de $i\mu'$, $i\nu'$, $i\rho'$, $i\sigma'$.

Maintenant on aura par le même Art.

$$\text{tang. } \alpha 1 = \frac{G1}{F1} = \frac{(k-k)G + 2PG'}{(k-k')F + 2PF'}$$

$$= \frac{(k-k')\delta \text{ sin. } \alpha + 2P\delta' \text{ sin. } \alpha'}{(k-k')\delta \text{ cos. } \alpha + 2P\delta' \text{ cos. } \alpha'} \quad \&$$

$\delta 1 = \sqrt{[(F1)^2 + (G1)^2]} = \sqrt{[(k-k')^2\delta^2 + 4(k-k')}$ $P\delta\delta'(\text{sin. } \alpha \times \text{sin. } \alpha' + \text{cos. } \alpha \times \text{cos. } \alpha') + 4P^2\delta'^2] : 2h\nu$.

Soit $\alpha' - \alpha = A$, c'est-à-dire $\alpha' = \alpha + A$, & l'on aura

$$\text{tang. } \alpha.1 = \frac{((k-k')\delta + 2P\delta' \text{ cos. } A)\text{ sin. } \alpha + 2P\delta' \text{ sin. } A \cdot \text{cos. } \alpha}{((k-k')\delta + 2P\delta' \text{ cos. } A)\text{ cos. } \alpha - 2P\delta' \text{ sin. } A \cdot \text{sin. } \alpha}$$

$$\delta 1 = \frac{\sqrt{((k-k')^2\delta^2 + 4(k-k')P\delta\delta' \text{ cos. } A + 4P^2\delta'^2)}}{2h\nu};$$

Donc si on fait

$$(k-k')\delta + 2P\delta' \text{ cos. } A = \delta s \text{ cos. } u$$
$$\& \quad 2P\delta' \text{ sin. } A = \delta s \text{ sin. } u$$

on aura

$$1.^o \text{ tang. } \alpha 1 = \frac{\text{cos. } u \cdot \text{sin. } \alpha + \text{sin. } u \cdot \text{cos. } \alpha}{\text{cos. } u \cdot \text{cos. } \alpha - \text{sin. } u \cdot \text{sin. } \alpha} = \frac{\text{sin. } (u+\alpha)}{\text{cos. } (u+\alpha)}$$

$= \text{tang. } (u+\alpha)$; donc $\alpha 1 = u + \alpha$, & par conséquent $\eta = u$.

2.° $\delta s = \sqrt{[((k - k')\delta + 2P\delta' \operatorname{cof.} A)^2 + (2P\delta' \operatorname{fin.} A)^2]} = 2h\nu\delta 1 = 2h\nu\beta\delta$; donc $\beta = \frac{s}{2h\nu}$.

Donc, fi on fait pour plus de fimplicité $\frac{\delta'}{\delta} = \mathrm{b}$, on aura

$$\beta = \frac{\sqrt{((k - k' + 2P\,\mathrm{b} \operatorname{cof.} A)^2 + (2P\,\mathrm{b} \operatorname{fin.} A)^2)}}{2h\nu},$$

$$\operatorname{fin.} \eta = \frac{P\,\mathrm{b} \operatorname{fin.} A}{h\nu\beta}, \ \operatorname{cof.} \eta = \frac{k - k' + 2P\,\mathrm{b} \operatorname{cof.} A}{2h\nu\beta}.$$

Et pour avoir les valeurs de β', fin. η', & cof. η', il n'y aura qu'à mettre k' au lieu de k, α' au lieu de α, δ' au lieu de δ, *& viceverfa*, & marquer enfuite toutes les autres lettres d'un trait; ce qui donnera, à caufe de $\mathrm{b} = \frac{\delta'}{\delta}$ & $A = \alpha' - \alpha$,

$$\beta' = \frac{\sqrt{[(k' - k + \frac{2P'}{\mathrm{b}} \operatorname{cof.} A)^2 + (\frac{2P'}{\mathrm{b}} \operatorname{fin.} A)^2]}}{2h'\nu'},$$

$$\operatorname{fin.} \eta' = -\frac{P' \operatorname{fin.} A}{\mathrm{b}h'\nu'\beta'}, \ \operatorname{cof.} \eta' = \frac{k' - k + \frac{2P'}{\mathrm{b}} \operatorname{cof.} A}{2h'\nu'\beta'}.$$

Si on fait de même $\varepsilon' - \varepsilon = E$, & $\frac{\lambda'}{\lambda} = \mathrm{c}$, on trouvera par des procédés femblables

$$\gamma = \frac{\sqrt{((l - l' + 2Q\,\mathrm{c} \operatorname{cof.} E)^2 + (2Q\,\mathrm{c} \operatorname{fin.} E)^2)}}{2h\sigma 1},$$

$$\operatorname{fin.} \omega = \frac{Q\,\mathrm{c} \operatorname{fin.} E}{h\sigma\gamma}, \ \operatorname{cof.} \omega = \frac{l - l' + 2Q\,\mathrm{c} \operatorname{cof.} E}{2h\sigma\gamma};$$

& enfuite

$$\gamma' = \frac{\sqrt{[(l' - l + \frac{2Q'}{\mathrm{c}} \operatorname{cof.} E)^2 + (\frac{2Q'}{\mathrm{c}} \operatorname{fin.} E)^2]}}{2h'\sigma'},$$

$$\text{sin.}\,\omega' = -\frac{Q'\,\text{sin. E}}{c\,h'\sigma'\gamma'},\ \text{cos.}\,\omega' = \frac{l'-l+\frac{2Q'}{c}\,\text{cos.}\,E}{2\,h'\sigma'\gamma'}.$$

LXXXVIII. Pour déterminer maintenant les conſtantes δ, λ, α, ε, & δ', λ', α', ε', on remarquera qu'en ſuppoſant $t = 0$, on a $\Delta = \delta$, $\Lambda = \lambda$, $A = \alpha$, $E = \varepsilon$, & par conſéquent auſſi $\Delta' = \delta'$; $\Lambda' = \lambda'$, $A' = \alpha'$, & $E' = \varepsilon'$. On cherchera donc les élémens de la théorie de Jupiter & de Saturne pour une certaine époque, par exemple pour le commencement de l'année 1750., & l'on fera

$i\delta$ = à l'excentricité de Jupiter,
$i\lambda$ = à la tangente de l'inclinaiſon de ſon orbite par rapport à l'écliptique,
α = à la longitude de l'aphelie,
ε = à la longitude du nœud aſcendant,

& de même

$i\delta'$ = à l'excentricité de Saturne,
$i\lambda'$ = à la tangente de ſon inclinaiſon à l'écliptique,
α' = à la longitude de l'aphelie;
ε' = à la longitude du nœud.

A l'égard des conſtantes h & h', on les déterminera à l'aide des mouvemens moyens de Jupiter & de Saturne: car on aura

$$\frac{h}{h'} = \frac{\text{mouv. moy. Jup.}}{\text{mouv. moy. Sat.}}.$$

LXXXIX. Voila toutes les quantités qu'il eſt néceſſaire de connoitre pour déterminer les perturbations de Jupiter & de Saturne, en vertu de leur action réciproque. Nous allons remettre ici ſous les yeux du Lecteur les principales altérations du mouvement de ces deux Planètes.

Soient T & T' les moyens mouvemens de Jupiter & de Saturne comptés depuis l'époque, pour laquelle on a déterminé les élémens de ces deux Planètes, & on trouvera

1.° Qu'au bout du tems, qui répond au mouvement

moyen T, l' excentricité de Jupiter ſe trouvera augmentée en raiſon de

$$\sqrt{} \left[\frac{1+\beta^2}{2} + \frac{1-\beta^2}{2} \text{coſ.}\ 2 i \sigma T + \beta\ \text{ſin.}\ \eta \times \text{ſin.}\ 2 i \nu T \right] \text{ à } 1 .$$

2.° Que la tangente de l' inclinaiſon de l' orbite ſera pareillement augmentée en raiſon de

$$\sqrt{} \left[\frac{1+\gamma^2}{2} + \frac{1-\gamma^2}{2} \text{coſ.}\ 2 i \sigma T + \gamma\ \text{ſin.}\ \omega \times \text{ſin.}\ 2 i \sigma T \right] \text{ à } 1 .$$

3.° Que le lieu de l' aphelie ſe trouvera moins avancé d' un arc égal à

$$i \mu T + \text{arc. cot.} \left(\frac{\text{cot.}\ i \nu T}{\beta\ \text{coſ.}\ \eta} + \text{tang.}\ \eta \right).$$

4.° Que le lieu du nœud ſera auſſi moins avancé d'un arc égal à

$$i \rho T + \text{arc. cot.} \left(\frac{\text{cot.}\ i \sigma T}{\gamma\ \text{coſ.}\ \omega} + \text{tang.}\ \omega \right).$$

5.° Que le mouvement de Jupiter par rapport à l'écliptique ſera altéré d' une quantité égale à

$$\frac{5 i \delta^2}{4 \nu} \left[\frac{1-\beta^2}{2} (\text{ſin.}\ 2 i \nu T - 2 i \nu T) - \beta\ \text{ſin.}\ \eta\ (\text{coſ.}\ 2 i \nu T - 1) \right] + \frac{i \lambda^2}{4 \sigma} \left[\frac{1-\gamma^2}{2} (\text{ſin.}\ 2 i \sigma T - 2 i \sigma T) - \gamma\ \text{coſ.}\ \omega\ (\text{coſ.}\ 2 i \sigma T - 1) \right];$$

c' eſt - à - dire qu'il faudra ajouter à ſa longitude un angle égal à cette quantité.

On en dira autant de Saturne, avec cette ſeule différence qu'il faudra marquer les lettres d' un trait.

XC. Nous verrons plus bas dans l'Art. ſuiv. que les coéficiens $i \nu$ & $i \sigma$ ſont $=$ environ $\frac{1}{10000}$; de ſorte que durant pluſieurs revolutions les angles $2 i \nu T$ & $2 i \sigma T$ ſeront aſsès petits pour qu'on puiſſe ſuppoſer, ſans erreur ſenſible, ſin. $2 i \nu T = 2 i \nu T$, ſin. $2 i \sigma T = 2 i \sigma T$, & coſ. $2 i \nu T = 1$, coſ. $2 i \sigma T = 1$. Donc

1.° L'aug

1.° L' augmentation de l' excentricité de Jupiter sera à très-peu près dans la raison de $1 + i\nu\beta$ sin. $\eta \times T$ à 1; c' est-à-dire de $1 + \frac{iP}{b}$ b sin. $A \times T$ à 1; de sorte que la valeur de $i\delta$ croitra de la quantité $i\delta' \times \frac{iP}{b}$ sin. $A \times T$. Or on sait que dans les ellipses qui sont peu excentriques, la plus grande équation est à très-peu près égale au double de l' excentricité; d'où il s'ensuit que la plus grande équation de Jupiter ira en augmentant, & que sa variation sera, au bout de n revolutions à compter depuis l'époque donnée de,

$$2\, i\delta' \times \frac{iP}{b} \text{ sin. } A \times 360^\circ n.$$

2.° La tangente de l'inclinaison de Jupiter à l'écliptique croitra de même d'une quantité égale à $i\lambda' \times \frac{iQ}{b}$ sin. $E \times T$, & comme cette tangente est fort petite, ainsi qu'on le verra plus bas, on aura pour la variation de l' inclinaison de Jupiter à l' écliptique pendant n revolutions

$$i\lambda' \times \frac{iQ}{b} \text{ sin. } E \times 360^\circ n.$$

3.° Le mouvement de l'aphelie sera représenté à très-peu près par $-\left(i\mu + \frac{i\nu\beta \text{ cos. } \eta}{1 + i\nu\beta \text{ sin. } \eta \cdot T}\right) T$, ou encore par $-(i\mu + i\nu\beta \text{ cos. } \eta)\, T + i^2\nu^2\beta^2 \text{ cos. } \eta \times \text{sin. } \eta \times T^2$, c' est-à-dire par $-\left(\frac{ik}{b} + \frac{iP}{b} \text{ b cos. } A\right) T + \frac{iP}{b} \text{ b sin. } A \left(\frac{ik - ik'}{2b} + \frac{iP}{b} \text{ b cos. } A\right) T^2$; où l'on voit que le terme $-\left(\frac{ik}{b} + \frac{iP}{b} \text{ b cos. } A\right) T$ exprime le mouvement moyen & uniforme de l' aphelie, & que le terme $\frac{iP}{b}$ b sin. $A \left(\frac{ik - ik'}{2b} +\right.$

$\frac{iP}{b}$ b cof. A) T^2 donne une inégalité du mouvement de l'aphelie, laquelle augmente comme les quarrés des tems.

Ainfi le mouvement moyen de l'aphélie de Jupiter fera pour n revolutions de cette Planète de

$$-\left(\frac{ik}{b} + \frac{iP}{b}\,\text{b cof.}\,A\right) 360^\circ n,$$

& l'inégalité croiffante du mouvement de cet aphelie fera de

$$\frac{iP}{b}\,\text{b fin.}\,A\left(\frac{ik - ik'}{2b} + \frac{iP}{b}\,\text{b cof.}\,A\right)\frac{360^\circ}{57^\circ\,17'\,44''} \times 360^\circ n^2.$$

4.° Le mouvement des nœuds de Jupiter fera compofé de même de deux parties, dont l'une croitra uniformément, & donnera le mouvement moyen du nœud de

$$-\left(\frac{il}{b} + \frac{iQ}{b}\,\text{c cof.}\,E\right) 360^\circ n,$$

& dont l'autre fuivra la loi du quarré du tems, & donnera une inégalité croiffante de

$$\frac{iQ}{b}\,\text{c fin.}\,E\left(\frac{il - il'}{2b} + \frac{iQ}{b}\,\text{c cof.}\,E\right)\frac{360^\circ}{57^\circ\,17'\,44''} \times 360^\circ n^2.$$

5.° Le mouvement de Jupiter en longitude fera fujet à une altération de $\left(\frac{5 i^3 \delta^2 \nu}{2\pi}\,\beta\,\text{fin.}\,\eta + \frac{i^3 \lambda^2 \nu}{2\pi}\,\gamma\,\text{fin.}\,\omega\right) T^2$ à très-peu près, c'eft-à-dire de $\left(\frac{5}{2}\,i\delta \times i\delta' \times \frac{iP}{b}\,\text{fin.}\,A + \frac{1}{2}\,i\lambda \times i\lambda' \times \frac{iQ}{b}\,\text{fin.}\,E\right) T^2$; ce qui donne, comme l'on voit, dans le mouvement de cette Planète une inégalité croiffante comme les quarrés des tems, & qui fera au bout de n revolutions de

$$\left(\frac{5}{2}\,i\delta \times i\delta' \times \frac{iP}{b}\,\text{fin.}\,A + \frac{1}{2}\,i\lambda \times i\lambda' \times \frac{iQ}{b}\,\text{fin.}\,E\right)\frac{360^\circ}{57^\circ\,17'\,44''} \times 360^\circ n^2.$$

On trouvera de la même manière

1.° Que, pendant n révolutions de Saturne à compter depuis la même époque, la plus grande équation de cette Planète variera de

$$- 2\, i\, \delta \times \frac{i\, P'}{b'} \text{ ſin. } A \times 360^\circ n .$$

2.° Que l'inclinaiſon de ſon orbite à l'écliptique variera dans le même tems de

$$- i\, \lambda \times \frac{iQ'}{b'} \text{ ſin. } E \times 360^\circ n .$$

3.° Que le mouvement moyen & uniforme de l'aphelie de Saturne ſera exprimé par

$$- \left(\frac{ik'}{b'} + \frac{iP'}{b'} \times \frac{1}{\mathrm{b}} \text{ coſ. } A \right) 360^\circ n ,$$

& que de plus le mouvement de cet aphelie ſera ſujet à une inégalité croiſſante comme les quarrés des tems, laquelle ſera pour n révolutions de

$$- \frac{i\, P'}{b'} \times \frac{1}{\mathrm{b}} \text{ ſin. } A \left(\frac{ik' - ik}{2\, b'} + \frac{i\, P'}{b'} \times \frac{1}{\mathrm{b}} \text{ coſ. } A \right) \frac{360^\circ}{57^\circ\, 17'\, 44''} \times 360^\circ n^2 .$$

4.° Que le mouvement moyen des nœuds de Saturne ſera de

$$- \left(\frac{i\, l'}{b'} + \frac{iQ'}{b'} \times \frac{1}{\mathrm{c}} \text{ coſ. } E \right) 360^\circ n ,$$

& qu'il y aura auſſi, dans le mouvement des nœuds de cette Planète, une inégalité de la même eſpèce, laquelle ſera repréſentée par

$$- \frac{iQ'}{b'} \times \frac{1}{\mathrm{c}} \text{ ſin. } E \left(\frac{il' - il}{2\, b'} + \frac{iQ'}{b'} \times \frac{1}{\mathrm{c}} \text{ coſ. } E \right) \frac{360^\circ}{57^\circ\, 17'\, 44''} \times 360^\circ n^2 .$$

5.° Qu'enfin le mouvement de Saturne en longitude ſera ſujet à une inégalité croiſſante comme les quarrés des tems, & dont la valeur ſera, au bout de n révolutions, de

$$- \left(\frac{5}{2}\, i\delta \times i\delta' \times \frac{i\, P'}{b'} \text{ ſin. } A + \frac{1}{2}\, i\lambda \times i\lambda' \times \frac{iQ'}{b'} \text{ ſin. } E \right) \frac{360^\circ}{57^\circ\, 17'\, 44''} \times 360^\circ n^2 .$$

Au reſte il faut ſe reſſouvenir que ces propoſitions ceſſent d'être exactes, lorſqu'après un grand nombre des révolutions, les angles $2\, i\, \nu\, T$, $2\, i\, \sigma\, T$, & $2\, i\, \nu' T'$, $2\, i\, \sigma' T'$ commencent à devenir conſidérables.

XCI. Suivant les tables de M. Halley, le mouvement moyen de Jupiter en 100. années Juliennes eſt 8. rev.

$5^s\ 6^\circ\ 28'\ 11''$, c'eſt-à-dire $10931291''$, d'où retranchant la preceſſion ſéculaire des équinoxes, laquelle eſt de $5034''$ on a pour le mouvement ſéculaire de Jupiter $10926257''$.

Les mêmes tables donnent le mouvement moyen de Saturne en 100. ans de 3 rev. $4^s\ 23^\circ\ 6'\ 0''$, c'eſt-à-dire de $4403160''$, d'où l'on trouve pour le mouvement ſéculaire de Saturne $4398126''$.

On aura donc $\frac{b'}{b} = \frac{4398126}{10926257} = 0,\ 402528$; d'où l'on tire $a = 0,\ 545169$.

De là on trovéra

$A = 2,\ 178104$	$P = 6,\ 891711$
$B = 3,\ 183228$	$Q = 12,\ 403290$
$C = 2,\ 080116$	$R = 9,\ 890764$
$D = 1,\ 294032$	$S = 7,\ 315770$
&c.	&c.

& enſuite

$A2 = -0,\ 120125$	$A'2 = 1,\ 310407$
$A3 = 0,\ 041029$	$A'3 = -2,\ 744209$
$A4 = 0,\ 473042$	$A'4 = 0,\ 867697$
$B2 = -0,\ 143482$	$B'2 = 4,\ 793425$
$B5 = -0,\ 946083$	$B'5 = -1,\ 735395$
$p = 3,\ 997995$	$p1 = -10,\ 532304$
$q = 8,\ 300535$	$q1 = -17,\ 850234$
$r = 7,\ 306455$	$r1 = -13,\ 546971$
$P4 = -0,\ 232789$	$P'4 = -3,\ 488506$
$P7 = -0,\ 184498$	$P'7 = 7,\ 537649$
$Q5 = 0,\ 700695$	$Q'5 = -4,\ 354384$.

Donc, à cauſe de $\frac{J}{I} = \frac{1}{1067} = 0,\ 000937207$, & de $\frac{J'}{I} = \frac{1}{3021} = 0,\ 000331016$, on aura

$\frac{ik}{b} = -0,000078292$ $\frac{ik'}{b'} = -0,000406604$

$\frac{il}{b} = 0,000078293$ $\frac{il'}{b'} = 0,000406606$

$\frac{iP}{b} = 0,000051192$ $\frac{iP'}{b'} = 0,000265701$

$\frac{iQ}{b} = -0,000078293$ $\frac{iQ'}{b'} = -0,000406606$

& l' on trouvera

$i\mu = -0,000120981$ $i\mu' = -0,000300553$

$i\nu = 0,000085425$ $i\nu' = 0,000212221$

$i\rho = 0,000120981$ $i\rho' = 0,000300553$

$i\sigma = 0,000120981$ $i\sigma' = 0,000300553$

Or selon M. Halley on a pour l'année 1750

$$i\delta = \frac{25078}{520098} = 0,048218$$

$$i\delta' = \frac{54381}{954007} = 0,057003$$

$$i\lambda = \text{tang. } 1^\circ\ 19'\ 10'' = 0,023032$$

$$i\lambda' = \text{tang. } 2^\circ\ 30'\ 10'' = 0,043710$$

$$\alpha = 6^s\ 10^\circ\ 33'\ 46'', \qquad \varepsilon = 3^s\ 8^\circ\ 15'\ 49''$$

$$\alpha' = 8^s\ 29^\circ\ 39'\ 58'', \qquad \varepsilon' = 3^s\ 21^\circ\ 20'\ 5''$$

d' où l' on tire

$$\mathrm{b} = 1,182190, \qquad A = 79^\circ\ 6'\ 12'',$$

$$\mathrm{c} = 1,897725, \qquad E = 13^\circ\ 4'\ 16''.$$

Si donc on subſtitue ces valeurs numériques dans les formules de l' Art. préc. on formera la Table ſuivante, dans laquelle n eſt le nombre des révolutions que Jupiter ou Saturne a achevées depuis le commencement de l' année 1750. que nous avons priſe pour époque; de ſorte qu' il faudra faire n poſitif pour les tems qui ſuivent cette époque, & négatif pour ceux qui la précédent.

TABLE *de la variation des élémens de Jupiter & de Saturne, ſuivant la théorie.*

	De Jupiter	De Saturne
Variation de la plus grande équation du centre	$+\ 7'', 4254\,n$	$-\ 32'', 6086\,n$
Variation de l'inclinaiſon à l'écliptique	$-\ 1'', 0030\,n$	$+\ 2'', 7449\,n$
Mouvement moyen de l'aphelie par rapport aux étoiles fixes	$+\ 86'', 6311\,n$	$+\ 471'', 8632\,n$
Inégalité croiſſante dans le mouvement de l'aphelie	$+\ 0'', 0262\,n^2$	$+\ 0'', 1141\,n^2$
Mouvement moyen des nœuds par rapport aux étoiles fixes	$+\ 86'', 1075\,n$	$-\ 256'', 4655\,n$
Inégalité croiſſante dans le mouvement des nœuds	$+\ 0'', 0513\,n^2$	$-\ 0'', 0405\,n^2$
Inégalité croiſſante dans le mouvement en longitude	$+\ 2'', 7402\,n^2$	$-\ 14'', 2218\,n^2$

ADDITION

Pour les Articles LXXVIII. & LXXIX.

Nous avons dit dans le premier de ces deux Articles que la quantité $\int \Psi\, d\zeta$ contient un terme, qui par l'intégration se trouve divisé par des quantités de l'ordre de i; & nous avons, en conséquence, conservé les termes où cette quantité se trouvoit multipliée par $i^2 n$, en rejettant toutes fois ceux, où la même quautité auroit été multipliée par $i^3 n$. Mais il est facile de se convaincre par la substitution des valeurs de ζ, & de ζ' (*Art. LXXXIV.*), que le diviseur du terme dont il s'agit sera réellement de l'ordre de $i\, n$; de sorte que, si on veut avoir égard dans les valeurs de y & de z aux quantités de l'ordre de i^2, il n'est pas permis de négliger les termes de l'ordre de $i^3 n$, où se trouve la quantité $\int \Psi\, d\zeta$; car l'intégration réduira à l'ordre de i^2 les coéficiens de ces termes. Il en sera de même de quelque termes de l'ordre de i qui se trouveront dans la quantité $n \int \Phi\, dy$.

Ainsi on trouve qu'il faut ajouter à la valeur de $\int \frac{dz^2}{dt^2}\, dy$ le terme $- 2\, i\, n \int dy \int \Psi\, d\zeta$, & par conséquent à la valeur de $\int \zeta^2 dy$ le terme $- \frac{4\, i\, n}{3\, h^2} \int dy \int \Psi\, d\zeta$; d'où il s'ensuit que le premier membre de l'équation (o) doit être augmenté du terme $4\, i^2 n \int dy \int \Psi\, d\zeta$, & que le premier membre de l'équation (p) doit être augmenté du terme $- 8\, i^2 n \int dy \int \Psi\, d\zeta$.

De là on trouvera, après avoir achevé toutes les opérations, qu'il faudra ajouter (*Art. LXXIX.*) à la valeur de Y les termes

$$8\, i^3 (\beta - 2\,\gamma) \int dy \int \Psi\, d\zeta + 12\, i^2 \delta\, y \int \Phi\, dy$$
$$+ 4\, i^3 (\varepsilon - \eta\, h^2)\, y \int \Psi\, d\zeta,$$

& à la valeur de Z les termes

$$12\,i^3\pi\,z\int\Psi\,dz + 4\,i^2\,(\rho - \sigma\,h^2)\,z\int\Phi\,dy.$$

Au reste cette omission n'influe point sur le reste de nos calculs.

EXTRAIT

EXTRAIT DE DIFFÉRENTES LETTRES DE M. D'ALEMBERT A M. DE LA GRANGE

écrites pendant les années 1764. & 1765.

I.

Votre problème sur l'intégration de l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \frac{Rd^2y}{dx^2} \ldots + \frac{Md^my}{dx^m} = X$, lorsque l'on a $m-1$ valeurs de x dans l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \frac{Rd^2y}{dx^2} + \ldots \frac{Md^my}{dx^m} = 0$, m'a paru si beau, que j'en ai cherché une solution que voici.

Soit $y = Vz$, V étant une indéterminée, & z une des valeurs de y qui satisfait à l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \ldots$ &c. $= 0$, & soit substituée cette valeur dans l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} +$ &c. $\ldots = X$; la transformée sera composée 1.° d'une partie $V\,(Pz + \frac{Qdz}{dx} \ldots + \frac{Md^mz}{dx^m})$, où X ne se trouvera point, laquelle sera évidemment $= 0$, à cause de $Pz + \frac{Qdz}{dx} + \ldots \frac{Md^mz}{dx^m} = 0$ (*hyp.*) 2.° d'une partie où V ne se trouvera point, & qui ne contenant que dV avec ses différences jusqu'à d^mV inclusivement, pourra par conséquence être abaissée au $(m-1)^e$ dégré, en faisant $dV = V'dx$; or puisqu'on a $m-1$ valeurs de y, que $y = Vz$, & que z est déja une des valeurs de y, on aura donc $m-2$ valeurs de V, en n'y comprenant pas l'unité; donc supposant que z' soit une de ces valeurs, & faisant $V' = z'\int V''dx$, com-

me on a fait $y = z\int V' dx$, on abaissera de même l'équation en V', & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une équation qui sera de cette forme $dV''''^{\&c.} + KV''''^{\&c.} dx = X$, K & X étant des fonctions de x. Or on sait que cette équation est intégrable.

Il est aisé de voir par cet exposé, 1.° qu'à chaque transformation il disparoit un des coéficiens, savoir celui de y par la première, celui de dy par la seconde &c., ensorte que dans la dernière transformée il ne restera que les deux coéficiens de $d^m y$ & $d^{m-1}y$; or si on a une quantité de cette forme $\frac{\omega d^{m-1}\lambda}{dx^{m-1}} + \frac{\beta d^m \lambda}{dx^m}$, & qu'on fasse $d\lambda = \zeta n dx$, on aura dans la transformée (en laissant à part les autres termes) 1.° $\beta\zeta$ à la place de β & $\frac{d^{m-1}n}{dx^{m-1}}$ à la place de $\frac{d^m\lambda}{dx^m}$. 2.° $[\omega\zeta + \frac{\beta d\zeta}{dx} \times (m-1)] \frac{d^{m-2}n}{dx^{m-2}}$ au lieu de $\frac{\omega d^{m-1}\lambda}{dx^{m-1}}$. Donc si on suppose que $\frac{Nd^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{Md^m y}{dx^m}$ soient les deux derniers termes du premier membre de la proposée, & qu'on fasse $y = z\int z' dx \int z'' dx \int z''' \ldots \int V''''^{\&c.} dx$, il sera aisé de trouver, par la remarque précédente, la forme de la dernière transformée, d'où l'on tirera aisément la valeur de $V''''^{\&c.}$ Je ne fais, Monsieur, qu'indiquer l'opération, qui seroit très-simple & très-courte; vous supplerez aisément à ce que je ne dis pas.

II.

Vous me marquez que lorsque $y = f + hx$, f & h étant des constantes, vous trouvez moyen de satisfaire à l'équation $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$, en prenant $\varphi x = \frac{M \log.(f+hx)}{\theta\pi} + A(f+hx)^{\frac{\mu}{\theta}} + B$, A & B étant des constantes ar-

bitraires, μ un nombre quelconque entier, π le rapport de la circonférence au diamètre, & θ un nombre tel, que la tangente de $\theta\pi = h$. J'ai trouvé, par une méthode assez simple, le moyen d'arriver à cette élégante formule, & même à une plus générale. Voici d'abord comment j'arrive à votre formule.

Je considère en premier lieu que $(1 + h\sqrt{-1})^m = A + B\sqrt{-1}$, A & B étant les *cosinus* & *sinus* de m fois l'angle dont la tangente est h; c'est ce que j'ai démontré le premier dans les Mém. de Berlin 1746. & ailleurs; donc si $(1 + h\sqrt{-1})^m - (1 - h\sqrt{-1})^m = 0$, on aura $B = 0$, donc B est le *sinus* de $\mu\pi$, π étant la demi-circonférence, & μ un nombre entier positif ou négatif; donc si $h = \text{tang.}\ \theta\pi$, on aura $\mu\pi = m\theta\pi$, donc $m = \frac{\mu}{\theta}$.

Je considère en second lieu, que log. $(x + hx\sqrt{-1})$ $-$ log. $(x - hx\sqrt{-1}) =$ log. $\left(\frac{1 + h\sqrt{-1}}{1 - h\sqrt{-1}}\right) = 2\sqrt{-1}$ $\int \frac{dh}{1 + hh} = 2\sqrt{-1} \times \theta\pi$. De là il est aisé de voir que si on fait $\varphi(x) = \frac{M \log. (f + hx)}{\theta\pi} + A(f + hx)^{\frac{\mu}{\theta}} +$ B, on aura $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$; ce qui se verra facilement, en mettant $x \pm y\sqrt{-1}$ au lieu de x dans la valeur de φx, & ensuite $f + hx$ au lieu de y.

Or il est aisé de voir qu'au lieu de $A(f + gx)^{\frac{\mu}{\theta}}$ dans la valeur de φx, on peut écrire une suite de termes tels que $A[(f + gx)^{\frac{k}{\theta}} + \lambda]^p$, A & λ étant des constantes arbitraires, & p, k des nombres entiers posi-

tifs ou négatifs. On peut même écrire dans tous, ou dans plusieurs de ces termes (que j'appelle ξ pour abreger) c^{ξ} au lieu de ξ.

On remarquera de plus que θ peut avoir une infinité de valeurs; car soit $\theta\pi$ le plus petit angle dont la tangente est h, cette tangente sera aussi celle de l'angle $(\theta \pm 2n)\pi$, n étant un nombre quelconque positif; donc au lieu de θ on peut mettre $\theta \pm 2n$. Par la même raison au lieu du terme $\frac{M \log.(f+hx)}{\theta\pi}$, on pourra substituer une suite de termes $A \log.(f+hx)^{r} + A' \log.(f+hx)^{r'} +$ &c., pourvu que l'on ait $M = Ar(\theta \pm 2n)\pi + A'r'(\theta \pm 2n')\pi$ &c.

En général on pourra trouver par une méthode semblable la valeur de φx dans l'équation $a\varphi(\alpha x + \beta y \sqrt{-1}) + a'\varphi(\alpha' x + \beta' y \sqrt{-1}) +$ &c. $= 0$; dans l'hypothèse que $y = f + hx$. Pour cela il suffira de considérer, que si on éleve $\alpha + \beta h \sqrt{-1}$ à la puissance $m + k\sqrt{-1}$ on aura, suivant mes formules des Mém. de Berlin 1746., $(\alpha + \beta h \sqrt{-1})^{m + k\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$, A étant $[(\alpha^2 + \beta^2 h^2)^{\frac{m}{2}} c^{-k(\theta\pi \pm 2n\pi)}] \times [\text{cof.}(k \log. \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 h^2)} + m(\theta \pm 2n)\pi)]$, & $B = [(\alpha^2 + \beta^2 h^2)^{\frac{m}{2}} c^{-k(\theta\pi \pm 2n\pi)}]$ fin. $[k \log. \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 h^2)} + m(\theta \pm 2n)\pi]$; on trouvera de même la valeur de A', & celle de B' en α' & en β' &c.; & il ne restera qu'à faire $aA + a'A' + a''A'' +$ &c. $= 0$; $bB + b'B' + b''B'' +$ &c. $= 0$, ce qui donnera toujours m & k, au moins par une construction géométrique; d'où il sera facile de tirer, par une méthode semblable à la précédente, la valeur de k. De même si on fait $b \log.(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + b' \log.(\alpha' + \beta'\sqrt{-1}) +$ &c. $= 2M + 2N\sqrt{-1}$ (M & N étant données) on dé-

terminera b & b' par une ſemblable méthode; je n'en préſente ici, Monſieur, que l'eſprit & l'idée générale; cette légère idée ſuffit à un auſſi grand Géomètre que vous, pour voir tout ce qu'on en peut tirer.

Si au lieu de x on mettoit une fonction quelconque X de x, enſorte que $a\,\varphi\,(\alpha X + \beta y \sqrt{-1}) + a'\,\varphi\,(\alpha X + \beta' y \sqrt{-1}) +$ &c. dût être $= 0$, on trouveroit de même la valeur de $\varphi\,\alpha X$, pourvu que y fut $= f + h X$. Si le ſecond membre de l'équation, au lieu d'être $= 0$ étoit $= K x^m$, alors il faudroit faire $(\alpha + \beta \sqrt{-1})^m = A + B \sqrt{-1}$, $(\alpha' + \beta' \sqrt{-1})^m = A' + B' \sqrt{-1}$; &, prenant ω pour un coéficient indéterminé, ſuppoſer $\omega a (A + B \sqrt{-1}) + \omega a' (A' + B' \sqrt{-1}) +$ &c. $= K$, ce qui donnera ω. Si le ſecond membre étoit $K x^m + K' x^{m'}$ + &c. on feroit de plus $(\alpha + \beta \sqrt{-1})^{m'} = (A) + (B) \sqrt{-1}$, & on prendroit $\omega' a [(A) + (B) \sqrt{-1}] + \omega' a' [(A') + (B') \sqrt{-1}] +$ &c. $= K'$, & ainſi du reſte. Si le ſecond membre étoit K log. $x + M$; alors il faudroit faire $a\,\omega$ log. $x\,(\alpha + \beta \sqrt{-1}) + a'\,\omega$ log. $x\,(\alpha' + \beta' \sqrt{-1}) +$ &c. $= K$ log. $x + M$; d'où l'on tirera $a\,\omega + a'\,\omega +$ &c. $= K$, & ſuppoſant log. $\alpha + \beta \sqrt{-1} = A + B \sqrt{-1}$, &c., on auroit $a\,\omega\,(A + B \sqrt{-1}) + a'\omega\,(A' + B' \sqrt{-1}) +$ &c. $= M$. Mais en voila aſſez ſur ce ſujet.

Au reſte, ces formules ne peuvent avoir, ce me ſemble, aucune application pour trouver le mouvement d'un fluide dans un vaſe dont les parois auroient pour équation $y = f + h x$; & on peut même remarquer, que toutes les fois que l'équation des parois donnera $y = 0$ pour une ſeule valeur de x à volonté, l'équation $\varphi\,(x + y \sqrt{-1}) - \varphi\,(x - y \sqrt{-1}) = 2 M \sqrt{-1}$ ſera illuſoire pour repréſenter le mouvement du fluide. Car d'abord on aura $M = 0$ dans la courbe des parois, puiſque $y = 0$ donne $M = 0$; or M ne ſauroit être $= 0$ dans les autres cour-

bes, puiſqu'elles ne ſont diſtinguées de la courbe des parois que par la valeur de M; donc ces courbes ne ſauroient couper, ni l'axe, puiſque y ſeroit alors $= 0$, ce qui donneroit $M = 0$, ni la courbe des parois, puiſque dans le point commun aux deux courbes M ſeroit néceſſairement $= 0$ dans l'une, comme il l'eſt (*hyp.*) dans l'autre; ces courbes ne pourroient donc que rentrer en elles-mêmes, & par conſéquent ne repréſenteroient pas le mouvement progreſſif; ce qui peut d'ailleurs ſe voir aiſément à *priori*.

III.

Voici de quelle manière je m'y prends pour trouver, dans l'équation du problème des trois corps, la valeur du rayon par approximation, ſans être obligé de ſubſtituer, à chaque opération, la valeur du rayon trouvée dans l'opération précédente.

Soit par exemple $ddt + N^2 t dz^2 + \beta t \text{ coſ. } pz = 0$; je remarque que, par la nature de la ſolution que j'ai donnée de ces ſortes d'équations, tout terme de cette forme $+ \omega \text{ coſ. } \lambda z$ dans la valeur de t, produira dans βt coſ. pz, deux termes de cette forme $- \frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda + p)^2)} \times \omega \text{ coſ. } (\lambda z + pz) - \frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda - p)^2)} \times \omega \text{ coſ. } (\lambda z - pz)$, & deux autres de cette forme $+ \frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda + p)^2)} \times \omega \text{ coſ. } Nz + \frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda - p)^2)} \times \omega \text{ coſ. } Nz$. Donc prenant, par exemple, k coſ. Nz pour la première valeur de t, il n'y a qu'à 1.° augmenter & diminuer ſucceſſivement N de $+ p$ & de $- p$, multiplier k par $- \frac{\beta}{2}$ & diviſer le produit par N^2 moins le quarré du coéficient de z. 2.° écrire chaque terme ainſi trouvé, l'un dans une colonne verti-

cale à droite, l'autre dans une colonne verticale à gauche, de celui qu'on vient d'avoir par l'opération précédente, & ſous la colonne dont le terme le plus haut eſt k coſ. Nz; mettre de ſuite les coéficiens de coſ. Nz ſemblables à ceux qu'on vient d'indiquer, & qui peuvent ſe réduire à un ſeul, ſavoir $+ \frac{\beta\omega(N^2-\lambda^2-p^2)}{(N^2-\lambda^2-p^2)^2-4\lambda^2p^2}$ coſ. Nz. De là il eſt aiſé de voir que le terme k coſ. Nz produira les termes

$$- \frac{\beta k \text{ coſ. }(Nz \pm pz)}{2(N^2-(N\pm p)^2)} + \frac{\beta\beta k \text{ coſ. }(Nz \pm 2pz)}{2.2.(N^2-(N\pm 2p)^2)\times(N^2-(N\pm p)^2)}$$

$$- \frac{\beta^3 k \text{ coſ. }(Nz \pm 3pz)}{2.2.2.(N^2-(N\pm 3p)^2)\times(N^2-(N\pm 2p)^2)\times(N^2-(N\pm p)^2)}$$

$$+ \frac{\beta^4 k \text{ coſ. }(Nz \pm 4pz)}{2^4(N^2-(N\pm 4p)^2)\times(N^2-(N\pm 3p)^2)\times(N^2-(N\pm 2p)^2)\times(N^2-(N\pm p)^2)}$$

– &c., le ſigne + étant pour les colonnes à droite de celle où eſt k coſ. Nz, & le ſigne — pour les colonnes à gauche. A l'égard du terme k coſ. Nz, il ſera de même ſucceſſivement augmenté des termes $+ \frac{\beta k \text{ coſ. } Nz}{2(N^2-(N\pm p)^2)}$

$$- \frac{\beta\beta k \text{ coſ. } Nz}{2.2.(N^2-(N\pm 2p)^2)\times(N^2-(N\pm p)^2)} + \frac{\beta^3 k \text{ coſ.} Nz}{2.2.2.\ \&c.}\ \&c.$$

leſquels en produiront eux mêmes de nouveaux, analogues à ceux que le terme k coſ. Nz a produit. Vous verrez aiſément, Monſieur, par cette vuë générale, comment on peut trouver facilement les différens termes ſucceſſifs de la ſérie qui exprime la valeur de t. Si on avoit $\lambda + p = N$, le dénominateur ſeroit $= 0$; en ce cas au lieu des quatre nouveaux termes que le terme ω coſ. $(\lambda z + pz)$ produit dans la valeur de t, il faudroit ſeulement changer le coéficient N de Nz en un autre N', tel que N'^2 fût $= N^2 + \frac{\beta R}{2k'}$, k' étant le coéficient de coſ. Nz dans la valeur de t trouvée par les opérations précédentes, & R le coéficient du terme R coſ. $(Nz \pm pz)$ qui multiplié par β coſ. pz

donnera dans la différentielle un nouveau terme de la forme $d\zeta^2$ cos. $N\zeta$. Le fondement de cette méthode se trouve dans mes Recherches sur le sistème du monde pag. 37., 244., 245. &c. Il faut cependant apporter à ce que je viens de dire, une modification suffisamment expliquée à la page 242. de ce même Ouvrage & qui fait distinguer les cas où le dénominateur $N^2 - (\lambda \pm p)^2$ devenant $= 0$, change simplement le coéficient K, & ceux où il donne réellement des arcs de cercle dans la valeur du rayon.

I V.

J'ai lu, Monsieur, avec autant de plaisir que de fruit, votre belle Piéce sur la libration de la Lune bien digne du prix qu'elle a remporté; elle m'a fait faire sur la solution de ce problème plusieurs reflexions qui me meneroient trop loin; je me bornerai à une seule qui a rapport au problème de la précession des équinoxes, lequel est du même genre que celui de la libration de la Lune; c'est que toutes les solutions qu'on a données jusqu'à présent de ce problème, ont une imperfection dont personne ne s'est apperçu. Pour la faire connoitre en peu de mots, supposons que les deux équations du problème soient

$\Psi\, d\zeta^2 = d(d\varepsilon \text{ cos. } \pi^2) + k' d\zeta\, d(\text{sin. } \pi) \ldots\ldots (A)$ &

$dd\pi = \Gamma d\zeta^2 - d\varepsilon^2 \text{ cos. } \pi \text{ sin. } \pi + k' d\varepsilon\, d\zeta \text{ cos. } \pi \ldots (B)$;

Ψ & Γ étant des fonctions qui dépendent des forces perturbatrices. En réduisant, comme on le suppose ordinairement, ces équations à

$\Psi\, d\zeta = k' d(\text{sin. } \pi)$ & $\Gamma d\zeta - k' d\varepsilon \text{ cos. } \pi = 0$,

$d\varepsilon$ & $d\pi$ ne seroient point égaux à zéro, lorsque $\zeta = 0$; il est pourtant aisé de voir qu'ils le doivent être.

Pour se tirer de cette difficulté, il faut intégrer ces équations plus rigoureusement; d'abord on supposera $\pi = \pi' + \alpha$, π' étant la valeur de π lorsque $\zeta = 0$, & α une quantité fort petite, & on aura, en négligeant les termes

très-

très-petits, & suppofant pour plus de généralité $\frac{d\varepsilon}{d\zeta} = \mu$ lorfque $\zeta = o$, $d\varepsilon = \frac{d\zeta \int \Psi d\zeta}{\text{cof.}\, \pi^2} + \mu d\zeta - k' \alpha \frac{d\zeta}{\text{cof.}\, \pi}$; & $dd\alpha + \alpha k'^2 d\zeta^2 - k' \frac{d\zeta \int \Psi d\zeta}{\text{cof.}\, \pi} - k' \mu\, \text{cof.}\, \pi\, d\zeta^2 - \Gamma d\zeta^2 = o$. Donc faifant encore $\frac{d\alpha}{d\zeta} = \nu$ lorfque $\zeta = o$, on aura la valeur de α par les méthodes d'intégration connues, & enfuite celle de $d\varepsilon$. Si on fuppofe μ & $\nu = o$, ces valeurs feront $= o$, lorfque $\zeta = o$, comme elles le doivent être; & en négligeant dans les valeurs de α & de ε les termes trés-petits, on retombera dans les mêmes valeurs que donneroient les équations $\Psi d\zeta = k' d\zeta$ fin. π & $\Gamma d\zeta + d\varepsilon k'$ cof. $\pi = o$.

V.

Je fuis charmé que nous foyons enfin prefque abfolument d'accord fur le problème des cordes vibrantes. Vous avez reconnu, fuivant ce que vous me dites, que la folution ne peut avoir lieu, comme je le prétendois, fi les branches alternatives ne font pas affujetties à la loi de continuité; vous y mettez feulement une reftriction, la folution peut avoir lieu, felon vous, fi la courbe initiale n'eft affujettie à aucune équation, pourvu que dans cette courbe $\frac{d^n y}{dx^n}$ ne faffe de faut nulle part dans la courbe initiale, ni dans les branches alternatives. Mais comment concevez vous qu'il puiffe ne point y avoir de pareils fauts dans une courbe tracée au hazard, & qui ne fera affujettie, comme vous l'exigez, à aucune équation? Il me paroit que cette propriété ne peut appartenir qu'à une courbe réguliérement tracée, & affujettie à une équation; en effet pour que $\frac{d^n y}{dx^n}$ ne faffe de faut nulle part, il faut qu'en

prenant une partie infiniment petite de la courbe partout où l'on voudra, & y faisant commencer les coordonnées, on puisse supposer que dans cette petite portion y soit égale à $A + B x^m + C x^n + D x^p +$ &c. Prenons maintenant une petite partie contigue à celle-là, on aura par la même raison $y = A' + B' x^{m'} + C' x^{n'} + D' x^{p'}$ + &c. Or si les exposans m & m', n & n', p & p' &c. n'étoient pas les mêmes, & si les coefficiens A & A', B & B'; C & C' &c. n'étoient pas tels qu'il doivent être pour appartenir à une courbe continue, il y auroit un *saut* dans quelqu'un des $\frac{d^n y}{d x^n}$ au point commun qui unit ces deux parties infiniment petites. Donc puisqu'on suppose qu'il n'y a point de saut dans $\frac{d^n y}{d x^n}$, il s'ensuit que ces deux parties, & par la même raison toutes les suivantes à droite & à gauche, sont assujetties à une même équation. D'ailleurs quand il seroit vrai que la solution seroit applicable à certaines courbes tracées au hazard, comment s'assurera-t-on que dans ces courbes $\frac{d^n y}{d x^n}$ n'y fera point de saut? condition nécessaire, selon vous, pour que la solution soit applicables à ces courbes. Vous trouverez, Monsieur, beaucoup d'autres reflexions sur cette matière dans un long Mémoire que je destine au quatriéme Volume de mes Opuscules. En attendant je désire beaucoup de savoir votre avis sur les observations que j'ai l'honneur de vous proposer, & je ne désire pas moins que cet avis nous rapproche entiérement quant au point sur lequel nous différons encore, & qui me semble purement métaphysique.

Je ne pense pas au reste que la solution ne puisse avoir lieu dans une courbe à équation, si elle n'est représentée par

$$y = \alpha \text{ sin. } \pi x + \beta \text{ sin. } 2 \pi x + \gamma \text{ sin. } 3 \pi x + \text{&c.}$$

à la manière de M. Daniel Bernoulli. Il me paroit évi-

dent au contraire que la ſolution peut avoir lieu dans beaucoup d' autres courbes ; par exemple dans celle qui auroit pour équation $y = \alpha$ ſin. $\pi x^{\frac{p}{q}}$, α étant fort petit, & p, q des nombres impairs, tels que p ſoit $> q$, afin que dy ne ſoit nulle part $= \infty$, ce qui eſt contre l' hypothèſe, ſur laquelle la ſolution eſt appuyée. Je ſais que dans ces courbes il y auroit quelqu'un des $\frac{d^n y}{dx^n}$ qui ſeroit infini ; mais cela n' empêche pas, ce me ſemble, la ſolution d' être bonne, il ſuffit que $\frac{d^n y}{dx^n}$ ne faſſe point de *ſaut*, c'eſt-à-dire ne paſſe pas *bruſquement* du fini à l' infini, ou de l' infini au fini, ou d' une valeur finie à une autre valeur finie.

V I.

Votre formule pour exprimer par une ſuite ſans imaginaires la valeur de $\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1})$, ou celle de $\frac{\varphi(x+y\sqrt{-1}) - \varphi(x-y\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$ me paroit très-élégante. J' en ai imaginé une toute différente pour parvenir au même objet, & qui a cet avantage, que quand φx eſt $= Ax^m + Bx^n +$ &c. m & n étant des nombres entiers poſitifs, la ſuite n' a qu'un nombre fini de termes, comme il arrive dans la formule du Binome. Il ſeroit trop long de vous expoſer ici tout le procédé du calcul, qui peut même être encore plus ſimplifié que je n' ai fait juſqu'à préſent ; je vous dirai ſeulement qu'il eſt fondé ſur les conſidérations ſuivantes.

1.° $\varphi(x+y) = \varphi x + y\frac{d\varphi x}{dx} + y^2\frac{d^2\varphi x}{2dx^2} + y^3 \frac{d^3\varphi x}{2.3\,dx^3} +$ &c., &

$\varphi(x + by\sqrt{-1}) = \varphi x + by\sqrt{-1}\,\frac{d\varphi x}{dx} - b^2y^2\,\frac{d^2\varphi x}{2\,dx^2} - b^3y^3\sqrt{-1}\,\frac{d^3\varphi x}{2.3\,dx^3} + b^4y^4\,\frac{d^4\varphi x}{2.3.4\,dx^4} +$ &c.

2.° $\varphi(x+y) - \varphi x = y\,\frac{d\varphi x}{dx} + y^2\,\frac{d^2\varphi x}{2\,dx^2} + y^3\,\frac{d^3\varphi x}{2.3\,dx^3}$ + &c.

Donc $\varphi(x+2y) - \varphi(x+y) - [\varphi(x+y) - \varphi x]$, ou $\varphi(x+2y) - 2\varphi(x+y) + \varphi x$, ſe trouvera, en mettant dans chaque terme $Ay^n\,\frac{d^n\varphi x}{dx^n}$ du ſecond membre, au lieu de $\frac{d^n\varphi x}{dx^n}$, $\frac{d^n\varphi(x+y)}{dx^n} - \frac{d^n\varphi x}{dx^n} = y\,\frac{d^n\varphi x}{dx^n} + y^2\,\frac{d^{n+1}\varphi x}{2\,dx^{n+1}} + y^3\,\frac{d^{n+2}\varphi x}{2.3\,dx^{n+2}}$ + &c. &c.; d' où il eſt aiſé de conclure qu'en général $\varphi[x+my] - m\varphi[x+(m-1)y] + \frac{m(m-1)}{2}\varphi[x+(m-2)y] - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\varphi[x+(m-3)y]$ + &c. eſt $= Ay^m\,\frac{d^m\varphi x}{dx^m} + By^{m+1}\,\frac{d^{m+1}\varphi x}{dx^{m+1}}$ + &c. A & B &c. étant des coefficiens qu'il eſt très-aiſé de déterminer; on peut même imaginer pour cela des méthodes trés-ſimples, dans le détail deſquelles il ſeroit trop long d' entrer, & qui donneront la loi de ces coefficiens.

Cela poſé, on fera

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) - \varphi x = y\sqrt{-1}\,\frac{d\varphi x}{dx} - y^2\,\frac{d^2\varphi x}{2dx^2} - y^3\sqrt{-1}\,\frac{d^3\varphi x}{2.3\,dx^3} + y^4\,\frac{d^4\varphi x}{2.3.4\,dx^4} + \&c.$$

$$\varphi(x+y) - \varphi x = y\,\frac{d\varphi x}{dx} + y^2\,\frac{d^2\varphi x}{2\,dx^2} + y^3\,\frac{d^3\varphi x}{2.3\,dx^3} + \&c.$$

$\varphi(x + 2y) - 2\varphi(x + y) + \varphi x = a y^2 \frac{d^2\varphi x}{dx^2} + b y^3 \frac{d^3\varphi x}{dx^3} + c y^4 \frac{d^4\varphi x}{dx^4} +$ &c.

$\varphi(x + 3y) - 3\varphi(x + 2y) + 3\varphi(x + y) - \varphi x = a' y^3 \frac{d^3\varphi x}{dx^3} + b' y^4 \frac{d^4\varphi x}{dx^4} +$ &c.

&c.

a, b, c &c. & a', b', c' &c. étant des coefficiens connus, & trouvés par ce qu'on vient de dire ; on multipliera enſuite la ſeconde équation par r, la troiſiéme par r', la quatriéme par r'' &c. r, r', r'' étant des coefficiens indéterminés, & après les avoir ajoutées enſemble on fera chaque terme du ſecond membre $= 0$, ce qui donnera $\sqrt{-1} + r = 0$, $-\frac{1}{2} + \frac{r}{2} + ar' = 0$, $\frac{\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{r}{2.3} + br + a'r'' = 0$ &c., & ainſi de ſuite ; d'où l'on tirera r, r', r'' &c. & le problème ſera réſolu.

Je ne fais ici, Monſieur, qu'indiquer les principaux points de la ſolution, qu'il eſt d'ailleurs aiſé de ſimplifier, ainſi que je l'ai déja dit. Je crois au reſte que toutes ces méthodes pour déterminer $\varphi(x + by\sqrt{-1})$ ſont plus curieuſes qu'utiles ; car 1.° ſi φx n'eſt point une fonction algébrique, mais une fonction diſcontinue, en ce cas il y aura un *ſaut* dans quelqu'un des $d^n\varphi x$, & par conſéquent l'expreſſion trouvée ci-deſſus de $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi x$, ou toute autre, je crois, qu'on y voudroit ſubſtituer, ſera fautive, ſi je ne me trompe. 2.° ſi φx eſt algébrique, on peut imaginer différentes méthodes pour déterminer algébriquement, ou au moins géométriquement, les quantités $\varphi(x + by\sqrt{-1}) + \varphi(x - by\sqrt{-1})$ ou $\frac{\varphi(x+by\sqrt{-1}) - \varphi(x-by\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$.

J' oublie de vous faire remarquer que ſi, par exemple, $\varphi x = x^m$, la ſérie que je propoſe ſe terminera après le terme $\varphi[x + my] - m\varphi[x + (m-1)y] + \frac{m \cdot m-1}{2} \varphi[x + (m-2)y] +$ &c.; car ſi, par exemple, $m = 2$, on aura $\varphi(x + 3y) - 3\varphi(x + 2y) + 3\varphi(x + y) - \varphi x = 0$.

En général on aura

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi x = + r\varphi x - r'\varphi x + r''\varphi x - \text{\&c.}$$
$$- r\varphi(x + y) + 2r'\varphi(x + y) - 3r''\varphi(x + y) + \text{\&c.}$$
$$- r'\varphi(x + 2y) + 3r''\varphi(x + 2y) - 3r''\varphi(x + 2y) + \text{\&c.}$$
$$- r''\varphi(x + 3y) + 4r'''\varphi(x + 3y) - 10r^{IV}\varphi(x + 3y) + \text{\&c.}$$

& ainſi de ſuite.

Il eſt aiſé de voir auſſi que ſi on eut cherché de même la valeur de $\varphi(x - y\sqrt{-1}) - \varphi x$, & combiné les deux opérations enſemble, il en ſeroit réſulté beaucoup d' abbreviation dans le calcul; par exemple on a $\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2\varphi x - 2y^2 \frac{d^2\varphi x}{2dx^2} + 2y^4 \frac{d^4\varphi x}{2.3.4dx^4} +$ &c. & $\varphi(x + y) + \varphi(x - y) = 2\varphi x + 2y^2 \frac{d^2\varphi x}{2dx^2} + 2y^4 \frac{d^4\varphi x}{2.3.4dx^4} +$ &c.; d' où il eſt facile de conclure que les y^2, y^6, y^{10} &c. diſparoitront; ce qui ſimplifiera beaucoup les formules.

V I I.

Je dois vous faire obſerver, à l'occaſion de mes Recherches ſur les verres optiques, inſérées dans le troiſiéme Tome de mes Opuſcules, que la ſubſtitution preſcrite dans l'Art. 441. de $\frac{1-m}{r} + \frac{m}{\delta}$ à la place de $\frac{1}{\delta'}$ doit donner de plus dans le réſultat final le terme $+ \frac{P-1}{2\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\delta}\right)$ qui a été omis par inadvertance, ſans que cette omiſſion touche en rien au fond de ma méthode pour trouver

l' aberration, lorsque le point lumineux est hors de l'axe; méthode que vous trouverez, je crois, plus naturelle & plus simple que celles qui ont été employées par d'autres Géomètres pour résoudre le même Problème. Quoiqu'il en soit, la restitution de ce terme a simplifié beaucoup mes formules pour l' aberration latitudinale, & m' a donné les dimensions de deux excellens objectifs, composés chacun de deux lentilles de verre commun ou *crownglass*, & d'une de cryftal d' Angleterre ou *flintglass*, qui est entre les deux autres, & collée contre elles. Voici les dimensions de ces objectifs; R étant la distance focale, & r, r', r'', r''', les rayons des quatre surfaces, on a pour l' un des objectifs

$$r = +0,5986R$$
$$r' = -0,3255R$$
$$r'' = +0,7288R$$
$$r''' = -1,8116R$$

& pour l' autre

$$r = +0,4630R$$
$$r' = +2,7574R$$
$$r'' = +0,2081R$$
$$r''' = -15,594R.$$

Ces deux objectifs ont chacun cela d' excellent, qu'ils resteroient encore très-bons, quand on commettroit dans les valeurs de r, r' &c. des erreurs considérables. C' est ce que je me propose de détailler plus au long, soit dans les Mém. de l' Académie des Sciences de Paris, soit dans le quatriéme Volume de mes Opuscules.

Au reste les dimensions que je viens de donner supposent que le rapport de dP à dP' soit $\frac{2}{3}$; il est inutile de dire qu' elles changeroient si $\frac{dP}{dP'}$ avoit une autre va-

leur, par exemple celle de 20 à 32, comme pluſieurs expériences le donnent; dans ce cas l'aberration de refrangibilité ne ſeroit pas détruite, mais $= \frac{11}{45}$ de celle d'une lentille biconvexe iſocele, ce qui eſt conſidérable; mais il eſt aiſé de remédier à cet inconvénient par différens moyens qu'il ſeroit trop long de détailler ici.

F I N.

ERRATA PARTIS PHYSICAE

Sic corrigenda.

Pag. 41. *lin*. 6. quam vis affrictus	-	quum vis affrictus.
P. 49. *l*. 10. converſa ſunt vel angulum	-	converſa ſunt, & vel angulum.
P. 61. *l*. 23. ab infima ad ſupremum	-	ab infima ad ſupremam.
P. 165. *l*. 7. quos in calida	- - - -	quos in calidam.
l. 18. in ignem difflabilem	- -	in igne difflabilem.
P. 166. *l*. 2. atque inſuper deprehendimus	-	atque adeo deprehendimus.

Ad *P*. 174. thermometrum reaumurianum de quo hic, & alibi in praecedentibus Tomis mentio fit erat mercuriale, cujus ſcala inter frigus liqueſcentis glaciei, & calorem aquae ebullientis in octuaginta gradus diviſa erat: quae monenda eſſe cenſuimus, quum hujuſmodi gradus a ſimilibus gradibus thermometri ſpiritu vini confecti, qualia ſunt reaumuriana, ob varias, ut notum eſt cauſſas, valde diſſentiant.

P. 180. *l*. 11. Botanicas	- - - -	Botanices.
P. 199. *l*. 4. nigruans, ventre ad	-	nigricans, ventre ad
P. 204. *l*. 16. 24. agarium	- - -	agaricum.
P. 210. *l*. 25. Ignotam	- - - -	ignotum.
P. 215. *l*. 16. previa eſt	- - - - -	pervia eſt.
l. 25. duplicis denſa	- - -	duplici denſa.
l. 27. parviis	- - - - -	parvis.

Fautes à corriger dans les Mémoires de M.^{rs} DE LA GRANGE & D'ALEMBERT.

Page 185. ligne dernière au lieu de *à la fin de l' Article précedent* lisez *par l' autre méthode.*

P. 189. l. 4. à compter d' en bas au lieu du terme $+ q$ lisez $+ q^2$.

P. 214. l. 7. à la fin effacez 1.

P. 216. l. 5. à compter d'en bas mettez le signe — avant le second membre de l' équation.

P. 249. l. prem. au lieu de *la méthode* lisez *par la méthode.*

P. 258. l. 6. à compter d' en bas au lieu de *le nombre* a lisez *le nombre* n.

P. 265. l. 6. & 11. au lieu de $\sqrt{(\frac{4 M^3}{9} - 2 K^2)}$ lisez $\sqrt{(\frac{4 M^3}{9} - 2 K^2 N)}$.

P. 272. l. 4. au lieu de $\frac{15 M^2}{12 K^2}$ lisez $\frac{5 M^2}{12 K^2}$.

P. 315. l. 2. & 3., & au lieu de $\sin. (h' + im) t$ lisez $\sin. (h + im) t$, au lieu de $\cos. (h' + im) t$ lisez $\cos. (h + im) t$.

Même page l. 3. & 5. à compter d' en bas au lieu de $4 h' (m 1 - m 2)$ au dénominateur lisez $4 h (m 1 - m 2)$.

P. 323. l. 5. à compter d' en bas au lieu d' *espace* lisez *espèce*.

P. 326. l. 12. à compter d' en bas au lieu de S lisez s.

P. 381. l. 6. à compter d' en bas au lieu de *conséquence* lisez *conséquent*.

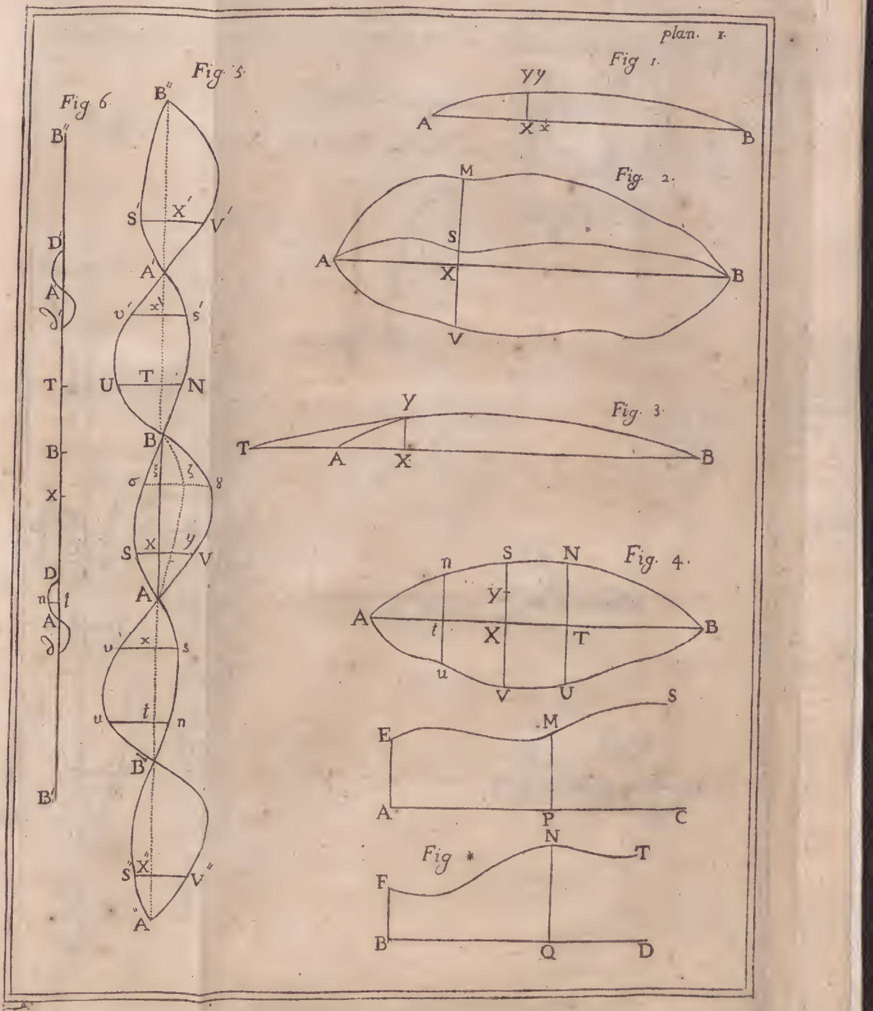
P. 388. l. 7. à compter d'en bas au lieu de $- k' d \varepsilon \cos. \pi$ lisez $+ k' d \varepsilon \cos. \pi$.

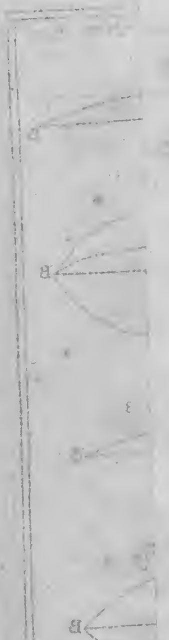
P. 394. l. 10. au lieu de $- 3 r'' \varphi (x + 2 y)$ lisez $- 6 r''' \varphi (x + 2 y)$.

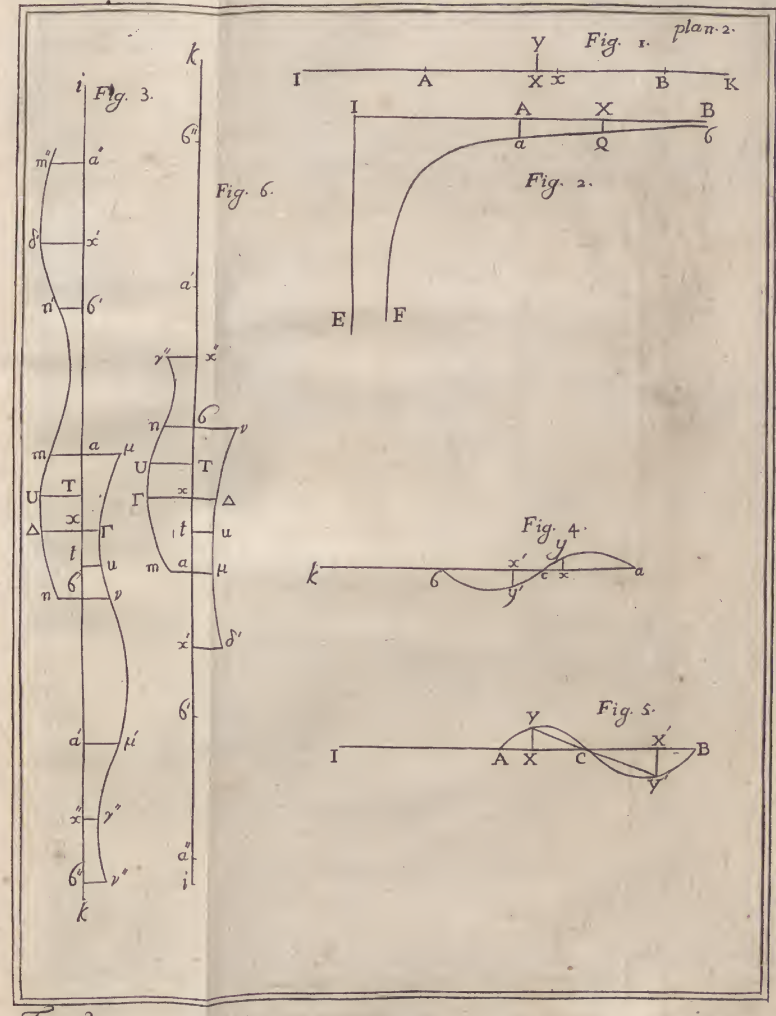
Imprimatur. PISELLI Vic. Generalis S. Officii Taurini.

Se ne permette la ſtampa

GALLI per la Gran Cancelleria.


plan. 1
Fig 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig 5.
Fig 6.
Fig *





Tom. 3.

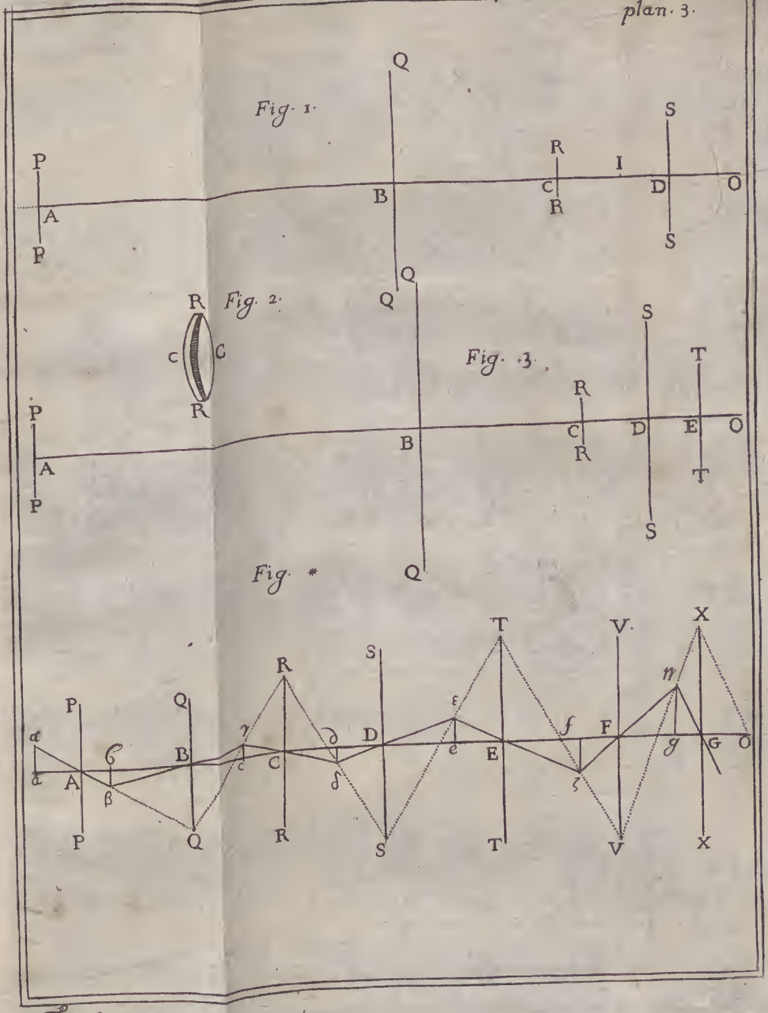


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. *




T . IV
F. 1
a b c d e
F. 2
b a d e c
Tom. 3.


T. V
a
c
6
F. 1
F. 2
c
6
a
Tom. 3.

T. VI



Tom. 3.

T. VII



1611